CONGRESSO INTERNACIONAL DE MECANICA TEÓRICA E APLICADA

De 20 a 28 de Agosto deste ano realizar-se-á na Universidade de Istambul o 8.º Congresso Internacional de Mecânica Teórica e Aplicada. As comunicações apresentadas serão distribuídas por 5 secções: 1—Elasticidade, plasticidade e reologia; 2 — Mecânica dos fluidos (aerodinâmica e hidrodinâmica); 3 — Mecânica dos sólidos (balística, vibrações, atrito e lubrificação); 4 — Mecânica estatística, termodinâmica e propagação do calor; 5 — Matemáticas da Física e Mecânica e métodos de cálculo.

As línguas oficiais do Congresso são: inglês, francês, alemão e italiano.

A direcção do Secretariado é: P. O. Box 245 — Istambul — Turquia.

PRÉMIO

O «Instituto for the Unity of Science» concederá um prémio de $500 à melhor memória sobre o tema «Mathematical Logic as a Tool of Analysis: Its Uses and Achievements in the Sciences and Philosophy». Dois prémios adicionais de 200 dollars cada serão atribuídos aos dois outros melhores trabalhos. Trata-se duma competição internacional a que todos podem concorrer. Os trabalhos não devem conter mais de 25.000 palavras, podem ser escritos em inglês, francês, ou alemão e têm de ser apresentados antes de 1 de Janeiro de 1953. Para informações mais pormenorizadas dirigir-se a: Institute for the Unity of Science, American Academy of Arts and Sciences, 28, Newbury Street, Boston, 16, Mass. U. S. A.

M. Z.

(De Acta Mathematica» 87, — Uppsala, 1952)

MATEMÁTICAS ELEMENTARES

Exames de aptidão para frequência das licenciaturas em Ciências Matemáticas, Ciências Físico-Químicas e Ciências Geofísicas, preparatórios para as escolas militares e curso de engenheiros geógrafos — Ano de 1951 — Ponto n.º 2.

3336—Demonstrar que, se os inteiros positivos a e b forem primos entre si, $a+b$ e a^2-ab+b^2 ou são primos entre si ou têm o máximo divisor comum 3. R: *Sabe-se que, se* a *e* b *são primos entre si,* a+b *e* ab *também são. Mas*

$$a^2-ab+b^2=(a+b)^2-3ab.$$

Vê-se então que todo o divisor comum a a^2-ab+b^2 *e* $a+b$ *é divisor de* 3ab *e, portanto, só pode ser* 3 *(além de* 1*) visto* a+b *e* ab *serem primos entre si.*

3337 — Considere-se a sucessão dos números primos até p; seja a o produto de alguns desses números, b o produto dos outros; demonstrar que $a+b$ admite um divisor primo superior a p R: *Se* a+b *é primo, a proposição é evidente. Se* a+b *não é primo, admitirá um divisor primo* c *que não pode ser nenhum dos factores de* a *ou* b. *Na verdade, supondo* c *um dos factores de* a, *por ex., seria* $b=\dot{c}$ *(teorema fundamental da divisibilidade), o que é absurdo porque, nestas condições,* c *seria também um dos factores de* b *(se um número primo divide um produto de factores primos é igual a um deles).*

3338 — Demonstrar que $3\cdot 2^{3n+1}+7n-6$, onde n é inteiro positivo, é sempre divisível por 49.

N. B. — Escrevendo $f(n)=3\cdot 2^{3n+1}+7n-6$ calcular $f(1)$, formar a diferença $8f(n)-f(n+1)$ e proceder por indução completa. R:

$$f(1)=3\cdot 2^4+7\cdot 1-6=49$$

$$8f(n)-f(n+1)=2^3[3\cdot 2^{3n+1}+7n-6]-$$

$$-[3\cdot 2^{3n+4}+7(n+1)-6]=49n-49=\dot{49}.$$

Portanto, se $f(n)=\dot{49}$ *também* $f(n+1)=\dot{49}$, *o que demonstra a proposição por indução completa, visto estar verificado que* $f(1)=\dot{49}$.

3339 — Decompor de todos os modos possíveis 1164 em duas parcelas inteiras positivas, múltiplas de 13 e de 29 respectivamente. R: *Sendo* (x_1, y_1) *uma solução inteira positiva da equação* $13x+29y=1164$, *a correspondente solução do problema proposto é*

$$13x_1,\quad 29y_1.$$

3340 — Demonstrar que o produto dos n primeiros números ímpares é igual a $\frac{1}{2^n}C_n^{2n}P_n$, onde C_n^{2n} e P_n representam respectivamente o número de combinações de $2n$ objectos n a n e o número de permutações de n objectos. R:

$$\frac{1}{2^n}C_n^{2n}P_n=\frac{1}{2^n}\cdot\frac{(2n)!}{n!\,n!}\cdot n!=$$

$$=\frac{1}{2^n}(2n)(2n-1)(2n-2)\cdots(n+2)(n+1)=$$

$$=(2n-1)(2n-3)\cdots 3\cdot 1$$

atendendo a que $2n-2k=2(n-k)$.

3341 — Para que valores de m tem a equação

$$x^2 + 4x - 3 = m(x + 12 - m)$$

raízes reais e desiguais? R: *A equação dada é equivalente a*

$$x^2 + (4 - m)x + (m^2 - 12m - 3) = 0.$$

Deve ser $\Delta > 0$, *isto é,* $-3m^2 + 40m + 28 > 0$. *Vem* $-\frac{2}{3} < m < 14$.

