

## Sobre pares de figuras convexas (\*)

por L. A. Santaló

Universidad de La Plata — Argentina

**Dedicatoria.** Entre la gran variedad de asuntos que trató F. GOMES TEIXEIRA figura también el de los cuerpos convexas. En efecto, aunque matemático analítico principalmente, publicó varias notas sobre la geometría de las figuras convexas en las que se refleja su fino espíritu geométrico. Por esto, en este número dedicado a su memoria y como sincera homenaje a la misma, no creo esté demasiado fuera de lugar un tema como el indicado en el título de la presente nota.

**1. Introducción.** El estudio de las figuras convexas (conjuntos convexas, limitados y cerrados) constituye un importante capítulo de la Geometría, con abundante literatura (1). A cada figura convexa van unidos una serie de características (longitud, área, diámetro, anchura mínima, círculo inscrito, etcétera) y el estudio de los valores extremales de algunas de estas características, conocidas otras, presenta interesantes problemas.

Una generalización que parece poco estudiada es la de considerar figuras  $K^2$  formadas por un par de figuras convexas. Mas general, se trataría de considerar figuras  $K^r$  formadas por  $r$  figuras convexas. También en este caso se pueden definir ciertas características (área, longitud, diámetro total, diámetro de cada componente, mínimo círculo que contiene  $K^r$ , etc.) y se presentan muchos problemas de máximos y mínimos, generalización de los correspondientes a  $r=1$ , únicos generalmente estudiados.

En esta nota nos vamos a limitar al caso  $r=2$  y vamos a dar, como ejemplo, dos tipos de problemas: a) Una generalización del teorema de HELLY a figuras  $K^2$  compuestas de dos figuras convexas; b) Algunos problemas extremales de figuras  $K^2$ .

**2. Generalización del teorema de HELLY.** Para el caso del plano,  $n=2$ , el teorema de HELLY a que nos referimos, dice: *Dado en el plano un conjunto de figuras convexas, si cada 3 de ellas tienen punto común, existe punto común a todas* (1).

Nuestra generalización a «pares» de figuras convexas  $K^2=K_1+K_2$  afirma:

**TEOREMA.** *Dado en el plano un conjunto de pares de figuras convexas  $K^2$ , si cada 17 de ellos tienen punto común, existe un punto común a todos.*

La demostración, que también puede aplicarse para el teorema original de HELLY, la basaremos en dos lemas.

**LEMA I.** *Sean  $K_i$  ( $i=1, 2, 3$ ) tres figuras convexas (cerradas) cuya intersección  $J$  tenga puntos interiores y sea tal que  $K_i \cap K_j = J$ . En estas condiciones, toda figura convexa  $K$  que tenga punto común con  $K_1, K_2, K_3$ , tiene punto común con  $J$ .*

**Demostración.** Supongamos que exista una figura convexa  $K$  con punto común con  $K_1, K_2, K_3$  y sin punto común con  $J$ . Elijamos tres puntos  $\alpha_i \in K_i \cap K$ . El triángulo  $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$  (que puede degenerar en un segmento) está contenido en  $K$  y por tanto no contiene a  $J$  ni las rectas  $\alpha_i \alpha_j$ , pueden tener punto común con  $J$ , pues si  $\alpha_1 \alpha_2$ , por ejemplo, cortara a  $J$  en un punto  $P$ , por pertenecer este punto a las tres  $K_i$ , los puntos  $\alpha_1, \alpha_2$  pertenecerían a una misma figura  $K_i$ , contra la hipótesis de que las  $K_i$  tomadas dos a dos no tienen mas punto común que la intersección  $J$ . Por tanto el triángulo  $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$  tiene un lado, sea  $\alpha_1 \alpha_2$ , que separa  $J$  y al otro vértice  $\alpha_3$ . Tracemos por  $\alpha_1$  la recta de apoyo de  $J$  que

(\*) Recibido en Abril de 1951.

(1) T. BONNESEN-W. FENCHEL, *Theorie der konvexen Körper*, Berlin, 1934.

