

mado problema de «los puentes de Koenigsberg», presentado por Euler, junto con su generalización a resultados generales sobre redes de líneas, en una memoria de la Academia de San Petersburgo en 1735. Se trata de lo siguiente: en aquella época había en Koenigsberg siete puentes sobre el río Pregel, dispuestos como indica la figura 1.

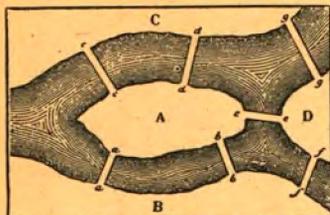


Fig. 1

que se modifique el tamaño y forma de la figura, con tal de no alterar la disposición general. Euler supone la deformación que reduce las islas y la tierra firme a puntos, quedando el esquema de la figura 2, donde

como curiosidad recreativa en sus paseos cotidianos, si será posible recorrer los 7 puentes en un solo paseo, sin pasar más de una vez por cada uno. Evidentemente el resultado será el mismo de cualquier manera

los trazos representan los puentes que hay que recorrer. El problema se reduce a ver si la red de esta última figura se puede recorrer de un solo trazo, sin repetir ningún lado. La solución es fácil: es imposible. En efecto, exceptuando el vértice de partida y el de llegada, los demás deben contener un número par de lados, puesto que se debe poder llegar por uno y salir por otro todavía no recorrido; por tanto no puede haber más de dos vértices a los cuales concurren

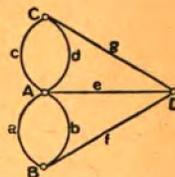


Fig. 2

un número impar de lados. Como en la red de la figura 2, hay 4 vértices en estas condiciones, se deduce que no podrá recorrerse en las condiciones dichas.

¿Quién hubiera podido adivinar que de este problema, al parecer simple pasatiempo de matemático andariego, había de derivar, con el tiempo, el frondoso y útil árbol que es hoy la Topología?

Extractos de una conferencia publicada en *Revista de Ingeniería*. Uruguay — Año XXXIX — n.º 450 — 1945.

## MOVIMIENTO CIENTÍFICO

### ALGUNS NÚMEROS SÔBRE A ESCOLA POLITÉCNICA FEDERAL DE ZURIQUE

Compilação de **A. Sá da Costa** (bolseiro em Zurique do I. A. C.)

A *Gazeta de Matemática* publicou em números anteriores <sup>(1)</sup> alguns artigos relativos à Escola Politécnica Federal (E. P. F.) com documentação suficiente para que qualquer leitor tenha uma idéia precisa do que ela é como escola e, portanto, como centro de trabalho científico, em especial nos domínios da matemática e da física. O que se segue pretende ser apenas um complemento estatístico daqueles artigos.

Os números e quasi todos os comentários que vão expôr-se foram extraídos das publicações:

(1) *Gazeta de Matemática* n.º 12: Sôbre o ensino da matemática na Suíça, I — Escolas superiores de Zürich, A Escola Politécnica Federal. Compilação de Maria do Pilar Ribeiro.

*Gazeta de Matemática* n.º 13: Sôbre o ensino da matemática na Suíça, II. Compilação de Maria do Pilar Ribeiro.

*Gazeta de Matemática* n.º 14: Sôbre o ensino da matemática na Suíça, III. Compilação de Maria Pilar Ribeiro.

*Gazeta de matemática* n.º 16: Sôbre o ensino da física em Zurique, por A. Gibert.

*Gazeta de Matemática* n.º 19: Conselhos aos estudantes da Secção de Matemática e Física da Escola Politécnica Federal de Zurique, tradução de Maria do Pilar Ribeiro.

*Gazeta de Matemática* n.º 24: Notícia sôbre o ensino da matemática em Zurique, por Maria do Pilar Ribeiro.

*Gazeta de Matemática* n.º 26: Sôbre a índole do ensino da matemática em Zurique, por Hugo Ribeiro.

