

$$\Delta U = \rho_x \left\{ \frac{1}{r_y} (\Delta_x \varphi(x+y)) \right\} = \rho_y \left\{ \frac{1}{r_x} (\Delta_y \varphi(x+y)) \right\}$$

pois tanto vale derivar $\varphi(x+y)$ em ordem a y como em ordem a x .

Mas

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_y} [\Delta_y \varphi(x+y)] &= \Delta_y - \Delta_y \left(\frac{1}{r_y} \right) (\varphi(x+y)) = \\ &= -4\pi \delta \varphi(x+y) = -4\pi \varphi(x), \end{aligned}$$

em virtude do resultado anterior relativo precisamente ao Laplaciano de $\frac{1}{r}$.

Logo,

$$\Delta U(\varphi) = -4\pi \rho(\varphi),$$

que é a equação de Poisson.

BIBLIOGRAFIA FUNDAMENTAL. — Além da obra de SCHWARTZ já indicada, ver especialmente o artigo do mesmo autor na *Revista de Telecomunicações*, Tomo 3, N.º 4, Abril, 1948. Pelo que respeita á introdução da função de Heaviside no estudo dos regimes transitórios dos circuitos eléctricos, consultar A. ANGOR — *Compléments de Mathématiques*, Coll. Technique du C. N. E. T., Paris, 1949 — págs. 450-459.

P E D A G O G I A

O PROGRAMA DE MATEMÁTICA DA ACTUAL REFORMA DO ENSINO LICEAL

I

por *Maria Teodora Alves*

Não se pode apreciar o programa de uma disciplina do ensino liceal, sem considerar o conjunto das outras disciplinas e os respectivos programas.

No estudo crítico que farei aos programas de Matemática, atenderei a esse facto, tanto mais que algumas disciplinas que constituíam o antigo 2.º ciclo liceal, foram desdobradas, pela actual reforma.

No 2.º ciclo liceal, além da Matemática, há as seguintes disciplinas: Português, Francês, Inglês, História, Geografia, Ciências Naturais, Ciências Físico-Químicas e Desenho. A estas actividades há ainda que acrescentar: Canto Coral, Educação Física, Religião e Moral e Mocidade Portuguesa.

Com verdade, não se poderá dizer que os alunos do 2.º ciclo liceal (13 a 15 anos) na época crítica do seu desenvolvimento, estejam aliviados de trabalho intelectual e físico.

Ao desdobramento de disciplinas corresponde sempre uma maior extensão de programas, maior exigência dos professores e dos pontos de exame.

Aquele programa de História do 2.º ciclo, no género, pode considerar-se um modelo perfeito de exagero e de minúcia. Na edição «Programas das disciplinas do ensino Liceal» começa na página 99 e termina na pág. 110.

É um saber estupendo e afluivamente instrutivo, para rapazes e raparigas dos 13 aos 15 anos.

Com razão, afirma o Dr. Decroly, o eminente pedagogo belga: «Les programmes ont été inspirés par

des hommes très savants dans leur spécialité, mais trop peu préoccupés de la psychologie, pour eux l'enfant est accessoire».

O período de desenvolvimento das crianças até aos 15 anos exige da parte da escola (professores e legisladores) os maiores cuidados e a maior prudência.

Com efeito, o crescimento mental atinge o máximo desenvolvimento à volta dos 16 anos (experiências de TERMAN) mas há outros psicólogos e experimentadores, tão categorizados como TERMAN, que reduzem o período de crescimento mental à volta dos 15 anos e, mesmo alguns deles, à volta dos 14 anos.

Ora a inteligência significa antes aptidão para adquirir conhecimentos do que os próprios conhecimentos já adquiridos.

Longe de mim a ideia de que seja possível desenvolver a inteligência sem comunicar informações e sem transmitir conhecimentos. Mais longe também a ideia de que o único propósito da educação é o desenvolvimento da inteligência.

Mas devo considerar que é esse um dos grandes propósitos da educação e aquele que mais de perto se liga aos programas e às disciplinas que constituem o curriculum. Analisarei os programas de Matemática, nos três ciclos liceais, tendo em atenção estas considerações.

O n.º 39 da «Gazeta de Matemática» insere um artigo de crítica aos programas de Matemática da actual reforma de ensino liceal, da autoria dos

Senhores Drs. L. Barros e F. David. Essa crítica põe em evidência faltas de rigor, incorrecções e impropriedades de linguagem e desconexões no encadeamento dos assuntos versados no programa. Embora eu divirja, num ou outro pormenor, da crítica feita, devo dizer que concordo com a sua linha geral.

