GAZETA DE MATEMÁTICA
N.º 50 — Dezembro de 1951

Sobre a comutabilidade de operadores com espectros contínuos

por **Fernando Soares David**
Porto

Resumo. Começamos por dar uma condição necessária e suficiente de comutabilidade de dois operadores de Hermite, definidos num espaço de Hilbert, admitindo resoluções da identidade e possuindo espectros contínuos, em termos de comutação de certos operadores associados com espectros pontuais puros e uma base de vectores próprios.

Seguidamente, damos uma interpretação física dessa condição.

Por fim, estudamos, com base na teoria desenvolvida, o caso da posição e da quantidade de movimento dum ponto móvel sôbre uma linha, concluindo a incompatibilidade destes observáveis pela impossibilidade de existência dum estado próprio comum aos dois observáveis de espectros pontuais associados, sempre que se efectuem medições com erros de produto inferior à constante de Planck.

1. **Considerações prévias.** Há no nosso trabalho dois aspectos que consideramos fundamentais. O primeiro diz respeito ao método usado no tratamento da comutabilidade de operadores com espectros contínuos: redução ao caso canónico do mesmo problema para operadores com uma base de vectores próprios. Assim se evita o recurso ao método pouco rigoroso das diferenciais próprias e, como se verá pela forma dos operadores associados, se traduz fielmente (do ponto de vista experimental) a operação de medir com certo êrro.

O segundo consiste no estudo da incompatibilidade dos observáveis «posição» e «quantidade de movimento» pelo método anterior.

Regra geral, nos livros de Física Teórica as relações de incerteza de Heinsenberg são obtidas aplicando o método das diferenciais próprias. Nos «Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik» de Johann von Neumann, o tratamento desta questão aparece deslocado da linha geral da obra: tendo-se estabelecido para operadores não limitados a noção de comutabilidade por meio das respectivas resoluções da identidade, o problema é abordado sem recorrer a estes operadores.

No nosso trabalho, julgamos ver, associada à melhor definição de compatibilidade — a estabelecida com base na comutação das resoluções da identidade — uma formulação correcta duma teoria de diferenciais próprias.

2. **Teorema fundamental.** Sejam A e B dois operadores de Hermite de espectros contínuos R_λ e R_μ admitindo resoluções da identidade $E(\lambda)$ e $F(\mu)$. Diremos que os dois operadores comutam sempre que, e só quando, comutarem $E(\lambda)$ e $F(\mu)$ da forma usual. Tem-se

$$\mathrm{A} = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \, d\,\mathrm{E}(\lambda) \; ; \quad \mathrm{B} = \int_{-\infty}^{\infty} \mu \, d\,\mathrm{F}(\mu) .$$

Consideremos associados a A e B os operadores

$$f_\alpha(A) = \sum_{R_\lambda} \lambda'_n E(I_n) \; , \quad g_\beta^{\mu_0, \mu_1}(B) = \sum_{(\mu_0, \mu_1]} \mu'_m F(J_m)$$

onde $\{I_n\}$ e $\{J_m\}$ são rêdes de intervalos semiabertos à esquerda, disjuntos, respectivamente em R_λ e $(\mu_0, \mu_1] \subset R_\mu$ e $\lambda'_n \in I_n$, $\mu'_m \in J_m$ (¹) ; $\alpha = \lim\sup \{|I_n|\}$ e $\beta = \lim\sup \{|J_m|\}$ são elementos característicos destas rêdes.

(¹) A dissimetria entre f_α e g_β justifica-se do modo seguinte: por um lado, os cálculos que se seguem exigem que um, pelo menos, dos operadores seja limitado; por outro lado, pareceu-nos natural limitar apenas um, tendo em vista os operadores representativos da «posição» e «quantidade de movimento», o segundo dos quais é limitado em Mecânica Relativista.

$f_\alpha(A)$ e $g_\beta^{\mu_0\mu_1}(B)$ possuem espectros pontuais puros. Os valores próprios do primeiro são λ'_n e as projecções próprias correspondentes $E(I_n)$; o segundo tem por valores próprios os μ'_m e zero, com projecções próprias $F(J_m)$ e $1 - \sum_{(\mu_0,\mu_1]} F(J_m)$ (²).

O objectivo deste parágrafo é estudar a comutação de A e B por intermédio da comutação de $f_\alpha(A)$ e $g_\beta^{\mu_0\mu_1}(B)$.

Tem lugar o teorema fundamental seguinte:

> «*É condição necessária e suficiente para que* A *e* B *comutem, que comutem os* $\mathrm{f}_\alpha(\mathrm{A})$ *e* $\mathrm{g}_\beta^{\mu_0\mu_1}(\mathrm{B})$ *relativos a quaisquer decomposições de* R_λ *e* $(\mu_0,\mu_1]$ *para qualquer* $(\mu_0,\mu_1] \subset \mathrm{R}_\mu$ [*é manifesto que tal comutação só tem sentido no domínio de definição de* $\mathrm{f}_\alpha(\mathrm{A})$]».

