MATEMÁTICAS SUPERIORES

PONTOS DE EXAMES DE FREQUÊNCIA E FINAIS

ÁLGEBRA SUPERIOR — MATEMÁTICAS GERAIS

F. C. C. — Álgebra Superior — **1.º exame de frequência — 1951-52.**

3459 — Provar que a função $y=x^3$ para $x\leqslant 2$ e $y=+\sqrt{1+x}$ para $x>2$ tem extremo no ponto $x=2$.

3460 — Calcular a primitiva da função

$$y=(5x+2)/\sqrt{3x^2-x-1}.$$

R: $$\frac{5}{3}\sqrt{3x^2-x-1}+\frac{17}{6\sqrt{3}}\log\left|\frac{x-1/6}{\sqrt{13/36}}+\right.$$
$$\left.+\sqrt{\left(\frac{x-1/6}{\sqrt{13/36}}\right)^2-1}\right|.$$

3461 — Calcular o $\lim\left[\left(3n^2+\frac{1}{2}\right)\log\left(1-\frac{1}{2n^2}\right)\right]$ quando $n\to\infty$. R: $-3/2$.

F. C. C. — Álgebra Superior — **2.º exame de frequência, 1951-52.**

3462 — Dada a cónica de equação $x^2+4xy-3y^2-2x=0$ determinar a direcção com que é conjugado o diâmetro $5x-11y+1=0$. R: *É a direcção* $m=-3$.

3463 — Determinar os planos tangentes à esfera $x^2+y^2+z^2-2x+4z-1=0$ que são perpendiculares à recta definida pelos pontos $P(1,-2,3)$ e $Q(2,1,4)$. R: $x+3y+z+1\pm\sqrt{66}=0$.

3464 — Discutir e resolver o sistema:

$$\begin{cases}2x-y+3z=4\\ x+5y-2z=1\\ 5x+14y-3z=\alpha.\end{cases}$$

R: *O sistema é incompatível para* $\alpha\neq 7$. *Para* α 7 *é compatível e indeterminado com as soluções*

$$x=-\frac{13}{11}p+\frac{21}{11},\quad y=\frac{7}{11}p-\frac{2}{11}\quad e\quad z=p.$$

F. C. C. — Álgebra Superior — **Exame final — 1951-52.**

3465 — Achar a primitiva da função

$$f(x)=\frac{3x-1}{(x^2+4)(x^2+9)}.$$

R:
$$\frac{3}{10}\log\frac{x^2+4}{x^2+9}-\frac{1}{10}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+\frac{1}{15}\operatorname{arctg}\frac{x}{3}.$$

3466 — Escrever as equações dos planos que contêm o eixo Oy e são tangentes à esfera de equação $x^2+y^2+z^2-8z+15=0$. R: $z=\pm\sqrt{15}x$.

3467 — Calcular os máximos e mínimos da função $f(x)=a^2\operatorname{sen}^2 x+b^2\cos^2 x$ (com $a>b$). R: *Mínimo* $m=b^2$ *nos pontos* $x=k\pi$; *Máximo* $M=a^2$ *para* $x=k\pi+\frac{\pi}{2}$.

Soluções dos n.os 3460 a 3467 de L. M. de Albuquerque

I. S. C. E. F. — Álgebra Superior — **1.º exame de frequência — 15 de Março de 1952.**

3468 — Determine a equação geral das circunferências que são tangentes à circunferência de equação $2x^2+2y^2=1$ e cujos centros se encontram na recta $y=2x$. Fixe uma das circunferências e escreva a equação da tangente comum. R: *Seja* $C(\alpha,2\alpha)$ *o centro da circunferência. A equação procurada é:* $(x-\alpha)^2+(y-2\alpha)^2=\left[\sqrt{\alpha^2+4\alpha^2}\pm 1/\sqrt{2}\right]^2=5\alpha^2\pm 2\sqrt{5/2}\,\alpha+1/2$.

Esta equação para $\alpha=0$ *conduz à circunferência dada. Qualquer dos dois trinómios do segundo membro tem descriminante nulo, portanto há dois valores de* α *que conduzem a circunferências de raio nulo.*

Fora desses três valores de α, *aquela equação responde ao problema. As tangentes comuns são as rectas perpendiculares à recta dada e passando pelos pontos de encontro dela com a circunferência dada.*

3469 — Inverta a função $x=\operatorname{sen} y$ por forma a conseguir uma inversa unívoca. Estude a continuidade dessa função inversa, inclusivamente nos pontos em que a derivada é infinita. Exprima por logarítmos a inversa da função $y=\operatorname{sh} x$. R: *Encontram-se inversas unívocas da função* $x=\operatorname{sen} y$ *nos intervalos* $(-\pi/2,\pi/2)$ *ou* $(0,\pi/2)$ *ou* $(\pi/2,3\pi/2)$ *por exemplo, ou em qualquer intervalo* (y_1,y_2) *onde não se encontrem dois* y y *que exprimam, em radianos, arcos com os mesmos senos.*

Se $x=f(y)$ *é contínua no ponto* $b=\varphi(a)$, *tem-*

-se $|f(y) - f(b)| < \delta$ *quando for* $|y - b| < \varepsilon$ *e portanto para* $|y - b| < \delta' < \varepsilon$.

Então, dado $\delta' < \varepsilon$ *tem-se* $|y - b| = |\varphi(x) - \varphi(a)| < \delta'$ *se for* $|f(y) - f(b)| = |x - a| < \delta$; *a inversa de uma função contínua é contínua.*

Por outro lado a inversa de $x = \operatorname{sen} y$ *é* $y = \operatorname{arc\,sen} x$, *em qualquer dos intervalos considerados, por exemplo,* $(-\pi/2, \pi/2)$. *Em qualquer ponto interior a função* $x = \operatorname{sen} y$ *tem derivada não nula, logo a função* $y = \operatorname{arc\,sen} x$ *tem derivada finita e é pois contínua. Para* $y = \pm\pi/2$ *a derivada de* $x = \operatorname{sen} y$ *é nula, logo em tais pontos a função* $y = \operatorname{arc\,sen} x$ *tem derivada infinita; estudemos então nestes pontos a continuidade da função. Pela continuidade de* $\operatorname{sen} y$, *teremos* $|\operatorname{sen} y \mp 1| < \delta$ *quando for* $|y \mp \pi/2| < \varepsilon$; *portanto, dado* $\delta' < \varepsilon$ *será* $|\operatorname{arc\,sen} x \mp \pi/2| < \delta'$ *quando* $|x \pm 1| < \delta$.

3470 — Escreva a fórmula de Taylor da função $f(x)$ na vizinhança do ponto a. Defina série de Taylor da mesma função, relativa ao ponto a. Indique uma condição para que a soma desta série seja $f(x)$. Prove a necessidade e a suficiência. Enuncie uma condição apenas suficiente e prove a suficiência. Desenvolva 3^x nas vizinhanças de $x = -1$. Em que pontos pode calcular a função aproveitando este desenvolvimento? R: *Aproveitando o desenvolvimento de* $e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2!} + \cdots$ *válido qualquer que seja* y; *teremos, atendendo a que* $3^x = e^{x \log 3}$, *o desenvolvimento desejado:* $3^x = 1 + x \log 3 + \frac{x^2 \log^2 3}{2!} + \cdots$.

Esta série permite calcular 3^x *em todo o campo real.*

3471 — Demonstre o teorema de Lagrange, para a função $f(x)$ regular em (a, b) e prove que $f(x)$ é pròpriamente crescente no intervalo, se $f'(x) > 0$. E se for $f'(x) \geqslant 0$? R: *Tem-se, depois de demonstrado o teorema de* Lagrange, $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = f'(x_3)$ *quaisquer que sejam* $x_1 < x_2$ *tomados no intervalo* (a, b) *e sendo* $x_1 < x_3 < x_2$. *Supondo* $f'(x) \geqslant 0$ *(nunca nula) no intervalo* (a, b) *vem a fracção* $\geqslant 0$ *(nunca nula) e os seus termos do mesmo sinal (o numerador nunca nulo). Logo, para* $x_1 < x_2$ *será* $f(x_1) \leqslant f(x_2)$ *(ou sempre* $f(x_1) < f(x_2)$).