O objectivo desta minha crítica será, em cada ciclo, a didáctica da Matemática imposta pelo respectivo programa, a concatenação dos tópicos e a coordenação do programa com o das outras disciplinas.

Programa de Matemática do 1.º ciclo

O programa apresenta neste ciclo, em cada um dos anos que o constituem, características muito diferentes.

No 1.º ano não há separação entre a Aritmética e a Geometria — o que acho muito bem.

No 2.º ano já está estabelecida essa separação, com a obrigatoriedade do estudo começar pela Geometria — o que acho muito mal.

O pedagogo inglês W. SUMNER, em «The teaching of Arithmetic and Elementary Mathematics», diz: «In secondary modern schools there should be no artificial separation of mathematical subjects».

Os metodologistas da Matemática, BRESLICH, NUNN, INGLIS e JUDD e muitos outros, são da mesma opinião.

Os programas de Matemática dos dois anos deste ciclo, são tão divergentes, quanto à sua metodologia, que parecem ter sido delineados por duas pessoas diferentes que, a tal respeito, não trocassem impressões.

Por outro lado, os programas do 1.º e 2.º anos estão descompensados, quanto à distribuição das matérias versadas.

Em primeiro lugar, houve um acrescentamento de matéria ao programa da reforma anterior. Só pode afirmar que a actual reforma de ensino trouxe redução no programa de Matemática do 1.º ciclo, quem não tenha feito a leitura comparativa dos programas de Matemática, neste ciclo, das duas reformas.

Eu vou citar as rúbricas do actual programa, de que o programa da reforma anterior foi acrescido:

«Gráficos: gráficos de barras, gráficos cartesianos. Regra de companhia. Representação gráfica da proporcionalidade directa; aplicação á resolução de problemas simples».

Como se vê, não houve redução; pelo contrário, houve substancial acréscimo.

Vejamos, agora, como se dá a descompensação das matérias no programa do 1.º ano e no do 2.º ano.

Se é certo que as rúbricas relativas ao sistema métrico decimal, números complexos e raiz quadrada de números inteiros transitaram do antigo programa do 2.º ano para o do 1.º ano, o programa do 2.º ano foi

acrescido da maior e mais difícil parte da Aritmética do 1.º ano da antiga reforma (critérios de divisibilidade, m. d. c. e m. m. c. de vários números, decomposição em factores primos e operações com números fraccionários).

Consideremos mais particularmente o programa do 1.º ano.

É uma lista de assuntos a versar e o professor é legalmente obrigado a «não alterar a ordem por que as matérias se encontram distribuídas no programa». Qual é o elo de ligação entre todas aquelas rúbricas? É evidente que a resposta a esta pergunta não pode ser dada pelo recitativo das próprias rúbricas; mas as instruções que acompanham o programa, conservam-se a esse respeito silenciosas.

O programa do 1.º ano apresenta-se por esse motivo desconexo. As desconexões vincam-se mais nitidamente quando pretendemos estabelecer ligação com o programa do 2.º ano.

A meu ver, uma simples frase, nas instruções ao programa, como mostrarei dentro em pouco, bastaria para lhe dar unidade em cada um dos anos do ciclo, estabelecendo entre eles a necessária ligação. Mas essa frase não aparece nas instruções ao programa, nem se suspeita que possa existir.

Quanto ao programa do 2.º é imposto que o seu estudo comece pela Geometria.

O primeiro período lectivo, no 2.º ano, será ocupado pelo estudo da Geometria, desligado da Aritmética.

Restam dois períodos lectivos para o estudo da aritmética do 2.º ano, que é *sòmente* isto:

«Noções de múltiplo e submúltiplo de um número; restos da divisão de um número inteiro por 10 e potências de 10, por 2 e 5, por 9 e 3; critérios de divisibilidade por estes números.

Prova dos nove das operações.

Divisores comuns de dois ou mais números; máximo divisor comum de dois ou mais números: determinação do máximo divisor comum de dois números pelas divisões sucessivas. Múltiplos comuns de dois ou mais números: determinação do menor múltiplo comum de dois números partindo do máximo divisor comum.

Noções de número primo; decomposição de um número num produto de factores primos; cálculo do máximo divisor comum e do menor múltiplo comum de vários números utilizando a decomposição em factores primos.

Fracções; simplificação e redução ao menor denominador comum; dízimas; redução de uma fracção a dízima; operações sobre fracções.

Fracções generalizadas; valores numéricos de expressões de termos fraccionários.

Proporcionalidade directa e inversa; proporções geométricas; propriedades fundamentais. Aplicações

da proporcionalidade a regras de três simples e composta, percentagens, regras de companhia e juros simples.

