



DECIDIR, DECIDIR, DECIDIR

ROSÁRIO FERNANDES
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
mrff@fct.unl.pt

Em 1971, o matemático Thomas L. Saaty descreveu um processo de apoio à decisão de situações que envolvessem diversas alternativas, o AHP, sigla de *Analytic Hierarchy Process*, Processo Analítico Hierárquico em português. Ainda hoje, passados 50 anos, é um dos processos mais utilizados por gestores, economistas, engenheiros, matemáticos.... Neste artigo é apresentado, de uma maneira muito leve, este processo.

Desde os tempos mais remotos que o Homem é confrontado diariamente com situações que exigem da sua parte uma escolha entre duas ou mais alternativas. Muitas vezes são situações muito simples, relacionadas com o seu quotidiano: O que vou vestir hoje? O vestido azul ou o amarelo? O que vou comer ao almoço? Bife de vaca, robalo grelhado ou cozido à portuguesa? Como me devo comportar perante o meu patrão? Convido-o pessoalmente para o meu casamento ou envio-lhe o convite por correio? O que vou oferecer ao Rui pelo seu aniversário? Um livro, um telemóvel ou o carro dos seus sonhos? Estas e muitas outras questões são resolvidas usando o bom senso, os conhecimentos adquiridos, a intuição, o protocolo, a opinião de terceiros... Mas, apesar de todas serem situações que não acarretam grandes complicações, inconscientemente ou conscientemente estabelecemos critérios para basearmos a nossa decisão: hoje ao almoço como robalo grelhado porque ontem comi bife de vaca e o cozido é um alimento de difícil digestão; Vou oferecer ao Rui um livro porque o carro é muito caro e ele tem um telemóvel novo...

No entanto, existem situações cuja decisão pode acarretar consequências indesejáveis: a compra de uma casa, a compra de um carro, a contratação de um funcionário para uma determinada empresa, a retirada de um medicamento do mercado, o lançamento no mercado de um produto, a abertura de uma loja... Nestes casos, torna-se complicadíssima a decisão se esta envolver muitas alternativas

com parâmetros diferentes. Com este tipo de situações foi confrontado o matemático Thomas L. Saaty, nos anos 70 do século passado, quando trabalhava no Departamento de Defesa dos Estados Unidos. Para facilitar a decisão final de uma situação que exigisse uma escolha, em 1971 ele criou o AHP, sigla de *Analytic Hierarchy Process*, Processo Analítico Hierárquico em português. De 1972 a 1978, Saaty efetuou alterações no AHP com a aplicação deste a casos concretos, por exemplo, o racionamento da energia nas indústrias e o estudo dos transportes no Sudão. Passados 50 anos da sua conceção, continua a ser um dos processos mais amplamente utilizados e estudados no apoio à decisão na resolução de situações que envolvem múltiplos critérios, como refere Brunelli em [1, pág. 64] e está patente no artigo [2] e na tese de mestrado [3].

De mencionar que os problemas de decisão - enquanto problemas de escolha entre alternativas, ou até de ordenação das mesmas - incluem não só problemas de decisão multicritério, mas também de decisão sob incerteza (ou "sob risco"), decisão em grupo, decisão multiestágio, etc. Apesar de o processo AHP ser o mais conhecido e também o mais discutido, existem muitos outros processos para análise de decisão multicritério, nenhum isento de limitações e defeitos. Por estas razões, muitas variantes do processo AHP têm sido propostas ao longo dos anos.

Neste artigo iremos descrever o processo AHP de uma maneira leve e didática, para uma leitura mais detalhada ver [1, 4, 5].

Este processo baseia-se em três etapas, que iremos descrever e exemplificar usando a seguinte situação:

Problema: O João, depois de finalizar o 12.º ano em Elvas, concorreu à universidade e ficou colocado na licenciatura em Matemática na Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa, que era a licenciatura dos seus sonhos. Como alojamento para o João frequentar a licenciatura, os seus pais têm duas alternativas de alugar: um quarto amplo num apartamento que fica a cinco minutos a pé da faculdade ou um apartamento, de tipologia T3, que dista 20 minutos em transportes públicos. Os pais do João consideram que o mais importante para o filho, nesta primeira fase, é estar perto da faculdade. Mas gostariam de passar temporadas com o filho para o ajudarem. Quanto ao valor que estão dispostos a gastar mensalmente no alojamento do João, este ronda os 700 euros. A renda mensal do quarto é de 300 euros e a do apartamento é de 900 euros. Com base nestes dados e critérios, qual o alojamento que os pais do João deverão alugar?

Uma vez que temos a situação definida, passamos à primeira etapa do AHP.