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — 1.º exame de frequência — 14 de Março de 1952.

3472 — Determine a equação da tangente $-r-$ à curva $y = x - \operatorname{sen} \pi x/4$ no ponto de abcissa $x = 2$. Deduza a equação da família das circunferências de centro no eixo OY e tangente à recta $-r-$. Em particular, ache as equações daquelas circunferências, da família, de raio igual a 2. R: *A equação da tangente no ponto* $(2, 1)$ *é* $y - x + 1 = 0$. *Sendo* $C(0, c)$ *o centro da circunferencia, a distância de* C *a* r *vem a ser* $\frac{c+1}{\sqrt{2}}$. *A equação procurada é:* $x^2 + (y - c)^2 = (c+1)^2/2$. *Para o raio* 2 *virá* $(c+1)^2/2 = 4$, *donde* $c = -1 \pm \sqrt{8}$. *As equações das circunferências pedidas são pois:* $x^2 + (y + 1 \mp \sqrt{8})^2 = 4$.

3473 — Se $|a_n|$ tem limite finito, mostre que o conjunto dos números a_n é limitado.

Determine o intervalo de convergência absoluta da série de termo geral $a_n x^n$. Enuncie uma condição necessária e suficiente de convergência desta série num ponto. Indique um intervalo de convergência uniforme da mesma série e prove a afirmação.

Em que pontos a soma da série é uma função contínua? Enuncie o teorema em que fundamenta a resposta.

Dada a série $\sum_{1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2+1} \left(\frac{x}{2}\right)^n$ determine, justificando, o intervalo $(0, a)$ de maior amplitude, de convergência uniforme. R: *Seja* A *o limite finito de* $|a_n|$; *fixado* $\varepsilon > 0$, *só um número finito de números* a_n *ficarão fora do intervalo* $(-A-\varepsilon, A+\varepsilon)$. *Se os números* a_n *fora daquele intervalo são em número finito, há um menor que todos, seja* α, *e um maior que todos, seja* Λ. *Dos dois números* α *e* Λ *um pelo menos tem maior valor absoluto; seja* β *esse valor absoluto. Então, todos os números* a_n *caiem no intervalo fechado* $[-A-\varepsilon-\beta, A+\varepsilon+\beta]$. *Como*

$$\lim_{n=\infty} \frac{n+1}{(n+1)^2+1} \cdot \frac{|x|^{n+1}}{2^{n+1}} : \frac{n}{n^2+1} \cdot \frac{|x|^n}{2^n} = \frac{|x|}{2} \lim_{n=\infty} \frac{(n+1)(n^2+1)}{n[(n+1)^2+1]} = \frac{|x|}{2},$$

o intervalo de convergência absoluta é dado por $\frac{|x|}{2} < 1$ *e portanto,* $-2 < x < 2$. *Mas a série* $\sum_{1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2+1}$ *é alternada decrescente, convergente, e pelo teorema de* Abel, *a série proposta é uniformemente convergente no intervalo (máximo)* $(0,2)$.

3474 — Defina função contínua num ponto $-c-$ interior ao domínio.

Se a função $f(x)$ é limitada no intervalo (a, b) e num ponto interior desse intervalo tem uma descontinuidade, estude aí a oscilação. Justifique.

Prove que se $f(x)$ é contínua no conjunto limitado e fechado $-X-$ ela é limitada em X.

Determine os extremantes da função $f(x) = (x-2)^2 \cdot x^3$. R: *Com* x *no intervalo* (a, b) *é* $l \leqslant f(x) \leqslant L$. *Seja* c *interior a* (a, b) *e ponto de descontinuidade. Dada uma* $I(c, \varepsilon)$ *sejam* $L(c, \varepsilon)$ *e* $l(c, \varepsilon)$ *os limites próprios ou impróprios de* f (x) *com* x *em* $I(c, \varepsilon)$. *Tendendo* ε *para zero, existem, próprios ou impróprios, os limites* $\bar{f}(c) = \lim_{\varepsilon=0} L(c, \varepsilon)$ *e* $\underline{f}(c) = \lim_{\varepsilon=0} l(c, \varepsilon)$.

Como c *é interior a* (a, b), *para* ε *suficientemente pequeno* $I(c, \varepsilon)$ *está inteiramente contida em* (a, b) *e portanto:* $l \leqslant \underline{f}(c) < \bar{f}(c) \leqslant L$.

Então, $\omega(c) = \bar{f}(c) - \underline{f}(c)$ *é finita.*

De $f(x) = (x-2)^2 x^3$ *vem:* $f'(x) = 2(x-2)x^3 + 3(x-2)^2 x^2 = x^2(x-2)(5x-6) = 5x^2\left(x - \frac{6}{5}\right)(x-2)$.

São extremantes os valores $x_1 = \frac{6}{5}$ *e* $x_2 = 2$.

São extremos os valores

$$f(x_1) = \text{Máximo} \quad e \quad f(x_2) = \text{mínimo}.$$

Trata-se de extremos locais.

3475 — Supondo que a recta $y = mx + p$ é assíntota da curva $y = f(x)$, prove que $f(x) = mx + p + \varphi(x)$ onde $\lim_{x=\infty} \varphi(x) = 0$. Nas condições anteriores qual o $\lim_{x=\infty} \varphi'(x)$? Porquê? Como determina a posição daquela curva em relação à assíntota nas vizinhanças do infinito? R: *A primeira parte resulta imediatamente da definição de assíntota. Sendo assim, temos* $\varphi(x) = f(x) - mx - p$ *donde* $\varphi'(x) = f'(x) - m$. *Mas como* $\lim_{x=\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x=\infty} f'(x) = m$ *então será* $\lim_{x=\infty} \varphi'(x) = 0$.

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — 2.º Exame freq. — 30 de Junho de 1952.

3476 — Defina zero inteiro de $f(x)$. Dada a função $f(x) = (x-a)^2 \psi(x)$ que condições deve impor à função $\psi(x)$ para que a seja zero duplo?

Prove que nessas condições a é zero duplo.

Se a é zero triplo de $f'(x)$ indique, justificando, o número de variações perdidas por $F'(x)$ (sucessão de Fourier de $f'(x)$) quando x passa por a.

Utilize a sucessão de Rolle na separação das raízes de $x^4 - 6x^2 + 8x + 4 = 0$. R: f (x) *tem* a *por zero simples se e só se:* $f(a) = 0$ *e* $f'(a) \neq 0, \infty$. f (x) *tem* a *por zero duplo se e só se:* $f(a) = f'(a) = 0$ *e* $f''(a) \neq 0, \infty$, *e assim sucessivamente, de modo que:* a *é zero inteiro de* f (x) *se e só se* $f(a) = 0$ *e alguma derivada da função é diferente de zero e infinito para* x = a.

Para que a *seja zero duplo de* $f(x) = (x-a)^2 \psi(x)$ *é suficiente que:*

1.º) $\psi(x)$ *diferente de zero e infinito para* x = a, *porque então* $f(a) = 0$.

2.º) $(x-a)\psi(x)$ *seja contínua para* x = a, *porque então, de* $\frac{f(x)}{x-a} = (x-a)\psi(x)$ *resulta* $f'(a) = 0$.

3.º) $(x-a)\psi(x)$ *tenha derivada finita para* x = a, *porque de* $f(x) = (x-a)[(x-a)\psi(x)]$ *derivando vem* $\frac{f'(x)}{x-a} = \psi(x) + [(x-a)\psi(x)]'$ *o que dá* $f''(a) \neq 0, \infty$.

