MATEMÁTICAS SUPERIORES

PONTOS DE EXAMES DE FREQUÊNCIA E FINAIS

MATEMÁTICAS GERAIS E COMPLEMENTOS DE ÁLGEBRA

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — Exame final — 4 de Outubro de 1952.

I

3622 — Dada a função $y=(x-1)\,e^{\frac{1}{x-1}}$ para $x\neq 1$ e $y=0$ para $x=1$, estude a sua continuidade em $x=1$. Determine os seus extremos e a equação da tangente à curva no infinito. R: *Pondo* $x=1-h$ *vem* $y(1-h)=-h\cdot e^{-\frac{1}{h}}$ *donde* $y(1-0)=0$; *pondo* $x=1+h$ *vem* $y(1+h)=he^{\frac{1}{h}}=\frac{e^{1/h}}{1/h}$ *donde* $y(1+0)=$ $=\infty$. *A função é descontinua no ponto* $x=1$, *mas continua à esquerda; a descontinuidade é de primeira espécie e a oscilação é visivelmente igual a* 1.

A derivada $y'=e^{\frac{1}{x-1}}\cdot\frac{x-2}{x-1}$ *é negativa com* x *no intervalo aberto* (1,2) *e positiva fora do intervalo fechado* (1,2). *Portanto função crescente em* $(-\infty,1)$, *decrescente em* (1,2) *e crescente em* $(2,\infty)$. *Há um mínimo em* $x=2$ *de valor* e.

A equação da tangente no ponto $M(x,y)$ *pode escrever-se:*

$$Y=\left[e^{\frac{1}{x-1}}\cdot\frac{x-2}{x-1}\right]X+\left[y-x\frac{x-2}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}\right]$$

e, fazendo com que M *descreva qualquer dos ramos infinitos que a curva possui no 1.º e 3.º quadrantes obtemos como posição limite daquela recta* $Y=X$.

II

3623 — Desenvolva em série de potências de $\frac{1}{x}$ a seguinte função racional $f(x)=\frac{1}{x^2-1}$ e determine o respectivo intervalo de convergência. R: *Pondo* $z=\frac{1}{x}$ *vem* $\frac{z^2}{1-z^2}=z^2(1+z^2+z^4+\cdots+z^{2n}+\cdots)=$ $=\sum_0^\infty z^{2n+2}$ *e então teremos* $\frac{1}{x^2-1}=\sum_0^\infty\frac{1}{x^{2n+2}}$, *válido para* $|z|=\frac{1}{|x|}<1$ *ou* $|x|>1$.

III

3624 — Defina determinante característico e, dado o sistema

$$\begin{cases} x-y+z=3\\ 2x-3y-3z=0\\ 3x-y-4z=4\\ ax+by-9z=-2\\ ax+3by+5z=8\end{cases}$$

calcule a e b de forma que este sistema seja compatível.

Determine a solução do sistema. R: *Tomemos a matriz dos coeficientes*

$$\left\|\begin{matrix}1 & -1 & 1\\ 2 & -3 & -3\\ 3 & -1 & -4\\ a & b & -9\\ a & 3b & 5\end{matrix}\right\|$$

Chama-se determinante principal a um qualquer determinante de ordem máxima, não nulo, tirado desta matriz

$$\Delta_p=\begin{vmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & -3 & -3\\ 3 & -1 & -4\end{vmatrix}=17$$

São determinantes característicos aqueles que se obtem de Δ_p *orlando com os coeficientes duma equação não principal, dispostos em linha, e os termos independentes, dispostos em coluna.*

$$\Delta C_1=\begin{vmatrix}1 & -1 & 1 & 3\\ 2 & -3 & -3 & 0\\ 3 & -1 & -4 & 4\\ a & b & -9 & -2\end{vmatrix}=51a+17b-119$$

$$\Delta C_2=\begin{vmatrix}1 & -1 & 1 & 3\\ 2 & -3 & -3 & 0\\ 3 & -1 & -4 & 4\\ a & 3b & 5 & 8\end{vmatrix}=51a+51b-51$$

Para que as equações sejam compatíveis deverão ser nulos os característicos

$$\begin{cases}3a+b-4=0\\ a+b-1=0\end{cases}\quad\text{ou}\quad\begin{cases}b=-2\\ a=3\end{cases}$$

A solução determina-se com a regra de Cramer

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & -3 \\ 4 & -1 & -4 \end{vmatrix}}{17} = 3$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \\ 3 & 4 & -4 \end{vmatrix}}{17} = 1 \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix}}{17} = 1$$

Enunciados e solução dos n.os 3622 a 3624 de J. R. Albuquerque

I. S. T. — Matemáticas Gerais — 1.º exame de frequência ordinário — 13 de Março de 1953.

I

3625 — Calcular:

$$\lim_{x=0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$$

3626 — Estudar e representar gràficamente a função:

$$y = \cos (3 \cdot \text{arc sen}\, x)$$

3627 — A função

$$w = \frac{a + bz}{c + dz}$$

toma os valores

$$-\frac{i}{2}\,;\frac{3-4i}{5}\,;-2i$$

respectivamente, para $z=0$, $z=1$ e $z=\infty$.