1. *Statistisches Jahrbuch der Schweiz*, 1944, Basel, 1946.

2. *Eidgenössische Technische Hochschule*, Programm und Stundenplan für das Sommersemester 1946.

3. *Atlantis*, Sonderheft ETH, Band XVII, Heft 9, September 1945, Zürich.

4. *École Polytechnique Fédérale* — Son enseignement et ses instituts. Orell Fussli. Zürich, 1930.

5. *Festschrift zur Feier des fünfzigjährigen Bestehens des Eidgenössischen Polytechnikums*, I Band. Huber & Co. Frauenfeld 1905.

\*

A E. P. F. foi fundada em 1854. Actualmente compreende 11 secções especiais:

1. Arquitectura
2. Engenharia civil
3. a) Engenharia de máquinas  
b) Electrotecnia
4. Química
5. Farmácia
6. Silvicultura
7. Agronomia
8. Engenharia hidráulica e geográfico-cadastral

9. Matemática e física
10. Ciências naturais
11. Ciências militares

curso de ginástica e desportos e uma secção geral de cursos livres e repartidos em duas divisões:

1. Letras, história, filosofia, ciências económicas
2. Ciências matemáticas, naturais, técnicas e militares.

Esta secção geral de cursos livres, embora com outra organização, data da fundação da E. P. F. e foi criada com o objectivo de evitar uma deformação profissional dos alunos-engenheiros, obrigados pelo plano de estudos a frequentar à escolha pelo menos um número determinado dos seus cursos.

Nem tôdas as actuais 11 secções da E. P. F. datam da sua fundação. Assim, a secção 9, Matemática e Física foi criada posteriormente, destacando-se da divisão de ciências filosóficas e económicas da secção geral de cursos livres. A necessidade de uniformizar, melhorando-a, a preparação em matemática e física dos alunos que a E. P. F. admitia procedentes das escolas secundárias (gimnásios e escolas reais superiores), decidiu a sua intervenção na formação dos professores de matemática e física do ensino secundário, como único meio eficaz para atingir o fim em vista. Essa intervenção consistiu na constituição da escola normal de ciências matemáticas e físicas<sup>(1)</sup> a que corresponde a citada secção 9 cujos professores, então como ainda hoje com frequência, foram recrutados em grande parte nos melhores centros universitários da Europa.

\*

A E. P. F. está instalada em 11 edifícios:

1. Edifício principal
2. Laboratório de máquinas
3. Edifício da física
4. Edifício da química
5. Instituto da silvicultura e agronomia
6. Laboratório de ensaios de materiais
- 7 e 8. Instituto de ciências naturais
9. Observatório astronómico
10. Laboratório de hidráulica
11. Instituto do leite.

Dois institutos ocupam dependências de outros edifícios de Zurique. O observatório de astronomia está instalado em Arosa (Graubunden).

Nalguns edifícios, sobretudo no principal, no de

<sup>(1)</sup> A escola normal de ciências matemáticas e físicas da E. P. F. não possui o exclusivo da formação dos professores do ensino secundário. Com ela concorrem as universidades suíças e estrangeiras.

química e no laboratório de ensaios de materiais, apesar das suas proporções, a falta de espaço é evidente.

\*

O aumento da frequência da E. P. F. tem sido notável, e não se prevê que a admissão passe a sofrer quaisquer restrições numéricas.

	Alunos			Ouvintes
	suiços	estrangeiros	total	
1869-70	211	317	528	235
1899-00	620	387	1007	449
1919-20	1732	535	2267	1248
1929-30	1132	444	1576	1172
1939-40	1495	434	1929	2138
1944-45	2879 (159)	343 (18)	3222 (177)	2105

*Nota:* Os números entre parentesis referem-se à secção 9.

No ano lectivo de 1944-45 as 7 universidades suíças (Zurique, Basileia, Berna, Genebra, Lausana, Friburgo e Neuchatel) eram frequentadas, respectivamente, por

10157      1947      12104 (2380)      2435.

