

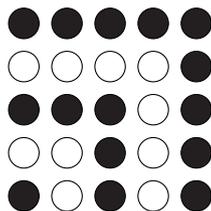
O que vem à rede...

A Forma dos Números

António Machiavelo

Departamento de Matemática Pura da
Faculdade de Ciências da Universidade do Porto

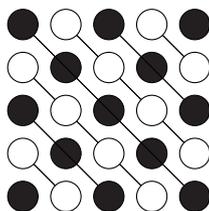
Como era já do conhecimento dos pitagóricos (século V e IV a.C.), certas relações entre os números inteiros podem ser descobertas representando números por conjuntos de pontos, arranjados de forma conveniente. Por exemplo, a figura seguinte:



sugere imediatamente que a soma dos primeiros n números ímpares é precisamente n^2 , ou seja:

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$$

Um outro exemplo é dado pela figura:



que sugere a relação:

$$1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) + n + (n-1) + \dots + 3 + 2 + 1 = n^2$$

de onde resulta:

$$2 \times (1 + 2 + 3 + \dots + (n-1)) = n^2 - n,$$

ou

$$1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) = n \times \frac{n-1}{2}$$

Várias outras relações deste tipo estão propostas como exercícios (com dicas e soluções) na página do Atractor, em:

http://www.atractor.pt/mat/sem_palavras/index.htm

sob o título "Sommas com um nº finito de parcelas", num conjunto de "applets" de alguma beleza.

Estas representações dos números por pontos dão lugar a toda uma variedade de conjuntos interessantes de números, nomeadamente os números poligonais: números triangulares, quadrados, pentagonais, etc... Em geral, o primeiro número m -gonal é 1, sendo o n -ésimo formado a partir do anterior acrescentando um ponto em dois lados adjacentes e completando a figura por forma a formar um polígono com m lados, em que cada lado tem n pontos contando com os vértices.

Uma ilustração interactiva está disponível em:

<http://www.cut-the-knot.org/Curriculum/Algebra/PolygonalNumbers.shtml>

Um dos resultados mais notáveis relativos a números figurados é sem dúvida o resultado conhecido pelo nome de *Teorema dos Números Poligonais*, descoberto por Pierre de Fermat (1601 - 1665):

Todo o número (inteiro positivo) pode ser escrito como soma de n , ou menos, números n -gonais.

Em particular, todo o número se pode escrever como soma de, no máximo, 3 triangulares, 4 quadrados, 5 pentagonais, etc... Como acontece com muitos dos seus resultados, em especial em Teoria dos Números, não se conhece a demonstração do próprio Fermat. Em 1772 Carl Gustav Jacobi (1804 - 1851) e Joseph Louis Lagrange (1736 - 1813) demonstram, de forma independente, o resultado de Fermat para os números quadrados. Em 1796, e como resultado