1. CONSTRUÇÃO DE HIERARQUIAS. No processo AHP o problema é estruturado em níveis hierárquicos através de um diagrama (grafo). No primeiro nível hierárquico colocamos o objetivo do problema, no segundo os critérios e no terceiro as alternativas. Assim, na figura 1 temos o grafo hierárquico da nossa situação concreta (problema) com o objetivo (alojamento João), os critérios (localização, tipologia, preço) e as alternativas (quarto, apartamento).

De mencionar que este processo admite outros níveis hierárquicos, que correspondem aos subcritérios e que no grafo hierárquico estão entre o dos critérios e o das alternativas, [1]. Por exemplo, se no nosso problema o critério "localização" exigisse outros parâmetros como "distância à faculdade", "distância ao supermercado", "distância a Lisboa",

estes seriam considerados subcritérios da "localização", [1].

Com o grafo construído, entramos na segunda etapa do AHP.

2. DEFINIÇÃO DE PRIORIDADES. Comparamos dois a dois os elementos do mesmo nível hierárquico, relativamente a um elemento do nível hierárquico imediatamente inferior, através da escala numérica de Saaty (figura 2). Nesta escala é colocado sempre em primeiro lugar o elemento que não tem importância inferior ao que surge em segundo lugar. Assim, podemos atribuir um valor numérico a quaisquer dois elementos do mesmo nível hierárquico: se, pela tabela de Saaty, obtivermos o valor numérico, i , da comparação do elemento j com o elemento k , então atribuiremos o valor $1/i$ à comparação do elemento k com o elemento j , para que se verifique a condição recíproca, ou seja, para que o produto do valor numérico da comparação

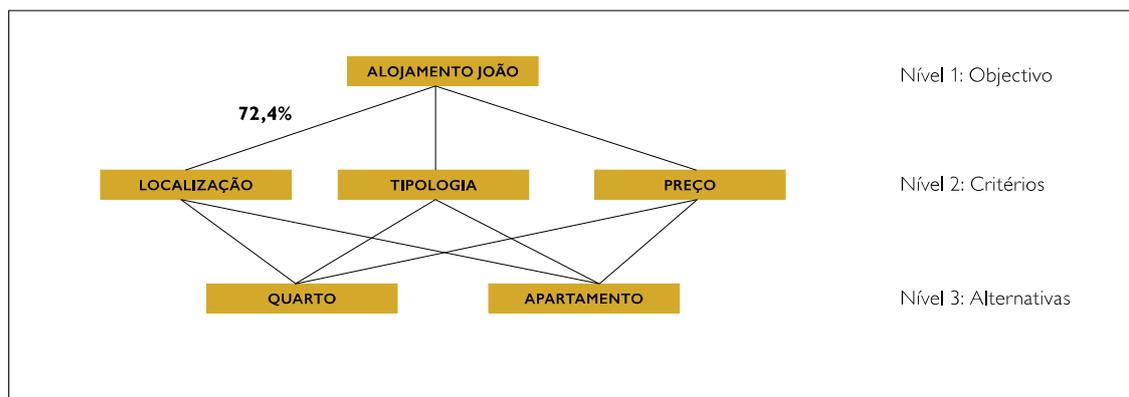


Figura 1. Grafo Hierárquico do Problema.

Escala Numérica	Definição	Explicação
1	Igual importância	Os dois elementos contribuem igualmente para o objetivo
3	Fraca importância	O primeiro elemento contribui ligeiramente mais para o objetivo
5	Forte importância	O primeiro elemento contribui mais para o objetivo
7	Fortíssima importância	O primeiro elemento contribui fortemente para o objetivo
9	Importância extrema	O primeiro elemento tem uma contribuição extrema para o objetivo
2, 4, 6, 8	Valores intermédios	Quando é necessária uma escala mais pormenorizada
Incremento de 0,1	Gradação mais fina	Quando é necessária uma escala pormenorizadíssima

Figura 2. Escala Numérica de Saaty.

de j com k pelo valor numérico da comparação de k com j seja 1, que corresponde ao valor numérico da comparação de j com j . Desta forma, torna-se possível a construção de quadros com o valor numérico das comparações dos elementos de cada nível hierárquico, relativamente a um elemento do nível hierárquico imediatamente inferior. Estes quadros são chamados matrizes de julgamento. Retomando a nossa situação e usando os dados do problema teremos as seguintes matrizes de julgamento das alternativas relativamente a cada um dos critérios.