*Nota:* O número entre parêntesis refere-se às faculdades de filosofia ou de ciências.

Assim, no ano lectivo de 1944-45 as escolas superiores da Suíça (4.300.000 habitantes) eram frequentadas por

13036 estudantes suíços  
 2290 estudantes estrangeiros  
 15326 estudantes  
 4540 ouvintes.

É de notar o aumento da frequência durante a última guerra (já durante a precedente, 1914-18, se verificara facto análogo), apesar da redução do número de estudantes estrangeiros cuja presença na E. P. F. é, desde a sua fundação, coisa corrente. Durante a última guerra a frequência de estudantes estrangeiros variou como mostra o quadro seguinte que indica a procedência:

	Europa	Ásia	África	América
1938-39	405	6	11	21
1944-45	223	107	6	7

O aumento extraordinário verificado na frequência de estudantes asiáticos deve-se ao recente envio de uma centena de jovens turcos, como bolseiros do governo, que pretendem, seja fazer estudos regulares, seja fazer uma especialização.

Em 1944-45 foram admitidos 700 novos alunos, dos quais 37 para a secção de Matemática e Física.

No mesmo ano foram concedidos 351 diplomas dos quais 9 a matemáticos e 9 a físicos.

\*

A evolução numérica do corpo docente da E. P. F. está patente no quadro seguinte:

	Professores		Privatdozenten	Assistentes	Total
	ord.	ext.			
1869-70	38	9	19	7	73
1899-00	63	7	30	51	151
1919-20	70	2	41	85	198
1929-30	67	3	49	97	216
1939-40	71	11	49	123	254
1944-45	74	15	58	162	309

*Nota:* Neste quadro não estão incluídos os encarregados de cursos que não pertençam às categorias indicadas.

No ano lectivo de 1944-45 as 7 universidades suíças possuíam respectivamente

452 314 615 ? ?

dos quais são estrangeiros

58 20 56 ? ?

No corpo docente da E. P. F. contam-se actualmente 2 prémios Nobel (um de física e outro de química) e dêle fizeram parte 2 prémios Nobel (ambos de física) actualmente no Institut for Advanced Study, Princeton, U. S. A. <sup>(1)</sup>.

Da distribuição do serviço docente pelo corpo de professores da E. P. F. dá uma idêia aproximada o quadro que segue, referente ao semestre de verão de 1946:

Categorias	N.º	Número de horas por semana			
		Lições	Exercícios	Colóquios	Seminários
Prof. ord.	76	463 (6)	300 (4)	29	16
Prof. ext.	19	66 (3,5)	30 (1,5)	4	2
Prof. tit.	14	42 (3)	—	3	1
Privatdoz.	34	63 (2)	15 (0,5)	—	—
Diversos	43	127 (3)	—	—	—
Totais	186	761 (4)	345 (2)	36	19

- Notas:*
1. O número de horas de exercícios constitui apenas uma indicação aproximada.
  2. Como Diversos consideram-se os encarregados de cursos e os professores de outras escolas que regem na E. P. F. também.
  3. Entre parêntesis indicam-se médias.
  4. Não se mencionam neste quadro os tempos de práticas e laboratórios.

Nos exercícios, colóquios, práticas e laboratórios, cuja direcção efectiva compete aos professores, êstes são coadjuvados por 175 assistentes. Os laboratórios

<sup>(1)</sup> Como é sabido, são atribuídos os seguintes prémios Nobel: Física, Química, Medicina, Literatura e Paz.

funcionam das 7 ou 8 horas da manhã até às 12 e das 14 às 18.

Aos professores cabe ainda a direcção dos trabalhos dos diplomandos e doutorandos e, naturalmente, o serviço de exames e de provas de doutoramento.

A par de tudo isto, êles continuam os seus trabalhos pessoais de investigação científica a que deveram a sua nomeação para o quadro da E. P. F. e a cujo prosseguimento esta deve o nível dos seus estudos e a qualidade dos seus diplomados.

