

Les filtres fermés des espaces compacts

par A. A. Monteiro

Univ. Nacional de Cuyo — San Juan — Argentine

La famille Φ_R de tous les filtres (1) d'un réticulé R a des propriétés qui dépendent des propriétés de R .

ATUO KOMATU [1] a déterminé les propriétés caractéristiques de l'ensemble Φ_R dans le cas où R est un réticulé quelconque. D'autres résultats analogues ont été indiqués par GARRETT BIRKHOFF et ORRIN FRINK [2].

LEOPOLDO NACHBIN [3] a généralisé et complété les résultats précédents en indiquant, en particulier, les propriétés caractéristiques de la famille de tous les filtres d'une algèbre de BOOLE (2) et d'une algèbre de BOOLE généralisée.

Soit \mathcal{F} la famille de tous les ensembles fermés d'un espace compact I (nous supposons dans cette note, qu'un espace compact vérifie l'axiome d'HAUSDORFF). Les filtres de \mathcal{F} seront appelés des *filtres fermés* de l'espace topologique I (PIERRE SAMUEL [4]).

Nous nous proposons d'indiquer dans cette note, des propriétés caractéristiques du réticulé $\Phi_{\mathcal{F}}$. Pour cela rapellons les définitions suivantes:

A) Un élément d'un réticulé R sera dit *inférieurement compact* (ou plus simplement *compact*) (L. NACHBIN [3]) si étant donnée une famille, non vide, $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$ d'éléments de R telle que

$$\bigcap_{\alpha \in A} x_\alpha \subseteq x$$

il existe une partie finie, non vide, A_0 de A telle que

$$\bigcap_{\alpha \in A_0} x_\alpha \subseteq x$$

B) Un réticulé R ayant un premier élément (0) sera dit *compact* si 0 est dit compact.

(1) Un filtre d'un réticulé R est une partie, non vide, F de R telle que: 1.º) si $x, y \in F$ alors $x \cap y \in F$; 2.º) Si $x \subseteq y$ et $x \in F$ alors $y \in F$. Un filtre F est propre si $F \neq R$.

(2) ou, ce que revient au même, de la famille de tous les systèmes deductifs d'une Algèbre de Boole.

C) Un *atome* d'un réticulé R (ayant un premier élément) est un élément $a \in R$ tel que: 1.º) $a \neq 0$, 2.º) si $x \subseteq a$, alors ou $x = 0$ ou $x = a$.

D) Un élément x de R sera dit *atomique* s'il existe une famille, non vide, $\{a_\alpha\}_{\alpha \in A}$, d'atomes de R telle que

$$\bigcup_{\alpha \in A} a_\alpha = x.$$

E) Nous dirons qu'un réticulé R , ayant un premier et un dernier élément 1, vérifie l'*axiome de la normalité*, si étant donnés $a, b \in R$ tels que $a \cap b = 0$, il existe des éléments $a_1, b_1 \in R$ tels que $a \cap b_1 = a_1 \cap b = 0$, $a_1 \cup b_1 = 1$ (Voir H. WALLMAN [5]).

Si nous exigeons, en outre, que les éléments a_1, b_1 vérifient la condition $a_1 \cap b_1 = 0$, nous dirons que R vérifie l'*axiome de la disconnexion normale*.

Nous pouvons maintenant énoncer le résultat suivant:

THÉOREME — Pour qu'un réticulé Φ soit isomorphe à la famille $\Phi_{\mathcal{F}}$ de tous les filtres fermés d'un espace compact il faut et il suffit que

- I) Φ soit distributif, complet et compact.
- II) Tout élément de Φ soit le produit d'éléments compacts. (1)
- III) Les éléments compacts de Φ , distincts de 0 coïncident avec les éléments atomiques de Φ .
- IV) Φ vérifie l'axiome de la normalité.

Si nous voulons caractériser la famille de tous les filtres fermés d'un espace métrisable compact ξ , il suffit de remplacer l'axiome II par:

II') Il existe une famille dénombrable K , d'éléments compacts de Φ , telle que tout élément de Φ soit le produit d'éléments de K .

(1) Nous disons que x est le produit des éléments x_i si $x = \bigcap x_i$.

Il est intéressant de remarquer que $\Phi_{\mathcal{F}}$ ne peut vérifier

L'AXIOME DE LA DISJONCTION DE WALLMAN, [5].

Si $a, b \in R$ sont tels que $a \cap b \neq a$ il existe un élément tel que $a \cap w \neq 0$, $w \cap b = 0$

à moins que l'espace compact donné I soit formé par un nombre fini de points.

Pour obtenir une caractérisation de la famille $\Phi_{\mathcal{F}}$ de tous les filtres fermés d'un espace compact totalement disconnexe il suffit de remplacer dans l'énoncé du théorème précédent la condition IV par

IV') Φ vérifie l'axiome de la disconnexion normale.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] KOMATU (ATUO) — On a characterisation of join homomorphic transformation-lattice. *Proc. Imp. Acad. Tokyo.* **19** (1943), pp. 119-124.
- [2] BIRKHOFF (GARRETT) and FRINK JR. (ORRIN) — Representation of lattices by sets. *Trans. Amer. Math. Soc.* **64** (1948), pp. 299-315.
- [3] NACHBIN (LEOPOLDO) — On a characterisation of the lattice of all ideals of a Boolean Ring. *Fundamenta Mathematicae.* **36** (1949) pp. 137-142.
- [4] SAMUEL (PIERRE) — Ultrafilters and compactification of Uniform Spaces. *Trans. Amer. Math. Soc.* **64** (1948) pp. 100-132.
- [5] WALLMANN (HENRI) — Lattices and Topological Spaces. *Ann. of Math.* **39** (1938) pp. 112-126.