


Manuel Silva
Universidade Nova de Lisboa
mnas@fct.unl.pt

Pedro J. Freitas
Universidade de Lisboa
pedro@ptmat.fc.ul.pt

A CONJETURA ABC

"A conjetura abc é o problema em aberto mais importante de análise diofantina." Dorian Goldfeld

TÃO SIMPLES COMO $A+B=C$

A conjetura abc que iremos descrever é um dos problemas em aberto mais importantes da Teoria dos Números. Da sua validade resultariam como corolários diversos teoremas clássicos e seria ainda possível resolver problemas novos. O último Teorema de Fermat demonstrado por Andrew Wiles em 1994, o qual afirma não existirem soluções inteiras positivas para a equação $a^n + b^n = c^n$ com expoente $n \geq 3$, teria a demonstração curta sonhada em tempos por Fermat. Resolver a conjetura abc implica certamente ir um pouco mais longe na compreensão da estrutura dos números naturais. Mas será que ainda existem problemas por resolver envolvendo apenas os números naturais?

Sabemos que um número natural pode ser primo ou composto, mas seria interessante ter uma medida que permitisse decidir qual entre dois números naturais é mais composto. Por exemplo, apetece dizer que $1024 = 2^9$ é fortemente composto, e que $481 = 13 \times 37$, que é produto de dois primos, é quase-primo. Dado um natural n, definimos $r(n)$ como sendo o produto dos fatores primos de n. No caso de $126 = 2 \times 3^2 \times 7$, teremos $r(n) = 2 \times 3 \times 7 = 42$. Seja $\alpha > 0$ o expoente a que temos de elevar $r(n)$ para obter n. Se n for um quadrado perfeito, então o valor do expoente α é naturalmente não inferior a 2. Se n é um inteiro livre de quadrados (nenhum fator primo aparece repetido), então o expoente $\alpha = 1$. Em geral, o expoente α é dado por $\alpha = \ln n / \ln(r(n))$.

O teorema fundamental da aritmética diz-nos que todo o número natural admite uma fatorização única como produto de números primos. Por exemplo, $126 = 2 \times 3^2 \times 7$. Os números 2, 3 e 5 são os fatores primos, um dos quais aparece duas vezes. A conjetura abc, que iremos descrever com mais precisão, prevê restrições inesperadas nas fatorizações de triplos de inteiros positivos (a, b, c) tais que $a + b = c$. Nos triplos de inteiros considerados não podem existir fatores comuns entre a e b, i.e., o máximo divisor comum entre a e b é 1.

Dado um triplo de inteiros positivos (a, b, c), definimos o radical do triplo, e denotamos por $r(a, b, c)$, como o produto de todos os fatores primos distintos em a, b e c. Por exemplo, dado o triplo 9, 16, 25 (onde $25 = 16 + 9$), teremos $r(9, 16, 25) = 3 \times 2 \times 5 = 30$. Uma tarefa difícil é encontrar triplos (a, b, c) tais que $r(a, b, c) < c$. Ainda assim, existem infinitos triplos que satisfazem esta desigualdade. Por exemplo, os triplos de inteiros dados por: $a = 1, b = 9^n - 1$ e $c = 9^n, n \in \mathbb{N}$, verificam a desigualdade referida.

Seja q o expoente a que devemos elevar o radical $r(a,b,c)$ do triplo de modo a obter c. A qualidade de um triplo (a,b,c) é dada pelo valor do expoente q. Os triplos interessantes correspondem a valores do expoente q maiores do que 1. O valor máximo conhecido até hoje para algum triplo (a,b,c) é aproximadamente 1.63, obtido à custa do improvável triplo: $a = 2$, $b = 3^{10} \times 109$ e $c = 23^5$.

A conjetura abc tem diversas formulações, uma delas estipula que existe um majorante para o valor do expoente q, i.e., o valor de q não pode ser arbitrariamente grande. Um enunciado alternativo, e ainda mais forte, da conjetura abc afirma que o número de triplos (a,b,c) com qualidade maior do que um dado $h > 1$ é finito.

De um modo mais intuitivo, podemos dizer que a conjetura abc nos diz que se somarmos dois números a e b fortemente compostos, então o resultado desta soma $c = a + b$ deve ser um numero quase-primo. Parece existir aqui uma estranha interferência entre a operação de adição nos naturais com uma propriedade de tipo multiplicativo (fatorização de números).

A validade da conjetura abc permitiria demonstrar por exemplo uma propriedade importante sobre os inteiros que são potências com expoente maior do que 1. Se considerarmos o conjunto dos quadrados perfeitos, facilmente verificamos que estes se afastam cada vez mais uns dos outros: a diferença entre n^2 e $(n+1)^2$ é $2n+1$. Os cubos perfeitos têm um comportamento análogo.

Consideremos agora

$$S = 1, 4, 8, 9, 16, 25, 27, 32, 36, 49, 64, 81, 100, \ldots$$

o conjunto dos naturais $n = m^k, k > 1$ das potências perfeitas. Será que também neste caso as potências perfeitas se afastam indefinidamente? Embora não pareça existir nenhuma razão que impeça a existência de infinitos pares de potências perfeitas (x,y) tal que $|y - x| < 100$, uma famosa conjetura do matemático S. Pillai estipula que o número de pares nestas condições se esgota.

Um fenómeno do mesmo tipo, e talvez mais intrigante, é saber se o conjunto das potências $a^n, n \in \mathbb{N}$ se afasta indefinidamente do conjunto das potências b^n, onde a e b são inteiros positivos primos entre si. A este respeito, a famosa conjetura de Catalan, demonstrada em 2002 por Preda Mihailescu, diz-nos que não existem potências de inteiros consecutivas com expoentes maiores do que um, exceto 8 e 9.

No caso particular em que $a = 2$ e $b = 3$ é possível provar que cada uma das equações $2^n - 3^m = k, n, m \in \mathbb{N}$, e k inteiro não nulo fixo, tem apenas um número finito de soluções. O teorema fundamental da aritmética diz-nos, e a sua demonstração explica, por que razão nenhuma potência a^n pode coincidir com uma potência b^n, onde a e b são primos entre si e $n > 1$. Uma questão mais profunda é a de saber por que razão dois conjuntos de potências distintos se afastam indefinidamente. A demonstração da conjetura abc ajudaria a perceber quais as forças misteriosas que operam no conjunto dos números naturais, repelindo neste caso as potências de base distinta.

UM INTERGEÓMETRA UNIVERSAL

Em agosto de 2012, o matemático japonês Shinichi Mochizuki afirmou ter obtido uma demonstração da conjetura abc. No total, os argumentos para a prova da conjetura ocupam cerca de 500 páginas, sendo introduzidos ao longo do texto diversos conceitos completamente novos. Até agora, nenhum especialista na área considerou válida a demonstração apresentada. Não fosse o caso de Mochizuki ser um matemático conceituado, ninguém daria importância à sua tentativa de demonstrar a conjetura abc. Na sua página pessoal, Shinichi Mochizuki não se intitula matemático mas intergeómetra universal, não sendo claro o que isso possa significar. Julgo que qualquer matemático, num caso destes, deseja que uma demonstração nova apresentada de um qualquer problema famoso esteja correta. Isso significa que o universo matemático se expande mais uma vez, dando origem a outras questões tão simples e curiosas como o último Teorema de Fermat ou a conjetura abc.