Em especial para a secção de Matemática e Física o quadro correspondente ao anterior apresenta-se como segue:

Categorias	N.º	Número de horas por semana			
		Lições	Exercícios	Colóquios	Seminários
Prof. ord.	9	57 (6)	10 (2)	5	10
Prof. ext.	1	5	—	—	2
Prof. tit.	1	2	—	—	1
Privatdoz.	6	12 (2)	1	—	—
totais	19	80 (4)	20 (1)	5	13
Assistentes	15				

\*

A E. P. F. confere o grau de doutor em ciências técnicas, naturais e matemáticas. Durante o semestre de inverno de 1945-46 realizaram-se 47 doutoramentos, dos quais 36 em ciências técnicas e 11 em ciências naturais (3 referentes a física). Em 1944-45, de 67 doutoramentos, 4 foram de matemática e física.

Durante o mesmo período foram atribuídos 2 títulos de doutor honoris causa um dos quais pela secção 9. Vivem actualmente 58 doutores honoris causa da E. P. F. dos quais 2 pela secção 9, ambos antigos professores da E. P. F., prémios Nobel de física e actualmente no Institut for Advanced Studies, Princeton, U. S. A.

\*

Estão actualmente postas a prémio 10 questões entre as quais 1 para a secção de Matemática e Física. Dois prémios podem ser atribuídos aos concorrentes de cada questão e o total de ambos pode ser de escudos 3.000 a 6.000 <sup>(1)</sup>.

Durante o semestre de inverno de 1944-45 foram atribuídos 5 prémios num total de escudos 15.000.

\*

De 286 pedidos de bôlsas de estudantes a E. P. F. atendeu 253.

\*

A E. P. F. possui uma biblioteca geral e 57 bibliotecas especiais anexas a laboratórios, institutos, seminários, etc.

<sup>(1)</sup> Tôdas as conversões foram efectuadas à razão de 1 fr. suíço = esc. 6.

Dá uma ideia do desenvolvimento da biblioteca geral, o quadro seguinte:

1865	8.800	volumes
1895	37.000	»
1925	116.525	»
1945	201.601	»

Em 1945 a biblioteca geral adquiriu 5.513 volumes, apesar das dificuldades resultantes da guerra, para a aquisição de livros americanos, ingleses, alemães, etc.

Além do corpo docente e dos estudantes da E. P. F. 1508 pessoas utilizaram a biblioteca geral que emprestou para leitura no domicílio 76751 volumes e para a sala de leitura 15868 volumes. Dos volumes emprestados para leitura no domicílio, 13608 foram devolvidos pelo correio.

A sala de leitura foi visitada por 43271 pessoas que puderam servir-se livremente dos 1.000 volumes e 500 revistas nela patentes. A sala de leitura está aberta das 8 às 12 e das 14 às 19 horas.

O ficheiro de literatura técnica forneceu 1658 informações verbais, das quais 912 ao meio escolar e 746 a administrações, indústrias, escolas e particulares nacionais e estrangeiros.

Em 1929 a biblioteca geral possuía 16754 volumes referentes à secção de Matemática e Física. No mesmo ano a biblioteca do Seminário Matemático contava 1400 volumes.

A biblioteca geral possui ainda 1.117.800 (1945) registos de patentes cujo movimento é notável.

A biblioteca da E. P. F. é alvo de constantes doações de professores, autoridades, sociedades científicas, etc.

\*

A E. P. F. é a única escola federal da Suíça, portanto a única directamente financiada pela Confederação. As 7 universidades suíças são cantonais.

Nas contas gerais da Confederação, cujo resumo nos últimos três anos (anos de economia de guerra) é o que segue, em milhares de escudos,

	Contas		Orçamento 1945
	1943	1944	
Receita	2.186.173	1.936.150	2.445.000
Despeza	3.047.714	3.183.183	3.490.800
Deficit	861.541	1.247.033	1.045.800

a parte da E. P. F., incluindo o Laboratório de ensaios de materiais, foi a seguinte:

Receita	12.289	12.510	13.632
Despeza	39.128	42.465	44.981
Deficit	26.839	29.955	31.349

A parte da biblioteca geral no orçamento da E. P. F. começou por 24 contos e é hoje superior a 300.