Mostrar que o afixo de $w=u+iv$ descreve a circunferência de raio 1, com centro na origem dos eixos $(u^2+v^2=1)$, quando o afixo de $z=x+iy$ descreve a mesma circunferência $(x^2+y^2=1)$.

II

3628 — Estude a representação geométrica da potenciação e da radiciação de números complexos.

Averigue em que condições o afixo da potência de expoente n dum número complexo poderá coincidir com o afixo de uma das determinações da raiz de índice n do mesmo complexo.

3629 — Estabeleça os conceitos de limites e de derivadas laterais. Considere as duas funções

$$y = \frac{|x|}{x} \quad \text{e} \quad y = |x|$$

no intervalo $(-a, a)$. Ser-lhes-ão, nesse intervalo, aplicáveis, respectivamente, os teoremas de Cauchy e de Rolle? Justifique.

3630 — Defina função composta, de uma só variável final, e deduza a regra de derivação correspondente.

Considere a função $z=f(u,v)$, com

$$\begin{cases} u = g(x, y) \\ v = h(x, y) \end{cases}$$

e, por analogia, deduza as regras de derivação de z em ordem a x e a y.

I. S. T. — Matemáticas Gerais — 1.º exame de frequência extraordinário — 14 de Março de 1953.

I

3631 — Determinar a ordem do infinitésimo $y=1-\cos x - x^2/2$ em relação a x.

3632 — Estudar e representar gràficamente a função: $y = \dfrac{a^2}{x} + \dfrac{b^2}{a-x}$ $(a > b > 0)$.

3633 — Dada a função $w = \dfrac{z+i}{iz+1}$ determine os pontos (x, y) para os quais ela toma, respectivamente, valores reais e valores imaginários puros.

Qual é o afixo de z cujo transformado é a origem dos eixos no plano dos uv? $(w=u+iv;\ z=x+iy)$.

II

3634 — Defina representação conforme e relacione este conceito com o de analiticidade de uma função.

Verifique que a função $w = \text{sen}\, z$ é analítica e calcule a sua derivada.

Sendo $z=x+iy$, determine as curvas transformadas dos eixos dos xx e dos yy.

3635 — Diga o que entende por função monotónica num intervalo e se é sempre possível a sua inversão.

Verifique, pelo teorema de Lagrange, que se uma função tem derivada de sinal constante em todos os pontos de um intervalo, então ela é monotónica nesse intervalo.

3636 — Estabeleça o conceito de derivada para uma função de duas variáveis.

Como aplicação, considere uma função $z=f(u)$, onde $u=x+g(y)$, e verifique que, se f e g forem duas funções deriváveis, se tem:

$$\frac{\partial z}{\delta x} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

Enunciados dos n.os 3625 a 3636 de J. H. Arandes.

I. S. T. — Matemáticas Gerais — Exame ordinário — 13 de Março de 1953 — Parte teórica.

3637 — Considere o grupo R dos números inteiros, no qual a operação de grupo é a soma ordinária. Considere o grupo $\mathfrak{C}$ dos complexos da forma $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^n \cdot (1+i)^n$, onde n é inteiro, e no qual a operação do grupo é o produto. Dado n, estude a correspondência $n \to \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^n \cdot (1+i)^n$. Diga se se trata dum homomorfismo. No caso afirmativo, diga qual é o invariante $\mathfrak{N}$, em R, tal que $\mathfrak{C} \simeq R/\mathfrak{N}$.

3638 — Considere os dois vectores que ligam a origem das coordenadas aos dois pontos $(4, -2, -4)$ e $(6, -3, 1)$. Mostre que os dois vectores são linearmente independentes.

3639 — Suponha que a sucessão $z_1, z_2, \cdots, z_n, \cdots$ de números reais tende para um limite z_0. Mostre que a sucessão dos seus valores absolutos tende para o limite $|z_0|$.

3640 — Tome o plano OAB, cujo traço OA, no plano Oxy, é a bissectriz do ângulo recto xOy; depois, tome a bissectriz OB do ângulo recto AOz. Quais são as coordenadas do ponto do infinito da recta OB?

3641 — Demonstre a continuidade, para todo o valor de x, da função $\operatorname{sen}(2x+5)$.

3642 — Considere um conjunto $\mathfrak{C}$ de números limitado inferiormente. O número α, limite inferior principal de $\mathfrak{C}$, define-se como limite inferior dos números η, tais que há uma infinidade de números de $\mathfrak{C}$ inferiores a η. Demonstre que α também se pode definir como o limite superior dos números ξ, tais que há apenas um número finito de números de $\mathfrak{C}$ inferiores a ξ.