(1) BONNESEN-FENCHEL, loc. cit. pág. 3.

deja a distinto lado a  $J$  y a  $\alpha_3$ . Sea  $Q$  el punto de contacto (o uno de ellos si hay mas de uno). Por pertenecer  $Q$  a  $J$ , cada segmento  $Q\alpha_i$  pertenece a  $K_i$  y es exterior a  $J$ . Si  $Q$  fuera interior a alguna  $K_i$  habria dos de estas figuras con punto común exterior a  $J$ , contra la hipótesis. Luego  $Q$  pertenece al contorno de las tres  $K_i$  y por tanto las prolongaciones de  $Q\alpha_i$  serán exteriores a  $K_i$ . Si esto fuera posible, tomando un punto  $S$  interior a  $J$  y próximo a  $Q$ , alguno de los segmentos  $S\alpha_i$  cortaria a alguno de los  $Q\alpha_i$  en puntos distintos de los extremos; estos puntos de intersección pertenecerian a dos  $K_i$  sin pertenecer a  $J$ , lo que es contrario a la hipótesis.

**LEMA II.** Sean 17 pares de figuras convexas  $K_i^2$  ( $i=1, 2, \dots, 17$ ) cuya intersección  $J$  tenga puntos interiores y sea tal que  $K_i^2 \cap K_j^2 = J$  (es decir, las figuras  $K_i^2$  no tienen, dos a dos, otros puntos comunes que los de  $J$ ). En estas condiciones, todo par de figuras convexas  $K^2$  que corte a todas las  $K_i^2$ , corta también a  $J$ .

**Demostración.** La intersección de pares de figuras convexas se compone, a lo sumo, de 4 figuras convexas  $J_i$ ; sea  $J = J_1 + J_2 + J_3 + J_4$ . Según el Lema I, cada componente de  $K^2$  podrá cortar a lo sumo a 2 figuras  $K_i^2$  por cada  $J_i$  sin cortar a  $J$ : en total puede cortar a 8 figuras  $K_i^2$  sin cortar a  $J$ . Las dos componentes de  $K^2$  pueden, por tanto, cortar a lo sumo a 16 figuras  $K_i^2$ . Luego si cortan, por hipótesis, a 17, deben cortar a  $J$ .

Sentados estos lemas pasemos a la demostración del teorema.

Supongamos primero que cada 17 figuras  $K^2$  tengan puntos interiores comunes, para poder aplicar los lemas anteriores. Luego veremos que esta condición es superflua. Supongamos también primero que el conjunto sea finito. Procedemos por inducción. Supongamos el teorema cierto para  $N$  figuras  $K^2$  y vamos a demostrar que lo es también para  $N+1$ .

Sean  $K_i^2$  ( $i=1, 2, \dots, 16$ ) 16 figuras de entre las  $N$  que cumplen la condición del enunciado y  $K_{N+1}^2$  la nueva figura añadida. Sea  $J_i$  la intersección de todas las  $K_\alpha^2$  ( $\alpha=1, 2, \dots, N$ ) sin contar la  $K_i^2$  ( $i=1, 2, \dots, 16$ ) y  $S$  la intersección de las  $K_i^2$  ( $i=1, 2, \dots, 16$ ). Por suponer el teorema cierto para  $N$ , la figura  $K_{N+1}^2$  debe cortar a los  $J_i$  y también a  $S$  por suponer que cada 17 figuras del conjunto tienen punto común. Pero las figuras  $J_i, S$  tomadas dos a dos no tienen mas punto común que  $J$ , luego se cumplen las condiciones del Lema II y  $K_{N+1}^2$  debe cortar a  $J$ .

Debemos ahora prescindir de la condición de que cada 17 figuras tengan puntos «interiores» comunes. Supongamos que solo tienen punto común. Considerando las figuras paralelas exteriores a distancia  $\varepsilon$ , ellas tendrán puntos «interiores» comunes y por tanto la demostración anterior vale. Si el teorema vale para cualquier  $\varepsilon$ , tratándose de conjuntos cerrados, vale en el limite para  $\varepsilon=0$ .

El paso a un conjunto infinito, numerable o no, se puede hacer aplicando un teorema de Riesz, exactamente igual a como lo hace D. KÖNIG para el caso del teorema de HELLY (1).

**3. Generalizaciones.** El problema se puede generalizar considerando conjuntos de figuras  $K^r$  compuestas cada una de  $r$  figuras convexas y también pasando al espacio euclidiano de  $n$  dimensiones en lugar del plano. En ambos casos la demostración puede hacerse siguiendo en líneas generales el método anterior. Nos limitaremos a dar el siguiente enunciado general.

Sea dado en el espacio euclidiano de  $n$  dimensiones un conjunto de figuras  $K^r$  compuestas cada una de  $r$  figuras convexas. Si cada  $nr^3+1$  de ellas tienen punto común, existe un punto común a todas.