$$A_1$$

Localização	Quarto	Apartamento
Quarto	1	7
Apartamento	1/7	1

$$A_2$$

Tipologia	Quarto	Apartamento
Quarto	1	1/7
Apartamento	7	1

$$A_3$$

Preço	Quarto	Apartamento
Quarto	1	3
Apartamento	1/3	1

Reparando a que critérios os pais do João dão mais valor, temos a seguinte matriz de julgamento dos critérios relativamente ao objetivo.

$$A_4$$

Alojamento João	Localização	Tipologia	Preço
Localização	1	5	7
Tipologia	1/5	1	3
Preço	1/7	1/3	1

A normalização de todas as matrizes que obtivemos é o passo seguinte, ou seja, dividimos cada número que se encontra na coluna l , da matriz A_p , pela soma dos números dessa coluna. A normalização das matrizes permite que os números que se encontram na matriz sejam comparáveis, pois estão reduzidos à mesma unidade. Às novas matrizes, denotadas por A'_p , determinamos a média dos números de cada linha, para obtermos a prioridade dos itens de cada nível hierárquico relativamente a um item do nível hierárquico imediatamente inferior. As matrizes finais são denotadas por A''_p e são chamadas matrizes das prioridades parciais. Para o nosso problema,

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 1/7 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow A'_1 = \begin{bmatrix} 1/8 & 7/8 \\ 1/7 & 1/8 \end{bmatrix}$$

Soma $\frac{8/7}{8}$ Média

$$= \begin{bmatrix} 0,875 & 0,875 \\ 0,125 & 0,125 \end{bmatrix} \rightarrow A''_1 = \begin{bmatrix} 0,875 \\ 0,125 \end{bmatrix}$$

O que significa que para o critério "localização", o quarto tem prioridade igual a 0,875 e o apartamento tem prioridade igual a 0,125.

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1/7 \\ 7 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow A'_2 = \begin{bmatrix} 1/8 & 1/7 \\ 7/8 & 1/7 \end{bmatrix}$$

Soma $\frac{8}{8}$ Média

$$= \begin{bmatrix} 0,125 & 0,125 \\ 0,875 & 0,875 \end{bmatrix} \rightarrow A''_2 = \begin{bmatrix} 0,125 \\ 0,875 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1/3 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow A'_3 = \begin{bmatrix} 1/4 & 3/4 \\ 1/3 & 1/4 \end{bmatrix}$$

Soma $\frac{4}{4}$ Média

$$= \begin{bmatrix} 0,75 & 0,75 \\ 0,25 & 0,25 \end{bmatrix} \rightarrow A''_3 = \begin{bmatrix} 0,75 \\ 0,25 \end{bmatrix}$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 1/5 & 1 & 3 \\ 1/7 & 1/3 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow A'_4 = \begin{bmatrix} 1/47 & 5/19 & 7/11 \\ 1/35 & 1/11 & 3/11 \\ 1/35 & 1/11 & 1/11 \end{bmatrix} \rightarrow A''_4 \simeq \begin{bmatrix} 0,724 \\ 0,193 \\ 0,083 \end{bmatrix}$$

Soma $\frac{47/35}{19/3}$ Média

O que significa que para o objetivo "alojamento do João", a localização tem prioridade igual a 0,724, a tipologia tem prioridade igual a 0,193 e o preço tem prioridade igual a 0,083, ou seja, os pais do João atribuem 72,4% à localização, 19,3% à tipologia e 8,3% ao preço.

Para determinarmos as prioridades (globais), que são obtidas das prioridades parciais dos critérios através da proporção estabelecida pelas prioridades parciais do objetivo, temos de calcular

$$0,724A''_1 + 0,193A''_2 + 0,083A''_3$$

Em termos matemáticos, isto é o mesmo que construir as matrizes com as prioridades parciais de cada nível hierárquico e multiplicá-las. Ou seja,

$$\begin{bmatrix} A''_1 & A''_2 & A''_3 \end{bmatrix} A''_4 \simeq \begin{bmatrix} 0,875 & 0,125 & 0,75 \\ 0,125 & 0,875 & 0,25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,724 \\ 0,193 \\ 0,083 \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} 0,72 \\ 0,28 \end{bmatrix}$$

Estamos em condições de colocar as percentagens, obtidas nas matrizes das prioridades parciais A''_j , no diagrama do nosso problema, assim como as prioridades globais (figura 3).

Baseados nos resultados mas sujeitos ainda a uma última etapa do processo, os pais do João deverão alugar o quarto, já que possui um resultado numérico, 0,72 (72%), maior do que o apartamento, 0,28 (28%).