A Confederação não limita às dotações ordinárias indicadas o seu interesse pela E. P. F. e pelo ensino em geral.

Assim, das subvenções federais aos cantões, cujo total foi em 1943 de 1.197.000 contos, 77.910 contos destinaram-se ao ensino e à preparação profissional <sup>(1)</sup>.

E, quanto à E. P. F., ela recebeu da Confederação a título extraordinário

de 1910 a 1928	136.000 contos
em 1929-30	72.000 »
em 1946	162.000 »

para novas edificações, transformação dos edifícios existentes e equipamento de laboratórios e institutos de investigação.

Além disso a Confederação subsidiou directamente, só em 1944-45, 18 professores da E. P. F., abrindo-lhes créditos num total de 9.648 contos, para a realização de investigações científicas.

Se a Confederação é o principal financeiro da E. P. F., o Comércio, a Banca e a Indústria da Suíça contribuem sob tôdas as formas — directa e indirectamente, pela criação de fundações, por intermédio das sociedades científicas que mantêm vários institutos de investigação anexos à E. P. F. — para o progresso da escola que lhes forma os técnicos e os treina na actividade científica, de cujo rendimento não duvidam porque de há muito dela colhem frutos.

Durante o ano de 1944-45 a E. P. F. teve legados e doações num total de 9.150 contos.

O total de fundações da E. P. F. é de tal ordem que lhe permitiu durante o ano de 1944-45 destinar 1.292 contos ao financiamento de trabalhos científicos a realizar ou em realização nos seus laboratórios e institutos. No ano lectivo de de 1943-44 da mesma procedência e com igual destino dispôs a E. P. F. de 1.276 contos.

Entre outros os seguintes institutos anexos à E. P. F. são regular e substancialmente subsidiados por sociedades científicas, algumas organizadas expressamente com este fim e por sua vez largamente financiadas pela Indústria e Comércio suíços:

Instituto de Física Técnica  
Instituto de Organização Industrial  
Instituto de Investigação Económica.

<sup>(1)</sup> Do que fica exposto segue-se que, em 1943, a despeza ordinária com o ensino, no orçamento da Confederação, foi de 117.038 contos. Para obter o total que a montanhosa Suíça gastou com o ensino naquele ano seria necessário aumentar aquela verba com os créditos extraordinários atribuídos pela Confederação ao ensino e, ainda, com as dotações ordinárias e extraordinárias inscritas nos orçamentos dos cantões, municípios e comunas, destinadas às escolas primárias, primárias superiores e profissionais, ginásios, escolas reais superiores, técnicos e universidades, que são todos independentes da Confederação.

\*

Finalmente algumas indicações, que uma curta experiência depressa transforma em índices muito significativos da organização e da burocracia da E. P. F.

O programa e o horário dos cursos de cada semestre são preparados e impressos por forma a estarem à venda antes do encerramento do semestre anterior.

O regulamento da biblioteca geral prevê um quarto de hora como demora máxima na execução de qualquer requisição.

Na secretaria e na tesouraria da E. P. F., que estão abertas dos 8 às 12 e das 14 às 18, não se encontram mais de 20 funcionários.

O acto de matrícula e inscrição dura poucos minutos, por tal forma tudo está simplificado, bem preparado e liberto de papel selado.

E, nos corredores monumentais da E. P. F. faltam as fardas e as vénias aos lentes dos contínuos desocupados...

Zurique, Maio de 1946

## F R A N Ç A

### ASSOCIAÇÃO FRANCESA PARA O AVANÇO DAS CIÊNCIAS

CONGRESSO DE NICE DE SETEMBRO DE 1946

O 65.º congresso desta Associação realizar-se-á, na data indicada, em Nice no Centro Universitário Mediterrânico. A secção 1 — Matemáticas — será presidida por Emile Gau e secretariada por Paul Belgodère.