Tem-se $f'(x) = 4x^3 - 12x + 8 = 4(x+2)(x-1)^2$; *à sucessão* $-\infty, -2, 1, +\infty$ *corresponde a succssão de Rolle* $f(-\infty), f(-2), f(1), f(+\infty)$ *com os seguintes sinais:* +, −, +, +; *como* $f(-3) > 0$ *conclui-se com os teors. de Rolle e Cauchy que há uma raiz real em* (−3, −2) *e outra em* (−2, 1); *as outras duas são complexas (conjugadas).*

3477 — Demonstre que $f(x, y)$ é contínua nos pontos onde seja diferenciável. Se $f(x, y)$ é diferenciável em $P(a, b)$ e se nesse ponto $f(x, y) - C$ é nula, mas $f'_y(x, y) > 0$, prove que $f(x, y) = C$ define uma e só uma função $y(x)$ nas vizinhanças de $x = a$.

Dada $f(x, y) = x^2 + 3xy + 2y^2 = 0$ que figuras representa no plano e no espaço esta equação? Determine o grau de homogeneidade de $f(x, y)$ e decomponha-a em soma de quadrados. R: *Faça-se* $F(x, y) = f(x, y) - C$ *e será* $F'_x = f'_x$, $F'_y = f'_y$. *As funções* f (x, y) *e* F (x, y) *são diferenciáveis em* P, *logo com derivadas finitas* em P, *sendo ainda* $F(a, b) = 0$ *e* $F'_y(a, b) > 0$. *Então, as funções parciais tiradas de* F *são contínuas, por terem derivadas, e uma é monótona, por ser positiva a respectiva derivada.*

São as condições do teorema de existência; a unicidade resulta do facto da função parcial em y *ser pròpriamente crescente, pois que a sua derivada é não nula em certa vizinhança de* P, *e se deve, para isso, supor contínua em* P.

A equação $f(x, y) = x^2 + 3xy + 2y^2 = 0$ *representa, no plano, uma curva de segunda ordem, porque é do segundo grau; representa no espaço uma superfície de segunda ordem.*

O grau de homogeneidade de f (x, y) *é* 2:

$$f(xt, yt) = t^2 f(x, y).$$

$$x^2 + 3xy + 2y^2 = x^2 + 2x\left(\frac{3}{2}y\right) + 2y^2 = \left(x + \frac{3}{2}y\right)^2 - \frac{9}{4}y^2 + 2y^2 = \left(x + \frac{3}{2}y\right)^2 - \left(\frac{1}{2}y\right)^2.$$

Fazendo a mudança de eixos $X = x + \frac{3}{2}y$, $Y = \frac{1}{2}y$, *resulta para equação das figuras* $X^2-Y^2=(X+Y)(X-Y)=0$.

No plano: duas rectas concorrentes na origem. No espaço dois planos passando por $\overline{OZ}$.

4378 — Demonstre que se um polinómio $P(z)$ de grau efectivo $n \geqslant 1$ tem uma raíz, tem precisamente n raízes e deduza as fórmulas de Girard.

Utilize a teoria da eliminação para determinar a condição necessária e suficiente de existência de raíz dupla na equação $x^3+px+q=0$. R: *Eliminando* x *entre* x^3+px+q *e a derivada* $3x^2+p$ *vem o determinante*

$$\begin{vmatrix} & 1 & 3 & & \\ 1 & 0 & 0 & 3 & \\ 0 & p & p & 0 & 3 \\ p & q & & p & 0 \\ q & & & & p \end{vmatrix}$$

que deverá ser igualado a zero.

Para abaixamento de ordem temos:

$$\begin{array}{r|cccc} 3 & 0 & p & (0) & \\ & 1 & 0 & p & q \\ \hline \lambda_1=-\frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3}p & q & \\ \lambda_3=-\frac{2}{q}p & 0 & q & -\frac{2}{q}p^2 & \end{array}$$

Portanto:

$$\begin{vmatrix} \frac{2}{3}p & q \\ q & -\frac{2}{q}p^2 \end{vmatrix} = -\frac{4}{27}p^3-q^2=0 \quad ou$$

$$\left(\frac{p}{3}\right)^3+\left(\frac{q}{2}\right)^2=0.$$

3479 — Enuncie o teorema de Rouché e deduza a regra de Cramer para a resolução de sistemas.

Qual a condição para que o sistema

$$\begin{cases} a_{ik}\,x_k=0 \quad (i=1,2,\cdots,n) \\ (k=1,\cdots,n) \end{cases}$$

tenha, pelo menos, uma solução não nula.

Sirva-se dessa condição para resolver o seguinte problema:

Determine a equação do plano que passa pelo ponto (x_0, y_0, z_0) e é paralelo às rectas de equações

$$\frac{x-x'}{a}=\frac{y-y'}{b}=\frac{z-z'}{c}$$

e

$$\frac{x}{a'}=\frac{y}{b'}=\frac{z}{c'}.$$

R: *A equação do plano que passa pelo ponto, e as condições de paralelismo, dão o sistema*

$$\begin{cases} A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0 \\ Aa \qquad +Bb \qquad +Cc \qquad =0 \\ Aa' \qquad +Bb' \qquad +Cc' \qquad =0 \end{cases}$$

de equações lineares e homogéneas em A, B, C. *Para que haja solução não nula deverá ser (e basta)*

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ a & b & c \\ a' & b' & c' \end{vmatrix}=0$$

que é a equação do plano.

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — Exame final — 21 de Julho de 1952.

3480 — Exprima a função $P(x)=4x^3-15x^2+16x+8$ sob a forma $\alpha x(x-1)(x-2)+\beta x(x-1)+\gamma x+\delta$ onde $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ são coeficientes constantes. R: *Da relação* $P(x)=\alpha x(x-1)(x-2)+\beta x(x-1)+\gamma x+\delta$ *se vê que* δ, γ *e* β *são respectivamante: o resto da divisão de* P(x) *por* x*; o resto da divisão por* $x-1$, *do cociente da divisão anterior; o resto da divisão por* $x-2$, *do cociente da divisão anterior. Então, a regra de* Ruffini, *dá*

$$\delta=8, \ \gamma=5 \ e \ \beta=-3.$$

$$P(x)=4x(x-1)(x-2)-3x(x-1)+5x+8.$$

3481 — Duma função interpoladora $f(x)$, são conhecidas as seguintes diferenças finitas

$$\begin{array}{ll} \Delta^0 f(0)=2 & \Delta^0 f(1)=2 \\ \Delta^1 f(0)=0 & \Delta^1 f(1)=-6 \\ \Delta^2 f(0)=-6 & \Delta^2 f(1)=-18 \\ \Delta^3 f(0)=-12=\Delta^3 f(1)=-12. & \end{array}$$

Deduza a respectiva tabela de diferenças, os valores $f(4)$ e $f(-1)$ e determine por último a interpoladora. R: *A tabela de diferenças pode reconstituir-se fàcilmente. Prolongando a tabela vem*

$$\begin{array}{ccccc} x & \Delta^0 f & \Delta^1 f & \Delta^2 f & \Delta^3 f \\ 0 & 2 & & & \\ & & 0 & & \\ 1 & 2 & & -6 & \\ & & -6 & & -12 \\ 2 & -4 & & -18 & \\ & & -24 & & \\ 3 & -28 & & & \end{array}$$

$$f(4)=-82 \qquad f(-1)=8.$$

A interpoladora de Gregory-Newton *é*

$$f(x) = 2 - 6\frac{x(x-1)}{2!} - 12\frac{x(x-1)(x-2)}{3!} =$$
$$= 2 - 3x(x-1) - 2x(x-1)(x-2) =$$
$$= -2x^3 + 3x^2 - x + 2 .$$

3482 — Mostre que a equação $x^3 - y^3 - 2xy + + 2 = 0$ define uma só função $y = \varphi(x)$ no intervalo $0 \leqslant x < +\infty$. Determine a equação da superfície gerada pela revolução, em torno de OX, da tangente à curva $y = \varphi(x)$ no ponto $(1,1)$.

