Alguns teoremas sobre limites de sucessões

por M. A. Fernandes Costa

A *Gazeta de Matemática*, «jornal dos estudantes das escolas superiores», prestará a estes um bom serviço sempre que possa facilitar-lhes o estudo de algum capítulo importante das Matemáticas.

Eis por que julgamos de interesse reunir aqui alguns resultados da teoria dos limites, fundamental na Análise moderna. Basta recordar que a teoria das sucessões está na base da doutrina das séries e que estas surgem a cada passo nas matemáticas aplicadas.

Neste artigo encontram-se, além de observações várias sobre técnica de cálculo, alguns teoremas que, embora pouco divulgados, são extremamente úteis e fáceis de apreender.

1. Sucessões monótonas.

Começamos por dar vários exemplos de como se pode tirar partido do conhecido

TEOREMA I — *É convergente toda a sucessão monótona limitada (superiormente quando crescente, inferiormente quando decrescente); uma sucessão monótona não limitada tende para o infinito* (1).

Exemplo 1.

A sucessão de t. g. $\sqrt[n]{a}\ (a>1)$ é monótona decrescente e $\sqrt[n]{a}>1$ para todos os valores de n; por consequência $\sqrt[n]{a}\to l\geqslant 1$. Mas, se fosse $l>1$, ter-se-ia $a>l^n$ para todos os valores de n, o que é absurdo, visto que $l^n\to\infty$. Deverá pois ser $l=1$. De modo análogo se provaria que $\sqrt[n]{a}\to 1$ com $0<a<1$.

Exemplo 2.

Considere-se a sucessão em que cada termo está ligado ao anterior pela relação

$$x_{n+1}=\sqrt{k+x_n}; \qquad (k>0)$$

designando por ξ a raíz positiva da equação $x^2=x+k$ e supondo $x_1<\xi$, tem-se $x_1^2-x_1-k<0$, donde $x_2^2=x_1+k>x_1^2$ e $x_2=\sqrt{x_1+k}<\sqrt{\xi+k}=\xi$.

Anàlogamente, se for $x_n<\xi$, $x_{n+1}^2-x_n^2=-(x_n^2-x_n-k)>0$ e $x_{n+1}=\sqrt{k+x_n}<\sqrt{k+\xi}=\xi$; é portanto $x_{n+1}>x_n$ e $x_{n+1}<\xi$, isto é, a sucessão é crescente e limitada. E, por ser $\lim x_{n+1}=\lim x_n$, a sucessão converge para $\xi=(1+\sqrt{4k+1})/2$.

Semelhantemente se provaria que, quando $x_1>\xi$, a sucessão é decrescente e tende também para ξ.

Por exemplo, $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots}}}=2$, visto ser aqui $x_1=\sqrt{2}$ e $k=2$.

Exemplo 3.

Seja a sucessão definida pela lei de recorrência

$y_{n+1}=a+by_n/(ay_n+b) \qquad (y_1=a>0\,,\,b>0)$.

Mostremos que ela é crescente. De facto, a diferença $y_{n+1}-y_n=-\dfrac{a}{ay_n+b}(y_n^2-ay_n-b)$ tem sinal contrário ao do trinómio entre parênteses. Ora, feitos os cálculos, verifica-se que $y_n^2-ay_n-b=\left(\dfrac{b}{ay_n+b}\right)^2(y_{n-1}^2-ay_{n-1}-b)$; aquele trinómio tem pois o sinal de $y_1^2-ay_1-b=-b<0$.

A sucessão será portanto convergente ou tenderá para $+\infty$. Se existir limite finito y, este será forçosamente raíz da equação $y=a+by/(ay+b)$. Como esta admite soluções reais, a raíz positiva $\dfrac{1}{2}(a+\sqrt{a^2+4ab})$ é o limite da sucessão dada.

Exemplo 4.