Com efeito, se $E(\lambda)$ e $F(\mu)$ comutam o mesmo acontece a $E(I_n)$ e $F(J_m)$. Donde, atendendo à continuidade de $F(\lambda)$:

$$F(J_m) f_\alpha(A) = F(J_m) \lim_N \sum_{-N}^{N} \lambda'_n E(I_n) =$$

$$= \lim_N \sum_{-N}^{N} \lambda'_n F(J_m) E(I_n) =$$

$$= (\lim_N \sum_{-N}^{N} \lambda'_n E(I_n)) F(J_m) = f_\alpha(A) \cdot F(J_m).$$

Multiplicando por μ'_m e somando entre μ_0 e μ_1, tem-se:

$$g_\beta^{\mu_0\mu_1}(B) \, . \, f_\alpha(A) = f_\alpha(A) \cdot g_\beta^{\mu_0\mu_1}(B).$$

Recìprocamente, se $f_\alpha(A)$ e $g_\beta^{\mu_0\mu_1}(B)$ comutam para todas as decomposições de R_λ e $(\mu_0,\mu_1]$, também comutam

$$E(\lambda) = \sum_{(-\infty,\lambda]} E(I_n) \quad \text{e} \quad F\{(\mu_0,\mu]\} = \sum_{(\mu_0,\mu]} F(J_m).$$

Considerando uma sucessão de intervalos $(\mu_0^{(n)}, \mu]$, onde $\mu_0^{(n)} \xrightarrow[n]{} -\infty$, concluimos, por continuidade, que comutam também $E(\lambda)$ e $F(\mu)$.

3. Interpretação física. Em Mecânica Quântica este resultado tem uma interpretação simples.

Sejam $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$ os observáveis representados por A e B. Assentemos, uma vez por todas, no seguinte: o facto de se considerar determinada decomposição do espectro (contínuo!) dum observável em intervalos disjuntos, implica que a indicação mais precisa que se pode obter sobre o valor duma medição do observável é sabê-lo interior a determinado intervalo. Medir os observáveis $f_\alpha(\mathfrak{A})$ e $g_\beta^{\mu_0\mu_1}(\mathfrak{B})$ é medir $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$ com êrros limitados superiormente por α e β, não podendo o valor de $\mathfrak{B}$ ser exterior a $(\mu_0,\mu_1]$.

$\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$ serão compatíveis quando se puderem medir simultâneamente com precisões arbitrárias e em qualquer zona dos espectros, isto é, quando $f_\alpha(A)$ e $g_\beta^{\mu_0\mu_1}(B)$ forem comutáveis para todos os pares de números α, β e todos os intervalos $(\mu_0,\mu_1]$. Demonstramos a equivalência desta condição à comutabilidade de $E(\lambda)$ e $F(\mu)$ para todos os valores de λ e μ. Assim se justifica que esta comutação seja considerada característica da compatibilidade de $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$, como fez von Neumann.

Basta que exista um par de números α_0, β_0 e um intervalo $(\mu_0,\mu_1]$ tais que $f_{\alpha_0}(A)$ e $g_{\beta_0}^{\mu_0\mu_1}(B)$ não comutem, para que se possa concluir a incompatibilidade de $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$.

4. Aplicação. Neste número concluiremos, por aplicação dos resultados anteriores, a incompatibilidade dos observáveis «posição» e «quantidade de movimento» dum ponto móvel sobre uma linha.

As resoluções da identidade correspondentes aos observáveis posição ($\mathfrak{Q}$) e quantidade de movimento ($\mathfrak{P}$) são respectivamente (cf. J. v. Neumann — op. cit., II-8) $E(\lambda)$ e $F(\mu)$ assim definidos:

$$E(\lambda) f(q) = \begin{cases} f(q), & q \leq \lambda \\ 0, & q > \lambda \end{cases}$$

$$F(\mu) = M E(\mu) M^{-1}$$

onde

$$M F(p) = f(q) = \frac{1}{\sqrt{h}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{2\pi i}{h} p q} F(p) \, dp$$

(h é a constante de Planck); portanto

$$M^{-1} f(q) = F(p) = \frac{1}{\sqrt{h}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{2\pi i}{h} p q} f(q) \, dq.$$