Representação gráfica da proporcionalidade directa; aplicação à resolução de problemas simples.»

Em dois períodos lectivos o aluno (12 anos) terá que adquirir os conceitos e a técnica de cálculo que corresponde a todas estas rúbricas.

Este saber, assim acumulado é um monte intransponível e indesbastável!

No ensino da Matemática há dois aspectos distintos a considerar:

Os conceitos e a sua ordenação lógica;

A técnica de cálculo e as suas aplicações.

Se a função formativa da Matemática é dada principalmente pelos conceitos e pela ordenação lógica, a técnica de cálculo — que não pode ser menosprezada — é obtida quase que exclusivamente, pelos exercícios de aplicação.

Todos os psicopedagogistas que conheço afirmam que a técnica de cálculo, para ter segurança e não ser automática — o automatismo no ensino é considerado por todos eles como o maior dos males — tem que ser obtida com repetidos exercícios, em intervalos espaçados, mas sucessivos.

É uma consequência das leis da aprendizagem (THORNDIKE, PIAGET, WATSON, HYDE, etc.).

Mas há outra grande dificuldade a remover: A técnica de cálculo em Aritmética, não dá «transfert» para o raciocínio aritmético. — «Practice in arithmetical computation did not transfer to arithmetical reasoning». — (Experiências de WINCH).

Mas no último período lectivo do 2.º ano os alunos são ainda sobrecarregados com trabalhos de revisão em todas as disciplinas. (Aproxima-se o Fantasma do exame...) Quer dizer, o aluno é obrigado a pensar à pressa e, por grosso, sobre o programa da Aritmética do 2.º ano. Adquirirá necessariamente um saber que se escoo como água absorvida pela areia.

A leitura do programa de Aritmética do 2.º ano, atrás transcrito, mostra que nenhuma referência há ao importantíssimo conceito de razão de duas grandezas e razão de dois números e que o conceito de proporcionalidade precede o de proporção.

É certo que se pode definir a proporcionalidade independentemente do conceito de razão. Do ponto de vista lógico não há reparos a fazer, mas do ponto de vista pedagógico é erro tão grosseiro que, suponho, ninguém defenderá.

Exposta a minha opinião sobre as deficiências do programa de Matemática do 1.º ciclo da actual reforma resta-me indicar as alterações a introduzir, sujeitando-as à critica de quem se interesse pelo assunto.

Antes porém de apresentar essas alterações ao programa do 1.º ciclo, permito-me fazer algumas considerações sobre o ensino da Matemática, neste ciclo.

Constitue já um lugar comum a afirmação de que o ensino da Matemática, nos primeiros anos da escola secundária deve ser intuitivo e experimental, Está confirmado pelos trabalhos de NUNN, THORNDIKE, PIAGET, JUDD e outros nomes de categoria internacional e ninguém ousa afirmar o contrário.

O professor do Teacher's College da Universidade de Colúmbia, W. REEVE, que é também um notável metodologista da Matemática, sintetiza nesta frase, essa orientação: «He (o aluno) must handle, measure, cut, count, draw, make models, draw graphs, in order to learn.»

H. SIMON, outro ilustre metodologista da Matemática, em «Preface to teaching», a propósito do ensino da Aritmética, dirige-se aos professores de Matemática, dizendo-lhes: «Your teaching of arithmetic... may merely train your class in a number of process which will let them pass an examination at the end of the term.»

That is «useful». It may also help them manage their savings accounts better or get a job on graduation. That is usefull too-and this time without quotation marks. But if you can develop in them an understanding of number relations, if you can teach them to visualize distances and quantities... then you are training them culturally: They will for, ever after be more sentive more appreciative, more understanding even though they may do not better on a formal examination».

Esta orientação, peconizada por estes ilustres metodologistas da Matemática, não se compraz com turmas de 40 alunos, sentados em bom alinhamento, em carteiras vulgares e dispondo apenas de lápis, papel e do quadro preto.

E' um ensino activo, dinâmico em que o aluno observa, experimenta, regista e redige as conclusões das experiências que realizou. Todos os sentidos do aluno devem intervir.

O professor não ministra conhecimentos, orienta as experiências do aluno de modo a conduzi-lo às necessárias conclusões.

Em sucessivas alíneas, indicarei agora as alterações a fazer ao programa de Matemática do 1.º ciclo (à parte o número de alunos por turmas e as condições da sala de aula), para que se torne eficiente, quanto ao desenvolvimento e formação mental dos alunos.

a) Deslocar a divisibilidade e as operações com os números fraccionários do 2.º ano para o 1.º ano. (m. d. c., m. m. c. e a decomposição em factores primos, conservar-se-iam no 2.º ano).