R: *A equação* $y^3 + 2xy - 2 - x^3 = 0$ *é de 3.º grau em* y *e, com* x *nulo ou positivo, pela regra de* DESCARTES, *apresenta sempre uma só variação e não tem mais que uma raiz real* $y(x)$ $(x \geqslant 0)$. *As derivadas parciais do polinómio,* $f'_x(x,y) = -3x^2 + 2y$, $f'_y(x,y) = 3y^2 + 2x$, *são finitas e não nulas para* $x > 0$, *e também em* $x = 0$ *porque então é* $y \neq 0$. *Isto basta para afirmar que tal equação define uma função* $y(x)$ *no intervalo* $0 \leqslant x < +\infty$, *e uma ùnicamente.*

A equação da tangente à curva $y = \varphi(x)$ *no ponto* $(1,1)$ *é* $y = \frac{1}{5}x + \frac{4}{5}$.

A equação da superfície de revolução: $y^2 + z^2 = \left(\frac{1}{5}x + \frac{4}{5}\right)^2$.

Soluções dos n.os 3468 a 3482 de J. Ribeiro de Albuquerque

I. S. T. — MATEMÁTICAS GERAIS — 2.º **exame de frequência ordinário — 7 de Julho de 1952.**

I

3483 — Estudar e representar gràficamente a função definida por $y \cdot (3x-1) + \frac{3}{x^2} \cdot (3x-1) = 8$. R:

A função pode escrever-se

$$y = \frac{8}{3x-1} - \frac{3}{x^2} = \frac{8x^2 - 9x + 3}{x^2 \cdot (3x-1)}.$$

A curva representativa de $y(x)$ *não corta o eixo dos* xx *a distância finita e*

$$y(+\infty) = +0 \quad ; \quad y(-\infty) = -0 .$$

Assíntotas paralelas aos eixos:

$$x = 0; \; x = 1/3; \; y = 0 .$$

Descontinuidades:

$$y(+0) = y(-0) = -\infty$$
$$y(1/3 + 0) = +\infty; \quad y(1/3 - 0) = -\infty .$$

Máximos e mínimos:

$$y' = \frac{-24}{(3x-1)^2} + \frac{6}{x^3} = \frac{-24x^3 + 54x^2 - 36x + 6}{x^3 \cdot (3x-1)^2}$$

$$y' = 0 \to 4x^3 - 9x^2 + 6x - 1 = 0 \to x_1 = x_2 = 1 \text{ e } x_3 = 1/4.$$

Mas temos

$$y'(1+0) < 0 ; \quad y'(1-0) < 0$$
$$y'(1/4 + 0) < 0 ; \quad y'(1/4 - 0) > 0 \text{ Máximo}.$$

No ponto 1 *não há estacionaridade.*

Pontos de inflexão:

$$y'' = \frac{144}{(3x-1)^3} - \frac{18}{x^4} = 18 \cdot \frac{8x^4 - 27x^3 + 27x^2 - 9x + 1}{x^4 \cdot (3x-1)^3}$$

$y'' = 0 \to x_1 = 1$ *e fica* $8x^3 - 19x^2 + 8x - 1 = 0.$

A última equação tem a raiz real $x_2 \cong 1{,}89$ *e as outras duas são imaginárias. Além disso,*

$$y''(1+0) < 0; \quad y''(1-0) > 0 \quad \text{Inflexão}$$
$$y''(x_2+0) > 0; \quad y''(x_2-0) < 0 \quad \text{Inflexão}$$

3484 — Mostrar que a série

$$\frac{a}{b} + 2 \cdot \frac{a \cdot (a+1)}{b \cdot (b+1)} + 3 \cdot \frac{a \cdot (a+1) \cdot (a+2)}{b \cdot (b+1) \cdot (b+2)} + \cdots$$

onde $a, b > 0$, é convergente para $b > a + 2$. R:

O termo de ordem n *escreve-se*

$$u_n = n \cdot \frac{a \cdot (a+1) \cdots (a+n-1)}{b \cdot (b+1) \cdots (b+n-1)}.$$

Aplicando o critério de DUHAMEL:

$$\lim_{n=\infty} n \cdot \left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) = b - a - 1 .$$

A série é pois convergente para $b - a - 1 > 1$ *ou seja* $b > a + 2$.

3485 — Escrever a equação da parábola que admite como tangente no ponto $(0, -1)$ a recta $3x + 5y + 5 = 0$ e que tem como diâmetro conjugado com o eixo dos xx a recta $2x + 4y + 1 = 0$. Estabelecer a equação normal da parábola. R: *A parábola tem por equação*

$$2x^2 + 8xy + 8y^2 + 2x + 6y - 2 = 0 .$$

A equação normal ou canónica da parábola é

$$Y^2 = \frac{\sqrt{5}}{25} X .$$

II

3486 — O critério de KUMMER afirma o seguinte: «Seja a_n uma função positiva de n. A série de termos positivos, Σu_n, é convergente se o limite

$$\lim_{n=\infty} \left(a_n \cdot \frac{u_n}{n_{n+1}} - a_{n+1}\right) = L$$

for positivo; a série é divergente se aquele limite for negativo e, além disso, for divergente a série que tem $1/a_n$ como termo geral».

Nestas condições, verifique que para $a_n = 1$ se obtém o critério de d'ALEMBERT e para $a_n = n$ o de DUHAMEL.

3487 — Enuncie algumas propriedades dos determinantes adjuntos. Considere o determinante:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{vmatrix}.$$

Se forem A, D e F os complementos algébricos de a, d e f mostre que aqueles têm o mesmo sinal quando $\Delta = 0$.

3488 — Diga em que consiste o problema da eliminação algébrica e mostre, baseando-se nele, como pode realizar-se o cálculo das raízes imaginárias duma equação algébrica inteira de coeficientes inteiros.

3489 — Defina focos duma cónica e indique como pode fazer-se a sua determinação. Como exemplo, ache os focos da parábola $y^2 = 2px$.

Sabendo que as directrizes duma cónica são as polares dos focos em relação à cónica, determine as directrizes da parábola acima.

I. S. T. — MATEMÁTICAS GERAIS — 2.º exame de frequência extraordinário — 10 de Julho de 1952.

I

3490 — Estudar e representar gràficamente a função $y(x)$ definida por

$$y^2 = (a^2 - x^2) \cdot (x^2 - b^2)^2 \qquad (a > b > 0).$$

R: *A função pode escrever-se*

$$y = \pm (x^2 - b^2) \cdot \sqrt{a^2 - x^2}.$$

O domínio da função é: $-a \leqslant x \leqslant a$.

Pontos de encontro com os eixos:

$$x = 0, \quad y = \pm a \cdot b^2$$
$$y = 0, \quad x = \pm a \ \ e \ \ x = \pm b.$$

A curva representativa é simétrica em relação aos dois eixos coordenados e à origem.

Máximos e mínimos:

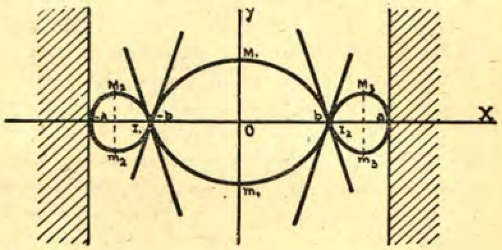
$$y' = \frac{x \cdot (2a^2 + b^2) - 3x^3}{(a^2 - x^2)^{1/2}}$$

$$y' = 0 \rightarrow x = 0 \ \ e \ \ x = \pm\sqrt{(2a^2 + b^2)/3},$$

$$(b < \sqrt{(2a^2 + b^2)/3} < a).$$

Valores da função nos pontos de estacionaridade:

$$y = \pm a b^2 \ \ e \ \ y = \pm \frac{2}{3 \cdot \sqrt{3}} (a^2 - b^2)^{3/2}.$$



Nos pontos $x = \pm b$ *temos duas tangentes distintas:*

$$y' = \pm 2b \cdot (a^2 - b^2)^{1/2}.$$

Nota: *Há três máximos:* M_1, M_2 *e* M_3. *Há três mínimos:* m_1, m_2 *e* m_3. *Há 2 pontos de inflexão para cada ramo:* I_1 *e* I_2.