Sejam $I = (\lambda', \lambda'']$ e $J = (\mu', \mu'']$ dois intervalos dos espectros de $\mathfrak{Q}$ e $\mathfrak{P}$. O significado dos operadores de projecção $E(I)$, $F(J)$ é o seguinte:

$$E(I) f(q) = E(\lambda'') f(q) - E(\lambda') f(q) = \begin{cases} f(q), & q \in I \\ 0, & q \in 1 - I \end{cases}$$

$$F(J) f(q) = M E(J) M^{-1} f(q) = M E(J) F(p) =$$

(²) Note-se que g_β está definido no espaço todo e é limitado (beschränkt)—portanto contínuo—enquanto que f_α pode não ser limitado e o seu domínio de definição é

$$\mathop{E}_{f} [\Sigma \lambda'_n | E(I_n) f |^2 < +\infty].$$

$$= M \cdot \begin{cases} F(p)\,, & p \in J \\ 0\,, & p \in 1-J \end{cases}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{h}} \int_J e^{\frac{2\pi i}{h} pq} F(p)\, dp =$$

$$= \frac{1}{h} \int_J e^{\frac{2\pi i}{h} pq}\, dp \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{2\pi i}{h} pr} f(r)\, dr.$$

Suponhamos que I e J fazem parte de redes $\{I_\alpha^{(n)}\}$, $\{J_\beta^{(m)}\}$ de intervalos, respectivamente, do espectro de $\mathcal{Q}$ e dum intervalo $(\mu_0, \mu_1]$ convenientemente escolhido no espectro de $\mathcal{P}$. Seja $\alpha = \lim\sup \{|I^{(n)}|\}$, $\beta = \lim\sup \{|J^{(m)}|\}$. Os operadores correspondentes $f_\alpha(Q)$ e $g_\beta^{\mu_0 \mu_1}(P)$ têm espectros pontuais puros e uma base de vectores próprios. As variedades próprias são do tipo

$$(\mathcal{Q}):\quad V(I) = \underset{\varphi(q)}{E}\,[E(I)\varphi = \varphi] = \underset{\varphi(q)}{E}\,[\varphi(q) = 0, q \in 1-I]$$

$$(\mathcal{P}):\begin{cases} W(J) = \underset{\psi(q)}{E}\,[F(J)\psi = \psi] = \underset{\psi(q)}{E}\left[\psi(q) = \dfrac{1}{h}\displaystyle\int_J e^{\frac{2\pi i}{h}pq}\, dp \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{2\pi i}{h}pr}\psi(r)\, dr\right] \\ W(J_0) = \underset{\chi(q)}{E}\,[\chi(q) = \{1 - \displaystyle\sum_{(\mu_0,\mu_1]} F(J^{(m)})\}\,\chi(q)]\,. \end{cases}$$

Uma condição necessária de comutabilidade dos operadores $f_\alpha(Q)$ e $g_\beta^{\mu_0 \mu_1}(P)$ — e portanto de compatibilidade de $f_\alpha(\mathcal{Q})$ e $g_\beta^{\mu_0 \mu_1}(\mathcal{P})$ — é a existência duma função própria comum, o que se pode sempre reduzir ao caso da existência dum elemento comum a uma $V(I)$ e uma $W(J)$. Seja $\psi(q)$ essa função; tem-se

$$q \in I:\ \psi(q) = \frac{1}{h}\int_J e^{\frac{2\pi i}{h}pq}\, dp \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{2\pi i}{h}pr}\psi(r)\, dr$$

$$q \in 1-I:\ \psi(q) = 0\,.$$

Portanto, com $q \in I$:

$$\psi(q) = \frac{1}{h}\int_J e^{\frac{2\pi i}{h}pq}\, dp \int_I e^{-\frac{2\pi i}{h}pr}\psi(r)\, dr\,.$$

Tomando módulos

$$|\psi(q)| \leqslant \frac{1}{h}\int_J \left| \int_I e^{-\frac{2\pi i}{h}pr}\psi(r)\, dr \right| dp\,.$$

Sendo o integral do segundo membro independente de q, tem-se, designando por M o módulo máximo (necessàriamente diferente de zero e finito) de $\psi(q)$ em I:

$$M \leqslant \frac{1}{h}\int_J\int_I |\psi(r)|\, dr\, dp$$

$$\leqslant \frac{1}{h}\int_J\int_I M\, dr\, dp = \frac{|I|\,|J|}{h}\cdot M\,.$$

Donde

$$|I| \cdot |J| \geqslant h\,.$$

Sendo α, β os limites superiores das amplitudes dos I e dos J, respectivamente, tem-se a relação fundamental

$$(1)\qquad \alpha \cdot \beta \geqslant h\,.$$

Trata-se, como já foi dito, duma condição necessária de compatibilidade de $f_\alpha(\mathcal{Q})$ e $g_\beta^{\mu_0 \mu_1}(\mathcal{P})$.

Segue-se imediatamente a incompatibilidade de $\mathcal{Q}$ e $\mathcal{P}$.

Temos em (1) uma verdadeira *relação de incerteza.* (Não se trata contudo, exactamente, da célebre relação de Heisenberg, onde em vez de α e β figuram os desvios médios quadráticos dos dois observáveis).

A sua interpretação física é a seguinte: quando os limites superiores dos êrros cometidos numa avaliação de $\mathcal{Q}$ e $\mathcal{P}$ verificam a relação $\alpha \cdot \beta < h$ não é possível medir simultâneamente os dois observáveis.