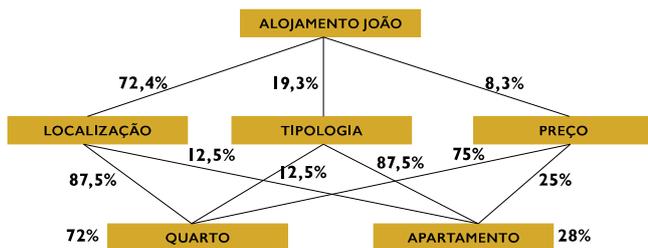


Figura 3. Grafo com os resultados do AHP.

Por último, temos a terceira etapa do AHP.

3. COERÊNCIA. Esta etapa consiste na prova de coerência do resultado obtido na etapa anterior. A coerência do método é obtida com a coerência de todas as suas matrizes de julgamento com pelo menos três colunas, já que as outras matrizes são sempre coerentes, [1]. Fazemos a prova de coerência pois os valores que são colocados nas matrizes de julgamento têm por base julgamentos subjetivos, o que leva a que ocorram desvios em relação ao valor ideal. Sendo A uma matriz de julgamento, com $n \geq 3$ colunas (de ordem n), que na etapa 2 teve A'' como sua matriz das prioridades parciais, então efetuamos o produto AA'' , que como mencionado anteriormente é o mesmo que obter o resultado da proporção entre as prioridades parciais e as colunas de A . Seguidamente dividimos cada elemento da linha r de AA'' pelo elemento da linha r de A'' . Denotamos a última matriz que obtivemos por A''' . Saaty definiu a razão de coerência de A , denotada RC , por $RC = IC/IA$, em que IA é o Índice Aleatório de uma matriz de ordem n , proposto por Saaty através de matrizes aleatórias de ordem n e constante na tabela seguinte

n	3	4	5	6	7	8	9	10
IA	0,58	0,9	1,12	1,24	1,32	1,41	1,45	1,49

e em que IC é o Índice de Coerência da matriz A , dado por $IC = \frac{\lambda_{max} - n}{n - 1}$, onde λ_{max} é a média dos elementos da matriz A''' . Segundo Saaty, a matriz A é coerente se o seu RC for inferior a 0,1, ou seja, 10%. Assim, no nosso problema temos

$$A_4 A_4'' \simeq \begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 1/5 & 1 & 3 \\ 1/7 & 1/3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,724 \\ 0,193 \\ 0,083 \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} 2,273 \\ 0,588 \\ 0,251 \end{bmatrix}$$

$$A_4''' \simeq \begin{bmatrix} 2,273/0,724 \\ 0,588/0,193 \\ 0,251/0,083 \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} 3,141 \\ 3,043 \\ 3,014 \end{bmatrix}$$

Então,

$$\lambda_{max} \simeq \frac{3,141 + 3,043 + 3,014}{3} \simeq 3,066.$$

Como neste caso $n = 3$, $IC \simeq \frac{3,066 - 3}{2} = 0,033$ e $RC = IC/IA \simeq 0,033/0,58 \simeq 0,057 < 0,1$. Logo, A_4 é coerente e o nosso problema é coerente pelo AHP, pelo que se confirma a conclusão anterior: os pais do João deverão optar por alugar o quarto.

Se o RC não fosse inferior a 0,1, deveríamos refazer os cálculos, atribuindo um valor mais razoável a algum ou alguns julgamentos que surgem nessa matriz, [1].

Como se comprovou, através da pequena situação que os pais do João tinham, com o processo AHP temos uma resposta admissível para as mais diversas situações que envolvam múltiplos critérios.

REFERÊNCIAS

- [1] M. Brunelli. *Introduction to the Analytic Hierarchy Process*. Springer (2015). <https://core.ac.uk/download/pdf/80714029.pdf>.
- [2] N. Bebiano, R. Fernandes e S. Furtado. "Reciprocal matrices: properties and approximation by a transitive matrix". *Computational and Applied Mathematics* 39 (2020) 50.
- [3] R.R. Pinho. *Modelo de Apoio à Decisão Multicritério para Seleção de Fornecedores de Folha de Flandres - Um Estudo de Caso na Empresa CAN*. Dissertação de Mestrado em Logística, I.P. Porto (2019). <http://hdl.handle.net/10400.22/14488>
- [4] T.L. Saaty. *Decider face à la complexité, "Une approche analytique multicritère d'aide à la décision"*, tradução de Lionel Dahan. Paris (1984).
- [5] R.W. Saaty. "The analytic hierarchy process—what it is and how it is used". *Mathematical Modelling* 9 (1987) 161-176.

SOBRE A AUTORA

Rosário Fernandes licenciou-se em Matemática na Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa e é professora associada da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa. É autora de diversos artigos científicos sobre grafos, matrizes e combinatória.