3491 — Achar os valores reais de λ para os quais o sistema

$$\begin{cases} x + (\lambda - 1) \cdot z = 0 \\ \lambda \cdot y + z = 0 \\ \lambda^2 \cdot x + z = 0 \end{cases}$$

tem soluções não nulas. R: *A condição para a existência de soluções não nulas é*

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \lambda - 1 \\ 0 & \lambda & 1 \\ \lambda^2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \lambda + \lambda^3 - \lambda^4 = 0.$$

Uma das soluções e $\lambda = 0$ *e obtém-se* $\lambda^3 - \lambda^2 - 1 = 0$. *Esta equação tem apenas uma raiz real positiva* $\lambda \cong 1{,}47$. *Para* $\lambda = 0$, *o sistema tem soluções não nulas do tipo* $x = z = 0$ *e* y qualquer.

3492 — O ponto P, afixo do complexo $z = x + i \cdot y$, descreve, no plano de CAUCHY, uma circunferência com centro no ponto $C(2, 0)$ e raio $R = 1$.

a) Deduzir a equação da cónica descrita no mesmo plano pelo afixo P_1 do complexo $z_1 = (2 + i) \cdot z$, indicar o seu género e determinar o centro. Escrever a equação reduzida da cónica, tomando o centro para origem das coordenadas. *b*) Fazem-se passar pela origem rectas perpendiculares aos segmentos PP_1. Qual deve ser o complexo z para que a perpendicular correspondente passe pelo vértice da parábola $a \cdot x^2 - 2a \cdot x - y + a - 1 = 0$? R: *As coordenadas de* P_1 *são:* $x_1 = 2x - y$; $y_1 = x + 2y$.

Eliminando x *e* y *entre as três equações*

$$(1)\qquad \begin{cases}(x-2)^2+y^2=1\\ 2x-y=x_1\\ x+2y=y_1\end{cases}$$

obtêm-se a equação da cónica descrita por P_1:

$$x_1^2+y_1^2-8x_1-4y_1+15=0\,.$$

Trata-se duma circunferência com centro em $C_1\,(4,2)$ *e raio* $R_1=\sqrt{5}$. *A equação reduzida da cónica é pois* $X^2+Y^2=5$.

O coeficiente angular das rectas definidas por P *e* P_1 *é*

$$m=\frac{y_1-y}{x_1-x}=\frac{x+y}{x-y}\,.$$

As perpendiculares a PP_1 *passando pela origem têm por equação:*

$$(2)\qquad Y=\frac{y-x}{x+y}\,X\,.$$

Como se trata duma parábola do eixo vertical, o vértice corresponde ao ponto de estacionaridade da função $y=ax^2-2ax+a-1$ *ou seja,* $V(1,-1)$ *Das condições do enunciado e das equações* (1) *e* (2) *resultam as soluções:* $z'=1$ *e* $z''=3$.

II

3493 — Indique alguns processos indirectos de desenvolvimento duma função em série inteira. Como exemplo, estabeleça o desenvolvimento de

$$\log\frac{1+x}{1-x}$$

e diga como poderia utilizar este desenvolvimento para o cálculo do log 10 com um erro inferior a um valor dado.

3494 — Definição e propriedades do produto matricial. Caso particular do produto duma matriz pela sua inversa. Aplicação aos sistemas de equações lineares.

3495 — Defina transformada duma equação algébrica e indique os tipos mais importantes de transformações. Aponte as principais aplicações das transformadas na resolução numérica das equações algébricas inteiras.

3496 — Defina directrizes duma cónica e diga como se podem determinar. Como aplicação, ache as directrizes das cónicas com centro, definidas pelas suas equações normais.

I. S. T. — Matemáticas Gerais — Exame final — 29 de Julho de 1952.

I

3497 — A função $y(x)$ é definida implicitamente pela equação

$$F\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{2x+y+1}{x+2y+1}\,,\ \operatorname{arc\,tg}\frac{x+2y+1}{2x+y+1}\right)=0\,.$$

Calcular $\dfrac{dy}{dx}$, mostrando que é independente da função F. R:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}}=-\frac{\dfrac{\partial F}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial F}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial F}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial y}}$$

onde

$$u=\operatorname{arc\,tg}\frac{2x+y+1}{x+2y+1}$$

$$v=\operatorname{arc\,tg}\frac{x+2y+1}{2x+y+1}$$

Logo,

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{3y+1}{(x+2y+1)^2+(2x+y+1)^2}$$

Atendendo às expressões de u *e* v *reconhece-se imediatamente que*

$$\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{3x+1}{(x+2y+1)^2+(2x+y+1)^2}$$

Tem-se, portanto,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3y+1}{3x+1}\,.$$

3498 — Deduzir a equação do plano que passa pela recta: $x=z$, $y=3$, e corta, segundo uma circunferência de raio 3, a esfera

$$x^2+y^2+z^2-4x+2z-11=0\,.$$

R: *A equação do plano é da forma:* $x-z+\lambda\cdot(y-3)=0$. *A condição imposta ao plano deste feixe obriga a ser*

$$\lambda=\frac{9\pm\sqrt{91}}{2}\,.$$

II

3499 — Enuncie as principais propriedades das equações binómias, escritas sob a forma normal, e deduza daquelas o caminho a seguir para a resolução das equações.

3500 — Defina função limitada num intervalo e indique as suas propriedades fundamentais.

3501 — Diga o que é uma série absolutamente convergente e aponte algumas das suas propriedades características, incluindo as que se referem a operações sobre elas praticadas.

3502 — Dependência linear; propriedades relativas a determinantes e matrizes.

3503 — Equações duma recta no espaço: diferentes aspectos que podem tomar, sua relação e discussão.

Enunciados e soluções dos n.os 3483 a 3503 de J. H. Arandes.

CÁLCULO INFINITESIMAL

F. C. C. — Cálculo Infinitesimal — **1.º exame de frequência, 1951-52.**

3504 — Primitivar a função $f(x) = \dfrac{\log(x+a)}{bx+ab} + \operatorname{sen} x \operatorname{sh} x$.

R: $\dfrac{1}{2b}[\log(x+a)]^2 + \dfrac{1}{2}(\operatorname{sen} x \operatorname{ch} x - \cos x \operatorname{sh} x)$.

3505 — Determinar os quatro primeiros termos não nulos do desenvolvimento da função $f(x) = \dfrac{x}{2+e^x}$ em série de potências de x.

R: $\dfrac{1}{3}x - \dfrac{1}{9}x^2 - \dfrac{1}{54}x^3 + \dfrac{1}{162}x^4 + \cdots$.

3506 — Determinar a envolvente e o lugar dos pontos singulares da família de curvas de equação $(y-1)^2 = e^{\alpha x} - \alpha x$. R: *A envolvente é constituída pelas rectas* $y = 0$ *e* $y = 2$.

3507 — Em que direcções emergentes da origem é nula a derivada direccional da função $f(x, y) = x^2 + y^2 - x + \sqrt{3}\, y$. R: *As direcções pedidas definem com o eixo* Ox *os ângulos* $n\pi + \pi/6$ (n *inteiro*).

3508 — Demonstre que nos pontos da superfície regular e fechada $F(x, y, z) = 0$ em que é máxima ou mínima a soma das coordenadas, o plano tangente faz ângulos iguais com os eixos coordenados. R: *A função a extremar é* $f(x, y, z) = x + y + z$, *com a condição* $F(x, y, z) = 0$. *Sendo* λ *um parâmetro, é* $\Phi(x, y, z) = (x + y + z) - \lambda F(x, y, z)$, *cujas derivadas são nulas nos pontos extremantes:* $1 - \lambda F'_x = 0$, $1 - \lambda F'_y = 0$, $1 - \lambda F'_z = 0$. *Qualquer que seja* λ, *verifica-se que são iguais os coeficientes* $F'_x = F'_y = F'_z = \dfrac{1}{\lambda}$ *do plano tangente naqueles pontos, como queríamos.*

F. C. C. — Cálculo Infinitesimal — **2.º Exame de frequência — 1951-52.**

3509 — Calcular $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2 - x + 1}}$.