Soluções dos n.os 3336 a 3341 de Laureano Barros

Exames de aptidão para frequência do Instituto Superior de Ciências Económicas e Financeiras — Ano de 1951 — Ponto n.º 2 — Outubro.

I

3342 — A soma dos números a, b e c é igual a 255 e o seu menor múltiplo comum é 1785. Sabe-se ainda que m. d. c. (a, b) = m. d. c. (a, c) = m. d. c. $(b, c) = 17$. Calcule os números a, b e c. R: *Tem-se* $a = 17k$; $b = 17k'$; $c = 17k''$, *com* k, k' *e* k'' *primos entre si dois a dois.*

Substituindo nas relações dadas, fica: $k + k' + k'' = 255 : 17 = 15$; m. m. c. $(k, k', k'') = k \cdot k' \cdot k'' = 1785 : 17 = 105 = 3 \times 5 \times 7$. *Donde, por ex.,* $k = 3$, $k' = 5$, $k'' = 7$ *e* $a = 51$, $b = 85$, $c = 119$.

3343 — Demonstre que $n^3 + (n+2)^3$ é divisível por 4, qualquer que seja o inteiro n. R: $n^3 + (n+2)^3 = 2n^3 + 6n^2 + 12n + 8 = 2n^2(n + 3) + 4$. *Considerando os casos* n *par e* n *ímpar logo se vê que a primeira parcela é também sempre divisível por* 4.

II

3344 — Calcule os valores inteiros e positivos de a e b que anulam a raíz da equação $a(x - 17) + 204 = 2b(5 - x)$. R: *A equação dada é equivalente a* $(a + 2b)x - (17a + 10b - 204) = 0$. *As condições a impor são: 1)* $17a + 10b = 204$; *2)* $a + 2b \neq 0$. *A equação 1) tem uma só solução em números inteiros e positivos,* $a = 2$, $b = 11$, *que satisfaz também 2).*

3345 — Dado o trinómio $f(x) = px^2 - qx + 1$ deduza a relação que deve existir entre p e q para que o trinómio admita uma raíz superior e outra inferior a 1. R: *Deve ter-se* $p f(1) < 0$, *isto é* $p(p - q + 1) < 0$.

III

3346 — Determine os ângulos x positivos e inferiores a π radianos que tornam positiva a fracção

$$\frac{2 \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x - 1}{\operatorname{sen} x - 1}.$$

R: *O denominador da fracção é não positivo; deve ser, pois:* $2 \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x - 1 < 0$, *isto é,* $-1 < \operatorname{sen} x < 1/2$. *Donde,* $0 \leqslant x < \pi/6$; $\frac{5\pi}{6} < x \leqslant \pi$.

3347 — Mostre que se o triângulo ABC é rectângulo em A, se tem $\frac{\operatorname{sen} B + \operatorname{sen} C}{\cos B + \cos C} = \operatorname{sen}^2 A + \cos^2 A$. R: *Se* $A = 90°$, $B = 90° - C$, *donde*:

$$\frac{\operatorname{sen} B + \operatorname{sen} C}{\cos B + \cos C} = \frac{\operatorname{sen} B + \cos B}{\cos B + \operatorname{sen} B} = 1 = \operatorname{sen}^2 A + \cos^2 A, \qquad \text{c. q. d.}$$

Soluções dos n.os 3342 a 3347 de Fernando S. David

Exames de aptidão para frequência do Instituto Superior Técnico e Faculdade de Engenharia do Porto — Ano de 1951 — Outubro.

3348 — Determinar m de maneira que a soma dos quadrados das raízes da equação

$$x^2 + (m - 2)x - (m + 3) = 0$$

seja igual a um número N. A que se reduzem as raízes da equação dada para o menor valor de N? R: *Sendo* x_1 *e* x_2 *as raízes, teremos* $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = m^2 - 2m + 10 = N$, *donde* $m = 1 \pm \sqrt{N - 9}$.

Supondo que a segunda parte do problema se refere ao menor valor de N que torna reais os coeficientes da equação $(N = 9)$ *as raízes pedidas são* $\frac{1 \pm \sqrt{17}}{2}$.

3349 — Qual o número de triângulos que se podem obter tomando para vértices dez pontos num plano, sendo três deles colineares? R: $C_3^{10} - 1 = 119$.

3350 — Resolver a equação

$$x^4 - 12x^2 + 9 = 0$$

fazendo, se preciso, a transformação dum radical duplo na soma de dois radicais simples. R:

$$x = \pm\sqrt{6 \pm 3\sqrt{3}} = \pm\left(\sqrt{\frac{9}{2}} \pm \sqrt{\frac{3}{2}}\right) = \pm\left(\frac{3}{2}\sqrt{2} \pm \sqrt{\frac{3}{2}}\right).$$

3351 — Que valor deve ter m para que o terceiro e o oitavo termos do desenvolvimento do binómio $\left(\frac{x}{\sqrt{3x}} - 2\sqrt{\frac{1}{x}}\right)^m$ sejam dois termos equidistantes dos extremos? Calcule então o valor desses terceiro e oitavo termos. R: $m - 2 = 7$, *donde* $m = 9$;

$$T_3 = \frac{16}{3\sqrt{3}} x^2\sqrt{x}, \; T_8 = -1536 \frac{\sqrt{x}}{x^3}.$$

3352 — Qual é o menor número inteiro que verifica a inequação:

$$\frac{x^2 - 4x - 5}{x(x-1)(x+1)} > 0. \quad \text{R: } x = 6.$$

Soluções dos n.os 3348 a 3352 de Fernando S. David