As questões postas na ordem do dia são :

1. Funções harmónicas e generalizações.
2. Corpos convexos e aplicações da convexidade.
3. Cálculos numéricos e aproximações.

A ordem do dia não exclui de modo algum comunicações relativas a qualquer outro ramo da Matemática.

A Associação abrange 26 secções que nas sessões gerais do congresso se encontram reunidas em 6 grupos, o primeiro dos quais — Ciências Matemáticas — compreende três secções: 1.ª Matemáticas, 2.ª Mecânica, e 3.ª Astronomia e Astrofísica.

O congresso da Associação cria, cada ano, na região em que se reúne, uma agitação científica que estimula a apresentação de trabalhos das Sociedades Científicas locais e a organização de exposições; facilita também o encontro de investigadores franceses e estrangeiros que trocam idéias e apresentam sugestões.

## SOCIEDADE MATEMÁTICA DE FRANÇA

CONFERÊNCIAS REALIZADAS EM 1945-46 (continuação)

N. ARONSZAJN: Sur certains développements canoniques en fonctions harmoniques de l'espace, (8-5-1946);  
B. COMBES: Sur une généralisation de l'inégalité de

Bienaymé, (29-5-1946); J. LERAY: Topologie algébrique (12-6-1946, 19-6-1946, 26-6-1946).

As conferências só recomeçarão em Outubro de 1946.

## NOTICIÁRIO

Em França, sob a direcção do Prof. F. Joliot, que é o director do Centro Nacional de Investigações Científicas, realizaram-se alguns progressos na organização dos trabalhos científicos. Efectuou-se a união das investigações puras e aplicadas, e criou-se um corpo de assistentes que em cada profissão há-de ajudar os investigadores. O Centro tem actualmente 280 técnicos a trabalhar, dirigidos por 15 membros. Está-se encarando actualmente a vinculação do Centro com os departamentos de investigação dos diferentes ministérios. Com êsse fim, foi criado um Conselho Superior de Investigações Coloniais e um Comité de

Coordenação das Investigações, vinculado com a defesa nacional. Os créditos para a investigação foram sucessivamente aumentados e atingem êste ano 500 milhões de francos.

O Prof. F. Joliot propôs a criação de um Centro de Investigações Tecnológicas e, de futuro, o Departamento ou Ministério das Investigações Científicas.

O Prof. F. Joliot é o presidente da Comissão Francesa para o Estudo da Energia Atómica, da qual fazem parte sua mulher Irene Joliot-Curie e os Professores Pierre Auyer e François Perrin.

\* \* \*

Em Wiesbaden (Alemanha) sob a direcção do físico A. Sommerfeld, o químico K. Clusius e o biólogo A. Kühn, apareceu a revista mensal *Zeitschrift für Naturforschung*, que substituirá a publicação mensal de antes da guerra *Der Naturwissenschaften*.

[Ciência e Investigação—Julho 1946]

\* \* \*

Durante a semana de 15-19 de Julho, teve lugar na Universidade de Chicago, um colóquio geral sobre Álgebra em que foram especialmente analisados os recentes progressos da álgebra nas suas relações com outros ramos da matemática como topologia, teoria das funções e geometria.

\* \* \*

A Royal Society celebrou em 15 de Julho o tricentenário do nascimento de Newton.

\* \* \*

O ano passado fundou-se em S. Paulo, Brasil, uma Sociedade Matemática, a que preside, por eleição, o

professor Omar Catunda, da Universidade daquela mesma cidade.

\* \* \*

A Academia das Ciências, em França, anunciou a concessão dos seguintes prémios para 1945:

Prémio Carrière — A. Lichnerowicz, da Universidade de Estrasburgo, pelos seus trabalhos matemáticos;

Prémio Montyon — Robert Fortet, da Universidade de Caen, pelos seus trabalhos de Cálculo das Probabilidades;

Prémio d'Ormy — Izdem Mandelbrojt, do Colégio de França, pelos seus trabalhos matemáticos;

Prémio Saintour — Marcel Brelot, da Universidade de Grenoble, pelos seus trabalhos matemáticos e especialmente pelas suas publicações sobre as funções sub-harmónicas.