Deste modo os dois programas ficariam mais compensados.

b) Centrar o programa do 1.º ano no problema de mudança de unidade, constituindo um todo com a divisão de números inteiros, números decimais e com o número fraccionário.

Problema de mudança de unidade é a frase que falta nas instruções ao programa de Matemática do 1.º ciclo e que lhe daria unidade e que estabeleceria o elo de ligação entre o programa do 1.º ano e do 2.º ano. Mas as instruções ao programa não deixam transparecer a mais leve suspeita da existência desse problema.

Esta frase seria, para o programa de Matemática do 1.º ciclo, com a palavra *Sésamo* do «Abre-te Sésamo» da história para crianças da Caverna de Ali-Bábá.

O problema de mudança de unidade, quer em ciência, quer na vida diária, é de uso corrente e, por isso, de alta importância.

A resolução de problemas de mudança de unidade somente com as unidades do sistema métrico decimal conduz o aluno a essa *triste regra* que eles inconscientemente recitam assim:

«Para multiplicar um $n.º$ por 10 *anda-se* com a vírgula uma casa para a direita e para dividir *anda-se* para a esquerda».

O aluno, para adquirir o domínio do problema de mudança de unidade, deve medir comprimentos, tomando por unidade, os mais variados comprimentos, o palmo, o pé, etc. e converter as medidas obtidas uma nas outras pelas relações que haja entre elas. O mesmo procedimento na medição de áreas e de volumes.

Iniciados, deste modo, os alunos do 1.º ciclo no problema de mudança de unidade, talvez que os professores de Ciências Físico-Químicas não tivessem ocasião de encontrar alunos para os quais os problemas de mudança de unidade, respeitantes às grandezas físicas, são problemas transcendentais, mesmo no 7.º ano.

A interdependência do problema de mudança de unidade e da divisão de números inteiros e de números decimais e do conceito de número fraccionário, constitui um todo (a unit) a que o metodologista da Matemática WHEAT chama «The three kinds of problems»:

1) Calcular um número considerando-o como parte de um todo.

2) Dados dois números, calcular um deles que parte é do outro.

3) Calcular um número conhecendo uma parte determinada dele.

O elo de ligação entre o programa do 1.º ano e o do 2.º ano, seria feito por intermédio do número fraccionário, os problemas com fracções de denominador 100 permitiriam estabelecer o conceito de percentagem, do programa do 2.º ano. Os problemas de percentagem podem reduzir-se a problemas de fracções com denominador 100. Do conceito de percentagem, assim estabelecido, resultaria o conceito de razão de duas grandezas e razão de dois números.

Com a operação divisão de dois números inteiros e decimais, conceito de número fraccionário e razão de dois números, ficaria estudado o problema de mudança de unidade completamente e em relação com «The three kinds of problems», de WHEAT.

Quanto à metodologia, a meu ver, é das deficiências mais graves do programa do 1.º ciclo, ignorar o problema de mudança de unidade, que é basilar em Ciência, na vida diária e também na didáctica da Matemática.

c) Centrar o programa de Matemática do 2.º ano no conceito de proporcionalidade de grandezas.

d) Manter no 2.º ano a orientação do 1.º ano, isto é, não separar a Geometria da Aritmética e também não impor ao professor a obrigação de respeitar a a ordem das rúbricas do programa.

Desde que todas as rúbricas do programa fossem cumpridas, a ordem das rúbricas surgiria conforme as necessidades dos problemas a resolver.

e) Substituir a determinação de que «as demonstrações lógicas são totalmente banidas e substituídas por verificações experimentais» de modo que fosse permitido inferir das propriedades verificadas experimentalmente as consequências lógicas convenientes.

Com efeito, geometria intuitiva e experimental, por exemplo, não exclue a demonstração lógica; pelo contrário, associa a intuição, a experiência e a dedução sempre que seja possível.

Julgo que o programa de Matemática do 1.º ciclo, depois destas correcções, teria maior eficiência e seria superior aos programas das anteriores reformas.

(Continua)

MOVIMENTO CIENTÍFICO

COLÓQUIO INTERNACIONAL DE TOPOLOGIA DAS VARIEDADES FIBRADAS

Bruxelas — Junho de 1950

O Centro Belga de Investigações Matemáticas, a que já nos referimos anteriormente (*Gazeta de Matemática*, 43, 1950), promoveu em Junho de 1950 uma

reunião dalguns dos mais notáveis matemáticos que se dedicam a este ramo da Topologia, disciplina que dia a dia, toma maior importância e que é hoje