3510 — Determinar a área da região limitada pela semi recta $x \geqslant 1$, $y = 0$, pela curva $y = 1/(x^2 + x)$ e pela recta $x = 1$. R: $\log 2$.

3511 — Sabendo que o integral geral de $xy'' - y' = 0$ é $y = c_1 x^2 + c_2$, determinar o integral de $xy'' - y' = x^2 \log x$.

R. $$y = \left(\frac{1}{2}x \log x - \frac{1}{2}x + k_1\right) x^2 + \left(-\frac{x^3}{6}\log x + \frac{x^3}{18} + k_2\right).$$

Soluções dos n.os 3504 a 3511 de L. M. de Albuquerque

I. S. C. E. F. — Análise Infinitesimal — **1.º Exame de frequência — Fevereiro de 1951.**

3512 — Demonstre que $\vec{A} \wedge \vec{B} / \vec{C} = (\alpha \wedge \beta / \gamma)^4$ sabendo que

$$\vec{A} = (\alpha \wedge \beta) \wedge (\beta \wedge \gamma)$$
$$\vec{B} = (\beta \wedge \gamma) \wedge (\gamma \wedge \alpha)$$
$$\vec{C} = (\gamma \wedge \alpha) \wedge (\alpha \wedge \beta).$$

R: *Efectuando o cálculo dos produtos quádruplos vem:*

$$\begin{aligned}\vec{A} \wedge \vec{B} / \vec{C} &= [(\alpha \wedge \beta/\gamma)\,\beta - (\alpha \wedge \beta/\beta)\gamma] \wedge \\ &\wedge [(\beta \wedge \gamma/\alpha)\,\gamma - (\beta \wedge \gamma/\gamma)\,\alpha] / [(\gamma \wedge \alpha/\beta)\,\alpha - (\gamma \wedge \alpha/\alpha)\,\beta] = \\ &= [(\alpha \wedge \beta/\gamma)\,\beta] \wedge [(\alpha \wedge \beta/\gamma)\,\gamma] / [(\alpha \wedge \beta/\gamma)\,\alpha] = \\ &= (\alpha \wedge \beta/\gamma)^4.\end{aligned}$$

3513 — Dada a função $z = x e^{y + x \operatorname{sen} y}$, calcule: a) grad z, b) div grad z, c) rot grad z e d) Lap z.

R: a) $\operatorname{grad} z = (1 + x \operatorname{sen} y)\dfrac{z}{x} I + (1 + x \cos y)\, z J$.

b) $\operatorname{div} \operatorname{grad} z = e^{y + x \operatorname{sen} y} \operatorname{sen} y\,(2 + x \operatorname{sen} y - x^2) + x e^{y + x \operatorname{sen} y}(1 + x \cos y)^2$, c) rot grad z *é sempre igual a zero*, d) Lap z = div grad z.

3514 — Calcular $I = \displaystyle\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sqrt{(1-x)^3} + \sqrt{(1+x)^3}}$.

R: *Faça-se* $x = \cos 2t$ *e* $t = \pi/4 + z$. *Vem:*

$$I = \int_{-\pi/4}^{+\pi/4} \frac{\cos^2 z - \operatorname{sen}^2 z}{\cos z\,(\cos^2 z + 3 \operatorname{sen}^2 z)}\, dz \text{ e fazendo } \operatorname{sen} z = y$$

$$\begin{aligned}I &= \int_{-\sqrt{2}/2}^{+\sqrt{2}/2} \frac{1 - 2y^2}{(1-y^2)(1+2y^2)}\, dy = \\ &= 2\int_0^{+\sqrt{2}/2} \frac{1 - 2y^2}{(1-y^2)(1+2y^2)}\, dy = \\ &= 2\left[\frac{1}{6}\log\frac{1-y}{1+y} + \frac{2\sqrt{2}}{3}\operatorname{arctg}\sqrt{2}\, y\right]_0^{\sqrt{2}/2} = \\ &= \frac{1}{3}\log(3 - 2\sqrt{2}) + \frac{\sqrt{2}}{3}\pi.\end{aligned}$$

3515 — Calcule por aproximação o integral da função $\frac{1}{2+3x^2/4}$ entre -1 e $+1$, pela regra de SIMPSON, dividindo o intervalo em 6 partes. R:

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{2+3x^2/4} \approx \frac{2}{18}\left[\frac{4}{11}+\frac{4}{11}+2\left(\frac{12}{25}+\frac{12}{25}\right)+\right.$$
$$\left.+4\left(\frac{3}{7}+\frac{1}{2}+\frac{3}{7}\right)\right]=\frac{15.546}{17.325}.$$

3516 — Demonstre que

$$\int_a^b \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} = 2\int_0^{\pi/2} f(a\cos^2\theta + b\,\mathrm{sen}^2\theta)\,d\theta.$$

R:
$$\int_a^b \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} =$$
$$=\int_0^{\pi/2} \frac{f(a\cos^2\theta+b\,\mathrm{sen}^2\theta)\times 2(b-a)\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta\,d\theta}{\sqrt{(b-a)\,\mathrm{sen}^2\theta\,(b-a)\cos^2\theta}} =$$
$$=2\int_0^{\pi/2} f(a\cos^2\theta+b\,\mathrm{sen}^2\theta)\,d\theta.$$

3517 — Utilize o resultado anterior no cálculo dos integrais:

a) $I=\int_a^b \sqrt{\frac{b-x}{x-a}}\,x\,dx$ e

b) $I'=\int_a^b \sqrt{\frac{b^2-x^2}{x^2-a^2}}\,x\,dx.$

R: *Para* a) *é* $f(x)=x(b-x)$ e

$$I=2\int_0^{\pi/2} f(a\cos^2\theta+b\,\mathrm{sen}^2\theta)\,d\theta=\frac{b^2-3a^2+2ab}{8}\pi.$$

Para b) *faça-se* $x^2=y$. *Vem*

$$I'=\frac{1}{2}\int_{a^2}^{b^2}\sqrt{\frac{b^2-y}{y-a^2}}\,dy=\frac{1}{2}\int_{a^2}^{b^2}\frac{b^2-y}{\sqrt{(b^2-y)(y-a^2)}}\,dy=$$
$$=\int_0^{\pi/2}[b^2-(a^2\cos^2\theta+b^2\,\mathrm{sen}^2\theta)]\,d\theta=\frac{b^2-a^2}{4}\cdot\pi.$$

I. S. C. E. F. — ANÁLISE MATEMÁTICA — **Exame final — Outubro de 1951.**

3518 — Achar os máximos e mínimos da função

$$f(x)=\int_0^{\frac{x^2}{\sqrt{3}}} \mathrm{arctg}\,\frac{y}{x^2}\,dy.$$

R:
$$f'(x)=\int_0^{\frac{x^2}{\sqrt{3}}}\frac{-2yx}{x^4+y^2}\,dy+\frac{\pi x}{3\sqrt{3}}=\left(\frac{\pi}{3\sqrt{3}}-\log\frac{4}{3}\right)x$$

$f'(x)=0 \to x=0$ *e* $f''(0)=\frac{\pi}{3\sqrt{3}}-\log\frac{4}{3}>0$. *Trata-se pois de um mínimo.*

3519 — Seja A o ponto de encontro com OX da ordenada de um ponto P da curva C. A distância do ponto A à tangente em P é $\overline{AM}=a$. Supondo a constante, achar a equação da curva. R: *A equação é* $\frac{a}{y}=\frac{-1}{\sqrt{1+y'^2}}$ *resolúvel em* y *ou em* $y'=p$.

$$p=\frac{dy}{dx}=\pm\sqrt{\frac{y^2}{a^2}-1} \to x=\pm a\int\frac{dy}{\sqrt{y^2-a^2}}=$$
$$=\pm a\,\mathrm{arcosh}\,\frac{y}{a}+C$$

donde

$$y=a\cosh\frac{x-C}{a}.$$

3520 — Dada a curva definida por

$$\begin{cases} y^2+z^2=4 \\ \mathrm{sen}\,x=y/2\end{cases}$$

escrever as suas equações paramétricas em função do arco s e determinar as coordenadas do centro de curvatura no ponto $P(0,0,2)$. R:

$$s=\int_0^x\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\,dx=\int_0^x\sqrt{5}\,dx=\sqrt{5}\,x.$$

Logo $x=\frac{s}{\sqrt{5}}$ $\quad y=2\,\mathrm{sen}\,\frac{s}{\sqrt{5}}$ $\quad z^2=4\cos^2\frac{s}{\sqrt{5}}.$

As coordenadas do centro de curvatura são:

$$X=\rho^2\frac{d^2x}{ds^2}=0,\quad Y=\rho^2\frac{d^2y}{ds^2}=0$$
$$Z=2+\rho^2\frac{d^2z}{ds^2}=2-\left(\pm\frac{5}{2}\right).$$

Soluções dos n.os 3512 a 3520 de M. A. S. Madureira

I. S. C. E. F. — ANÁLISE INFINITESIMAL — **1.º Exame de frequência — 1952.**

3521 — Calcular $\int_0^\infty \frac{x^5\,dx}{(1+x^4)^2}$.