Prémio Charles Dupin — Paul Vincensini, da Universidade de Besançon, pelos seus trabalhos de geometria superior.

O Prof. Elie Cartan foi eleito presidente da Academia das Ciências de Paris.

(do *Bull. Amer. Math. Soc.*, Vol. 52, n.º 5, Part. 1, May, 1946).

## MATEMÁTICAS ELEMENTARES

### PONTOS DE EXAMES DE APTIDÃO ÀS ESCOLAS SUPERIORES

I. S. C. E. F. — EXAME DE APTIDÃO — 3 de Agosto de 1946.

**2218** — Defina e enuncie as principais propriedades da simetria em relação a um ponto e a um eixo e justifique a sua aplicação como métodos de demonstração. Exemplifique, provando que «de todos os triângulos com a mesma base e a mesma altura, o isósceles tem perímetro mínimo». R: *Sejam  $\overline{AB}$  e  $h$  respectivamente a base e altura comuns. Então qualquer triângulo nas condições do enunciado poderá ter o seu terceiro vértice sobre a recta  $r$  paralela a  $AB$  à distância  $h$ . Tome-se  $\overline{A'B'}$  simétrico de  $\overline{AB}$  em relação a  $r$  e considerem-se os triângulos  $[ABC]$  isósceles e  $[ABC']$  não isósceles. Da simetria  $\overline{CB} = \overline{CB'}$  e  $C'B = \overline{C'B'}$  e como  $\overline{AC'} + C'B' > \overline{AC} + \overline{CB'}$  ter-se-á sempre  $\overline{AB} + \overline{AC'} + C'B > \overline{AB} + \overline{AC} + \overline{CB}$ .*

**2219** — Sabendo que as medidas dos catetos dum triângulo rectângulo são as raízes da equação  $2x(x+a)+b^2=0$  determine a medida da altura correspondente à hipotenusa do mesmo triângulo. Discuta o problema e examine, em particular, o caso de ser  $a = \sin t$  e  $b = \cos t$ , com  $t$  compreendido entre 0 e  $2\pi$ . R: *Sendo  $c_1$  e  $c_2$  os catetos,  $d$  a hipotenusa*

e  $h$  a altura tem-se:  $c_1 + c_2 = -a$ ,  $c_1 c_2 = b^2/2$  donde  $d^2 = c_1^2 + c_2^2 = (c_1 + c_2)^2 - 2c_1 c_2 = a^2 - b^2$  e  $h = c_1 c_2 / d = \frac{b^2}{2\sqrt{a^2 - b^2}}$ . A possibilidade do problema resultará

dos dados  $a$  e  $b$  satisfazerem a  $a < 0$ ,  $b \neq 0$ , e  $a^2 > b^2$  e em particular  $5\pi/4 < \alpha < 3\pi/2$  e  $3\pi/2 < \alpha < 7\pi/4$ .

**2220** — Diga de quantas maneiras distintas é possível extrair, duma só vez, um número par de esferas dum saco que contém  $n$ , tôdas diferentes. Resolva o mesmo problema no caso duma tiragem em número ímpar e mostre que o cociente dos dois resultados tende para a unidade quando  $n$  aumenta. R: *No primeiro caso tem-se:*

$\binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \dots = 2^{n-1} - 1$  e no segundo  $\binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \dots = 2^{n-1}$ . O cociente será  $\frac{2^{n-1} - 1}{2^{n-1}} = 1 - \frac{1}{2^{n-1}}$  e a fracção tende para zero quando  $n$  aumenta.

**2221** — Verifica-se que, utilizando de modo conveniente 7 pêsos respectivamente de 1, 3, 9, 27, 81, 243, e 729 gramas nos dois pratos duma balança, é