I. S. T. — Matemáticas Gerais — **Exame extraordinário — 19 de Março de 1953 — Parte teórica.**

3643 — $\mathfrak{G}$ é um grupo e $\mathfrak{G}'_1$ e $\mathfrak{G}'_1$ são dois sub-grupos tais que $\mathfrak{G}'_1$ é invariante em em $\mathfrak{G}_1$. Seja $\mathfrak{H}$ um sub grupo de $\mathfrak{G}$. Prove:

a) $\mathfrak{H}'_1 = \mathfrak{G}'_1 \cap \mathfrak{H}$ é invariante em $\mathfrak{H}_1 = \mathfrak{G}_1 \cap \mathfrak{H}$;

b) $\mathfrak{H}_1/\mathfrak{H}'_1$ é isomorfo a um sub-grupo de $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}'_2$.

3644 — Tome a sucessão de imaginários $z_1, z_2, \cdots, z_n, \cdots$. Diz-se que ela tende para um limite z_0 se, dado $\varepsilon > 0$, existir N tal que

$$|z_n - z_0| < \varepsilon, \text{ quando } n > N.$$

Suponha $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ números reais tendendo para a_0; depois suponha $b_1, b_2, \cdots, b_n, \cdots$ números reais tendendo para b_0. Demonstre que a sucessão $a_1 + ib_1,\ a_2 + ib_2, \cdots,\ a_n + ib_n, \cdots$ tende para o limite $a_0 + ib_0$.

3645 — Tome no plano $y = 1$ a recta R que é bissectriz do ângulo PAQ, inclinada de $45°$ sobre o plano xy. Diga quais são as coordenadas do seu ponto no infinito.

3646 — Verifique que a função $f(x, y) = \dfrac{y^2 x^2}{x^2 + y^3}$ é uma função contínua de x, quando o ponto (x, y) se aproxima do ponto $(0, 0)$, percorrendo uma recta que passa pela origem. A continuidade subsiste, ainda que o ponto (x, y) se mova sobre o eixo Ox, continuando a aproximar-se da origem das coordenadas.

3647 — Considere um conjunto C de números, limitado, superiormente. O número $\bar{\alpha}$ limite superior preciso de Cauchy (limite principal de C) define-se como o limite superior dos números η, tais que há uma infinidade de números de C superiores a η. Demonstre que $\bar{\alpha}$ também pode ser definido como o limite inferior (ínfimo) dos números ξ, tais que há apenas um número finito de números de C superiores a ξ.

F. C. L. — Complementos de Álgebra — **26 de Fevereiro de 1953.**

3648 — Suponha $\{\mathfrak{G} = \mathfrak{G} \supseteqq \mathfrak{G}_2 \supseteqq \cdots \supseteqq \mathfrak{G}_i \supseteqq \mathfrak{G}_{i+1} = (1)\}$ uma série normal de $\mathfrak{G}$. Se $\mathfrak{H}$ é um sub-grupo de $\mathfrak{G}$, mostre que $\{\mathfrak{H} = \mathfrak{H} \cap \mathfrak{G}_1 \supseteqq \mathfrak{H} \cap \mathfrak{G}_2 \supseteqq \cdots \supseteqq \mathfrak{H} \cap \mathfrak{G}_i \supseteqq \mathfrak{H} \cap \mathfrak{G}_{i+1} = (1)\}$ é uma série normal de $\mathfrak{H}$. Em seguida, prove que os factores da segunda série normal são isomorfos a sub-grupos dos factores da 1.ª série.

3649 — Suponha $\mathfrak{S}$ um anel com elemento um. Considere $\mathfrak{S}$ como um grupo abeliano com os seguintes operadores: os elementos de $\mathfrak{S}$, aplicados à direita de $\mathfrak{S}$. Veja como pode definir os endomorfirmos — $\mathfrak{S}$, de $\mathfrak{S}$.

3650 — $\mathfrak{S}$ é um anel com elemento um, gerado pelos seus ideais direitos simples. Prove que $\mathfrak{S}$ é uma soma directa dum número finito de ideais direitos simples.

Enunciados dos n.os 3637 a 3650 de A. Almeida Costa

N. R. — Por falta de espaço só no próximo número serão publicadas as soluções dos n.os 3625 a 3636, bem como os enunciados e soluções de pontos de outras disciplinas. Deste facto pedimos desculpa aos nossos Leitores e Colaboradores.

A Redacção

PROBLEMAS

Problemas propostos ao concurso

Secção Elementar

3651 — Se no $\Delta[A\,B\,C]$, $\sphericalangle A = 2 \cdot \sphericalangle B$, então $a^2 = b\,(b + c)$.

3652 — Resolver o sistema:

$$\begin{cases} 4x^4y^2 + 16x^3y + 16x^2 = 4y^2 - 4xy^3 + x^2y^4 + 3x^2y^2 \\ 2x^2y + 4x + 2y - xy^2 = xy \end{cases}$$

Secção Média

3653 — Seja B o ponto, distinto da origem, em que a recta $y = x\,tg\,\alpha$ encontra a curva $x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$; e seja A o ponto, também distinto da origem, onde o eixo dos xx encontra a mesma curva. Mostre que $\overline{AB} = 10\ sen\ \alpha$.