El número  $nr^3+1$  es el que da la demostración anterior. Es posible, sin embargo, que se pueda disminuir. Para el caso  $r=2, n=2$  que hemos considerado en detalle, es probable que se pueda sustituir 17 por 13.

Sería también interesante ver si el teorema anterior se puede generalizar de manera análoga a como el primitivo teorema de HELLY fué generalizado por su propio autor a conjuntos de «celdas» en vez de figuras convexas (2).

**4. Tres problemas extremales sobre pares de figuras convexas.** Dada una figura  $K^2$  compuesta de dos figuras convexas  $K_1, K_2$ , utilizaremos las siguientes denominaciones:

$d$  = Distancia mínima = extremo inferior de las distancias entre un punto de  $K_1$  y otro de  $K_2$ .

$D$  = Distancia máxima = extremo superior de las distancias entre un punto de  $K_1$  y otro de  $K_2$ .

$\delta$  = Diámetro = extremo superior de las distancias entre dos puntos cualesquiera de  $K^2$ . Es siempre  $D \leq \delta$ .

$\delta_1, \delta_2$  = Diámetros de las componentes  $K_1, K_2$ .

$F$  = Área de  $K^2$ .

$L$  = Longitud del contorno de  $K^2$ .

(1) D. KÖNIG, Ueber konvexe Körper, Mat. Zeits., 14, 1922.

(2) E. HELLY Ueber systeme von abgeschlossenen Mengen mit gemeinschaftlichen Punkten, Monatshefte Mat. und Phys., 37, 1930.

Con estas denominaciones vamos a considerar tres problemas.

1. *Dados d y D, hallar el máximo de F.*

Sean  $K_1$  y  $K_2$  las dos componentes de  $K^2$ . Sean  $L_1, L_2$  las longitudes de los contornos respectivos y supongamos  $L_1 \geq L_2$ . Supongamos primero que el contorno de  $K_2$  no tenga puntos angulosos, de manera que también resulte convexa la figura  $K_2 - \epsilon$  paralela interior a distancia  $\epsilon$  suficientemente pequeña. Afirmamos que para la  $K^2$  de máxima área,  $K_2$  no puede tener puntos interiores. En efecto, en caso contrario consideremos las figuras convexas  $K_1 + \epsilon, K_2 - \epsilon$  paralelas exteriores e interiores respectivamente a distancia  $\epsilon$ . Para la nueva figura  $K^2$  resultante,  $d$  y  $D$  no han variado y en cambio el área se ha incrementado de

$$(1) \quad \Delta F = L_1 \epsilon + \pi \epsilon^2 - (L_2 \epsilon - \pi \epsilon^2) = (L_1 - L_2) \epsilon + 2\pi \epsilon^2 > 0$$

o sea,  $F$  ha aumentado. Si  $K_2$  tiene puntos angulosos (teniendo puntos interiores) se puede aproximar convenientemente por otra figura convexa que no los tenga y el resultado subsiste.

Luego, para que  $K^2$  sea de área máxima la componente  $K_2$  no debe tener puntos interiores: debe ser un segmento. Sea el segmento de extremos  $A, B$ . Supongamos que sea  $AP$  ( $P \in K_1$ ) el segmento tal que  $d = AP$ . Sea  $r$  la recta normal a  $AP$  trazada por  $P$ . Con centro  $B$  y radio  $D$  tracemos el arco de circunferencia que se apoya en  $r$ . Queda así un segmento de círculo en el interior del cual debe quedar  $K_1$ . Este segmento circular será máximo cuando la distancia de  $B$  a  $r$  sea mínima, o sea, cuando  $B$  esté en la paralela a  $r$  por  $A$ . Entonces  $K_1$  debe estar contenida en los dos segmentos de círculo de centros  $A, B$  y radio  $D$  limitados por  $r$ . La parte común a estos segmentos será máxima cuando ambos coincidan, o sea,  $A \equiv B$ . Por tanto:

*Dados d y D el máximo de F se obtiene por la figura compuesta de un punto A mas un segmento de círculo de radio D y centro A cuya base diste d del punto A.*

Poniendo  $\varphi = \arccos(d/D)$  el resultado se puede escribir

$$F \leq \varphi D^2 - dD \operatorname{sen} \varphi.$$

2. *Dados d, D hallar el máximo de L.*

Con la misma demostración anterior, con solo sustituir (1) por  $\Delta L = L_1 + 2\pi \epsilon - (L_2 - 2\pi \epsilon) = L_1 - L_2 + 4\pi \epsilon \geq 0$ , resulta que el máximo corresponde

a la misma figura anterior. Por tanto se puede también escribir

$$L \leq 2 \varphi D + 2 \sqrt{D^2 - d^2}.$$

Ambos problemas se complican si se sustituye  $D$  por  $\delta$ .