Sendo $a>0$, $b>0$ e fazendo

$$\begin{cases} a_1=\dfrac{1}{2}(a+b) \\ b_1=\sqrt{ab} \end{cases} \text{ e, em geral, } \begin{cases} a_n=\dfrac{1}{2}(a_{n-1}+b_{n-1}) \\ b_n=\sqrt{a_{n-1}\,b_{n-1}}\,, \end{cases}$$

mostrar que a_n e b_n tendem monòtonamente para um mesmo limite (*média aritmo-geométrica* de a e b).

De $a_n-b_n=\dfrac{1}{2}(a_{n-1}+b_{n-1})-\sqrt{a_{n-1}\,b_{n-1}}=\dfrac{1}{2}(\sqrt{a_{n-1}}-\sqrt{b_{n-1}})^2>0$ deduz-se $a_n>b_n$. Ora é fácil provar que, sendo $u<v$, se tem $u<\dfrac{1}{2}(u+v)<v$ e $u<\sqrt{uv}<v$. Daqui resulta $\dfrac{1}{2}(a_{n-1}+b_{n-1})<a_{n-1}$ e

(1) Para a demonstração veja-se, por ex., J. V. GONÇALVES, *Curso de Álgebra Superior*, 2.ª ed. vol. I, pg. 56.

$b_{n-1} < \sqrt{a_{n-1}\, b_{n-1}}$, ou seja $a_n < a_{n-1}$ e $b_n > b_{n-1}$. Quer dizer, a_n é decrescente e b_n crescente; e, por ser $a_n > b_n$, a primeira sucessão é limitada inferiormente e a segunda limitada superiormente. Logo, ambas são convergentes: $a_n \to \alpha$, $b_n \to \beta$, satisfazendo α e β às condições $\alpha = \frac{1}{2}(\alpha+\beta)$, $\beta = \sqrt{\alpha\beta}$, de qualquer das quais se deduz ser $\alpha = \beta$.

Dão-se a seguir alguns teoremas que constituem útil complemento do teorema I.

TEOREMA II — *Se, para* $n \geqslant n_0$, *for* $u_n > 0$ *e* $u_{n+1} \geqslant \lambda\, u_n$ $(\lambda > 1)$, *então* $u_n \to +\infty$.

Com efeito,

$$u_n \geqslant \lambda\, u_{n-1} \geqslant \lambda^2\, u_{n-2} \geqslant \cdots \geqslant \lambda^{n-n_0}\, u_{n_0},$$

e $\lambda^{n-n_0} \to +\infty$.

COROLÁRIO — *Sendo* $u_n > 0$ *e* $\lim u_{n+1} / u_n = l > 1$, $u_n \to +\infty$.

Porque, a partir de certa ordem, $u_{n+1} / u_n > l - \varepsilon > 1$.

TEOREMA III — *Sendo, para* $n \geqslant n_0$, $|u_{n+1}| \leqslant \mu\, |u_n|$ $(0 < \mu < 1)$, *então* $u_n \to 0$.

Demonstração análoga à anterior.

COROLÁRIO — *Se* $\lim u_{n+1} / u_n = l$, *com* $-1 < l < 1$, *então* $u_n \to 0$.

Exemplo 5.

Considere-se a sucessão $u_n = n^r x^n$ $(x \neq 0)$, onde r é um inteiro qualquer.

Como $u_{n+1} / u_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^r x \to x$, $u_n \to +\infty$ se $x > 1$ e $u_n \to 0$ se $0 < x < 1$. Se $x = 1$, $u_n \to +\infty$. Supondo agora $x < 0$, idêntico critério mostra que $|u_n| = n^r |x|^n$ tende para $+\infty$ se $|x| \geqslant 1$ e para zero se $|x| < 1$. A sucessão é pois oscilante infinita se $x \leqslant -1$ e converge para zero se $-1 < x < 0$.

Exemplo 6.

Para a sucessão $u_n = x^n / n!$ tem-se $u_{n+1} / u_n = x / (n+1) \to 0$, e o corol. do teor. III mostra logo que $u_n \to 0$ qualquer que seja x.