3522 — Calcular:

a) $\mathrm{grad}\,\frac{1}{r}\wedge\mathrm{grad}\,\frac{1}{r^3}$, *b)* $\mathrm{Lap}\,r^3$, *c)* $\mathrm{rot}\,r\alpha$, com

$$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2} \text{ e } \alpha=xI+xyJ+xyzK.$$

3523 — Calcular a derivada de:

$$F(a)=\int_0^\pi\frac{dx}{a-\mathrm{sen}\,x}$$

e deduzir o valor do integral

$$\int_0^\pi\frac{dx}{(2-\mathrm{sen}\,x)^2}.$$

I. S. C. E. F. — Análise Infinitesimal — 2.º Exame de frequência — 30-6-52.

3524 — Dada a curva

$$y^4 - y^2 + (x-a)^2 = 0$$

determinar: *a*) os máximos e mínimos; *b*) os pontos múltiplos; *c*) o raio de curvatura referente ao ponto $x=a \ \ y=1$; *d*) a envolvente da família de curvas de parâmetro a; *e*) a área compreendida entre o ramo de ordenadas positivas mais elevadas, o eixo dos XX e as rectas $x=-1/2$ e $x=1/2$ quando o parâmetro $a=0$; *f*) outros elementos complementares, e representar a curva na hipótese de ser $a=0$.

3525 — Calcular o integral triplo

$$\int\int\int_V z\,dx\,dy\,dz$$

sendo V o volume do sólido limitado pelo cilindro $(x-1)^2+y^2=1$, pela esfera $x^2+y^2+z^2=4$ (ramo superior) e pelo plano $x+y+z=2$.

3526 — Determinar as curvas para as quais o raio de curvatura é igual ao comprimento da normal.

I. S. C. E. F. — Análise Infinitesimal — Exame final — Novembro de 1951.

3527 — Determinar a envolvente da família de rectas $x+ay+3a^2+a^3=0$ (a é um parâmetro arbitrário). (Convém usar equações paramétricas).

3528 — Calcular os máximos e mínimos da função

$$z = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y + \operatorname{sen}(x+y)$$

3529 — Integrar a equação

$$x^2 y' = -x^2 y^2 + axy - a$$

sabendo que $y = \dfrac{1}{x}$ é um integral particular.

I. S. T. — Cálculo — 1.º exame de frequência — Fevereiro de 1952.

3530 — a) Diga que propriedades caracterizam o vector $\alpha(P)$ e o escalar $u(P)$, quando for

1) $\quad \operatorname{rot}\alpha = \operatorname{grad} u \qquad P(x,y,z)$

b) — Mostre que $\Delta\alpha$ é um gradiente. c) Mostre que $(\operatorname{grad} u)^2$ é uma divergência. d) Mostre que α é harmónico se for um rotor.

3531 — Veja se se verifica a condição necessária e suficiente para que o polinómio de matrizes

$$P(A) = 2A^3 + 3A^2 + E \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

tenha a raiz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3532 — Veja que é aplicável ao integral

$$F(a) = \int_{\frac{1}{2}}^{a^2} a^x (x^2+a^2)\,dx \qquad \left(a^2 > \frac{1}{2}\right)$$

a regra da derivação paramétrica e verifique, sobre a derivada, se $F(a)$ é máxima ou mínima para $a=1$.

3533 — Classifique os seguintes conjuntos como espaços algébricos, justificando a classificação:

1.º O conjunto de todas as matrizes quadradas de ordem n, de elementos numéricos.

2.º O conjunto de todas as matrizes unitárias de ordem n, de elementos numéricos.

3.º O conjunto de todas as matrizes hermíticas de ordem n, de elementos numéricos.

4.º O conjunto dos polinómios reais de variável real.

5.º O conjunto das funções reais de variável real.

I. S. T. — Cálculo — 2.º exame de frequência — 23-6-1952.

3534 — Determinar as superfícies tais que todas as suas normais encontram a recta $X=0$, $Y=Z$.

3535 — Verifique que $y^2 = ax^2$ é um integral da equação $p^2x - 2py + ax = 0$; e diga se é *particular* ou *singular*. De quantas maneiras pode fazê-lo?

3536 — É dado o sistema

$$1) \qquad \begin{cases} f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n, y_1, y_2, \cdots, y_n) = 0 \\ f_2 = 0 \\ \cdots\cdots \\ f_n = 0 \end{cases}$$

que tem uma solução no ponto $(a_1, a_2, \cdots a_n, b_1, b_2, \cdots b_n)$. Supõe-se que, numa vizinhança desse ponto, as derivadas parciais $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_k}$ e $\dfrac{\partial f_i}{\partial y_k}$ $(i,k=1,2\cdots n)$ existem e são contínuas, sendo diferente de zero o Jacobiano $\dfrac{\partial(f_1 f_2 \cdots f_n)}{\partial(y_1 y_2 \cdots y_n)}$.

Como se sabe, o sistema 1) define nesse caso, $y_1, y_2, \cdots y_n$ como funções implícitas de $x_1, x_2, \cdots x_n$, contínuas e admitindo derivadas.

Diga quando é possível afirmar que essas funções $y_1, y_2, \cdots y_n$ *são independentes*, sem as tornar explícitas.

3537 — Averiguar que a função

$$z = \log \frac{xy^2}{(x-1)^2(y-2)}$$

não tem máximos nem mínimos.

MECÂNICA RACIONAL

I. S. T. — Mecânica Racional — 1.º exame de frequência, 7-II-52.

3538 — Achar as geodésicas da superfície: $x=u$, $y=2v$, $z=u^2+1$.

3539 — Resolver a equação integral

$$\varphi(s)-\mu\int_0^1 t(1+s)\,\varphi(t)\,dt=s\,.$$

3540 — Examine as condições para que seja indeterminada a função $z=z(x,y)$ que torna estacionário o integral duplo $\iint_A f(x,y,z,p,q)\,dx\,dy$, e cujos valores são conhecidos sobre o contorno da área A. Diga qual é o significado geométrico dessa indeterminação. Verifique que essa indeterminação não pode dar-se quando a função $z(x,y)$ for harmónica em A.

3541 — Mostre que o teorema da inversão do cálculo diferencial $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}\right.$ quando forem contínuas$\left.\right)$ nem sempre subsiste para as segundas derivadas covariantes dum vector (X_i), em cálculo absoluto.

3542 — Numa variedade a três dimensões, escreva a expressão do produto mixto de três vectores, em coordenadas gerais. Será um trivector?

I. S. T. — Mecânica Racional — 2.º exame de frequência — 9 de Julho de 1952.

3543 — Um ponto pesado move-se, sem atrito, sobre o paraboloide $z=\frac{1}{2}(ax^2+by^2)$, sendo o semi-eixo OZ positivo dirigido segundo a vertical ascendente.