3. *Hallar el círculo de radio mínimo que contiene a cualquier par de figuras convexas cuyos diámetros respectivos sean  $\delta_1, \delta_2$  y la distancia mínima entre ellas sea d.*

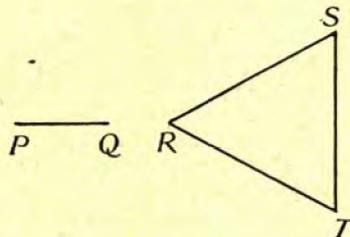
Para el caso de una sola figura convexa se sabe que el radio mínimo  $\rho$  está dado por  $\rho = \delta/\sqrt{3}$  (1). En el caso de un par de figuras convexas conviene considerar dos casos (supondremos siempre  $\delta_2 \geq \delta_1$ ):

a)  $\delta_2 \leq \delta_1 + d$ . Consideremos el caso de dos segmentos  $PQ, RS$  de una misma recta cuyas longitudes sean  $PQ = \delta_1, QR = d, RS = \delta_2$ . Para cubrirlos a los dos se necesita un círculo de radio

$$(2) \quad \rho = \frac{1}{2} (\delta_1 + \delta_2 + d).$$

Vamos a demostrar que cualquier par de figuras convexas en las condiciones del enunciado puede cubrirse con este círculo. En efecto, cualquier  $K_1$  de diámetro  $\delta_1$  que contenga  $Q$  estará contenida en el círculo de centro  $Q$  y radio  $\delta_1 = QP$ ; análogamente, cualquier  $K_2$  de diámetro  $\delta_2$  que pase por  $R$  estará contenida en el círculo de centro  $R$  y radio  $\delta_2 = RS$ . Como ambos círculos están contenidos en el círculo de diámetro  $PS$ , queda probado el enunciado.

b)  $\delta_2 > \delta_1 + d$ . En este caso no vale lo anterior. Consideremos la  $K^2$  formada por un segmento  $PQ$  de longitud  $\delta_1$  y un triángulo equilátero  $RST$  de



lado  $\delta_2$  colocados como indica la figura 1, en la cual es  $QR = d$ . Para cubrir toda la figura hace falta un círculo de radio

(1) BONNESEN-FENCHEL, loc. cit. pag. 78.

$$(3) \quad \rho = \frac{\delta_2^2 + (\delta_1 + d)^2 + \sqrt{3} \delta_2 (\delta_1 + d)}{2(\delta_1 + d) + \sqrt{3} \delta_2}.$$

Afirmamos que con este radio se puede cubrir cualquier figura  $K^2$  con las condiciones del enunciado. En efecto, la primera componente  $K_1$  de  $K^2$  estará contenida en el segmento circular limitado por la circunferencia de centro  $R$  y radio  $\delta_1 + d$  y la perpendicular por  $Q$  a la recta  $QR$ . La segunda componente  $K_2$  puede estar contenida en un círculo de radio  $\delta_2/\sqrt{3}$  (sea  $O$  su centro) y por tanto estará contenida en la intersección de este círculo con el de centro  $R$  y radio  $\delta_2$ . Si giramos el cir-

culo de radio  $\rho$  que contiene la fig. 1 alrededor de  $R$  hasta que su centro se coloque sobre  $RO$ , cubrirá tanto al segmento circular mencionado que cubre  $K_1$  como a la intersección mencionada que contiene a  $K_2$ , y por tanto cubrirá a  $K^2$ .

En resumen:

*Dados  $\delta_1, \delta_2$  y  $d$ , y suponiendo  $\delta_2 \geq \delta_1$ , cualquier figura  $K^2$  con estos elementos puede cubrirse con un círculo de radio  $\rho$  dado por (2) si  $\delta_2 \leq \delta_1 + d$  o por (3) si  $\delta_2 > \delta_1 + d$ .*

LA PLATA (Argentina), Facultad de Ciencias Fisicomatemáticas.