Mostre que, na origem dos eixos, que é uma posição de equilíbrio, esse equilíbrio é *estável* quando a e b forem ambos positivos. R: *As equações do movimento são*

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-\lambda ax,\quad m\frac{d^2y}{dt^2}=-\lambda by,\quad m\frac{d^2z}{dt^2}=\lambda-mg,$$

e as condições de estacionaridade da função de forças $-\lambda ax=0$, $\lambda by=0$, $\lambda=mg$; *então a função de forças é máxima no ponto* $(0,0,0)$ *se* $a, b>0$ *e mínima no caso contrário.*

3544 — Mostre que, se o movimento dum fluido perfeito é rotacional e o vector turbilhão Ω é harmónico, o movimento fluido cuja velocidade é $V_1=\mathrm{rot}\,\Omega$ é um movimento irrotacional. Sendo $V=uI+vJ+\omega K$, com $u=y^2+z^2$, $v=x^2+z^2$ e $\omega=x^2+y^2$, a velocidade do primeiro movimento, verifique que Ω é harmónico e determine o potencial das velocidades do segundo movimento. R: *Se* $\Omega=\frac{1}{2}\mathrm{rot}\,V\neq 0$ *e* $\Delta\Omega=0$ *é* $V_1=\mathrm{rot}\,\Omega=\mathrm{grad\,div}\,V$ *e* $\mathrm{rot}\,V_1=0$. *Aplicação: Se* $\Omega=\frac{1}{2}\mathrm{rot}\,V=(y-z)I+(z-x)J+(x-y)K$, $\Delta\Omega=0$, $V_1=\mathrm{rot}\,\Omega=-2(I+J+K)=-\mathrm{grad}\,U$ *e* $U=2(x+y+z)$.

3545 — Sendo $P(x,y,z)$ um ponto qualquer do espaço tridimensional, são dados dois campos $F(P)$ e $\alpha(P)$, dos quais o primeiro é o momento do segundo em relação á origem dos eixos coordenados. *a*) Mostre que o campo $F(P)$ não é conservativo quando $\alpha(P)$ é constante. *b*) Fazendo $\alpha(P)=XI+YJ+ZK$ e sendo X independente de x, Y independente de y e Z independente de z, procure determinar $\alpha(P)$ de modo que $F(P)$ seja conservativo. R: *Se* $\alpha(P)=AI+BJ+CK$, $F(P)=(yC-zB)I+(zA-xC)J+(xB-yA)K$ *e* $\mathrm{rot}\,F=2(-AI+BJ-CK)\neq 0$.

b) *Se* $\alpha(P)=XI+YJ+ZK$ *devemos ter*

$$\begin{vmatrix} I & J & K \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ (yZ-zY) & (zX-xZ) & (xY-yX)\end{vmatrix}=0$$

ou $2X+y\frac{\partial X}{\partial y}+z\frac{\partial X}{\partial z}=0\cdots$ *relação satisfeita por* $X=\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}$. *Então*

$$\alpha(P)=\left(\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}\right)I+\left(\frac{1}{z^2}+\frac{1}{x^2}\right)J+\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right)K.$$

3546 — *a*) Verifique no caso duma translacção paralela a Oy_1, que a transformação de Lorentz deixa invariante a forma

$$1)\qquad dy^2=dy_0^2-dy_1^2-dy_2^2-dy_3^2\,.$$

b) Mudando os sinais de alguns termos, quais são as formas resultantes de 1) que ficam invariantes para a mesma transformação de Lorentz? *c*) Caracterize as matrizes de Lorentz e verifique que elas formam um grupo.

Soluções dos n.os 3543 a 3545 de J. Gaspar Teixeira.

I. S. T. — Mecânica Racional — Exame final (teórico) — Outubro de 1951.

3547 — É dado um sistema holónomo conservativo e de ligações independentes do tempo, sendo F_i a força activa aplicada ao ponto $P_i(x_i, y_i, z_i)$ $(i = 1, 2 \cdots n)$. Supõe-se que a função de forças U é homogénea de grau -2, em relação às coordenadas dos pontos P_i.

Deduzir do teorema de Cerrutti para os viriais, $\frac{d^2 I}{d t^2} = V + 2T$, que o momento de inércia I, em relação à origem dos eixos, é uma função quadrática do tempo:

$$I = a t^2 + b t + c \qquad (a, b, c \text{ constantes}).$$

3548 — É dada uma força $F(X, Y, Z)$ função apenas das coordenadas do ponto $P(x, y, z)$ sobre o qual actua. Mostrar que, para que exista uma superfície fixa sobre a qual o ponto P está em equilíbrio em todas as posições, é necessário e suficiente que $X dx + Y dy + Z dz = 0$ seja completamente integrável.

3549 — Seja ω o vector velocidade angular, no movimento dum sólido com um ponto fixo. Mostrar que a aceleração dum ponto qualquer do sólido é a soma de dois vectores: 1.º A velocidade que teria o ponto se a velocidade angular fosse $\omega' = \frac{d\omega}{dt}$; 2.º A aceleração que teria o ponto se a velocidade angular ω fosse constante.

I. S. T. — Mecânica Racional — Exame final (prático) — Outubro de 1951.

3550 — Um ponto $M(x, y)$ é obrigado a mover-se, sem atrito, sobre a parábola $y^2 = 2px$, e é atraído pelo ponto $A(p, p/2)$ do plano da curva com uma força F, cuja grandeza é função só da distância $\overline{MA} = r$. Mostrar que há uma posição de equilíbrio que é independente da grandeza da força.

3551 — *a*) Mostre que o cóne de revolução homogéneo, limitado pela superfície cónica $x^2 + y^2 = 5z^2$ e de altura $h = 3$, tem pontos focais de inércia. *b*) Determine esses pontos e verifique se as respectivas esferas de inércia se intersectam. (Eixos rectangulares).

3552 — Dado o campo de vectores

$$\vec{\alpha} \left| \begin{array}{l} X = a + bx + cy + dz \\ Y = a_1 + b_1 x + c_1 y + d_1 z \\ Z = a_2 + b_2 x + c_2 y + + d_2 z \end{array} \right.$$

onde a_i, b_i, c_i, d_i são constantes, será possível determinar essas constantes de modo tal que o campo $\vec{\alpha}$ seja um campo de momentos? Discussão.

PROBLEMAS

Problemas propostos ao concurso

Secção Elementar:

3553 — Se na fracção $\frac{16}{64}$ cortarmos no numerador e no denominador o número 6, obtemos, por meio de uma operação incorrecta, um resultado correcto.

Determinar um par de números de dois algarismos (no sistema de base 8), gosando da mesma propriedade.

3554 — Seja $[ABCD]$ um trapésio rectângulo de base paralelos $\overline{AB} = a$ e $\overline{CD} = 3a$. Seja $\overline{AD} = a$ o lado perpendicular às bases e consideremos um ponto M sobre o lado $\overline{BC}$. Sejam V_1 e V_2 os volumes dos sólidos gerados pela rotação, de amplitude 2π, do quadrilátero convexo $[ABMD]$ em em torno, respectivamente, de $\overline{AB}$ e de $\overline{AD}$. Determinar a posição de M de modo que $\frac{V_1}{V_2} = \frac{13}{22}$.

Secção Média:

3555 — Representemos por $I(x)$ o maior inteiro contido em x e por $M(x)$ a mantissa de x, isto é $M(x) = x - I(x)$. Demonstrar que

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x} + \cdots + \frac{1}{x}\right) = 1$$

se o número de parcelas que figura dentro do parentesis for $I(x)$.

3556 — Estudar as descontinuidades da função definida no intervalo $(-\pi, +\pi)$ pela expressão $y = tg^2 \frac{1}{x}$.

Secção Superior:

3557 — A velocidade dum ponto P tem duas componentes, $\vec{v}_1, \vec{v}_2$, de igual módulo, v; a primeira é constante, a segunda perpendicular, em cada instante, ao vector de posição de P, em relação a uma origem O. Estudar o movimento de P.

3558 — Sejam $r_1, r_2 \cdots r_n$ os zeros *simples* do polinómio $f(z)$ de grau n; provar que $\sum_{i=1}^{n} \frac{r_i}{f'(r_i)} = 0$.