Exemplo 7.

$u_n = \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}\, x^n$. Se m for inteiro, $u_n = 0$ para $n > m$ e $\lim u_n = 0$. Não sendo m inteiro, $u_{n+1} / u_n = x(m-n) / (n+1) \to -x$ e portanto é ainda $\lim u_n = 0$ se $|x| < 1$.

2. Sucessão enquadrada.

Recorre-se frequentemente ao teorema seguinte para esclarecer a natureza duma sucessão:

TEOREMA IV — *Se* v_n *e* w_n *tenderem para o mesmo limite (finito, ou* $+\infty$ *ou* $-\infty$*) e, de certa ordem em diante,* u_n *estiver compreendido entre* v_n *e* w_n, *tenderá* u_n *para o mesmo limite.*

Com efeito, convergindo v_n e w_n para o mesmo limite v, ter-se-á $|v_n - v| < \delta$ para $n > p$ e $|w_n - v| < \delta$ para $n > q$; e, se u_n estiver compreendido entre v_n e w_n para $n > m$, é óbvio que também $|u_n - v| < \delta$ a partir da maior das ordens m, p e q. A demonstração é análoga se v_n e w_n tendem conjuntamente para $+\infty$ ou $-\infty$. No primeiro caso, por ex., virá $v_n > \Delta$ e $w_n > \Delta$ para $n > p$ e $n > q$, respectivamente; e se u_n se achar enquadrado por v_n e w_n a partir da ordem m, será $u_n > \Delta$ quando n exceda a maior daquelas ordens.

Exemplo 8.

O resultado anterior é imediatamente aplicável à sucessão de t. g.

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+2n+1}},$$

pois $(2n+1) / \sqrt{n^2+2n+1} < u_n < (2n+1) / \sqrt{n^2+1}$; e cada uma das sucessões entre as quais u_n fica enquadrada tende para 2.

Exemplo 9.

$$v_n = \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} + \frac{1}{\sqrt{(n+1)(n+2)}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{(2n-1)\,2n}}$$

Por ser $n / \sqrt{n(n+1)} > v_n > n / \sqrt{(2n-1)\,2n}$, tenderá v_n para um limite entre 1 e $\frac{1}{2}$. Com efeito, $n / \sqrt{n(n+1)} \to 1$, $n / \sqrt{(2n-1)\,2n} \to 1/2$ e v_n é decrescente, visto que

$$v_n - v_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} - \frac{1}{\sqrt{2n(2n+1)}} - \frac{1}{\sqrt{(2n+1)(2n+2)}} = \frac{\sqrt{4(2n+1)} - \sqrt{2n+2} - \sqrt{2n}}{\sqrt{(2n+2)(2n+1)\,2n}} > 0,$$

como fàcilmente se verifica.

Exemplo 10.

Seja a sucessão de t. g. $v_n = \sqrt[n]{u_n}$, onde $u_n \to a > 0$. Provemos que $v_n \to 1$. Com efeito, a partir de certa ordem, $a-\delta < u_n < a+\delta$, e portanto $\sqrt[n]{a-\delta} \lesseqgtr u_n \lesseqgtr \sqrt[n]{a+\delta}$, conforme $a \gtreqless 1$; ora, como se viu no Ex. 1, cada uma das sucessões enquadrantes tende para 1. Trata-se pois duma generalização do resultado $\sqrt[n]{a} \to 1$.

Exemplo 11.

$u_n = \dfrac{3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n+1)}{2\cdot 5\cdot 8\cdots(3n-1)} \to 0$ porque, para $n \geqslant 3$, $u_n < \dfrac{3}{2}\left(\dfrac{9}{10}\right)^{n-2}$ (pois $\dfrac{2n+1}{3n-1} < \dfrac{9}{10}$ para $n > 3$).

3. Alguns limites relacionados com o número e

É fundamental o seguinte teorema, que constitui a um tempo generalização dos conhecidos teoremas sobre o limite da potência e o limite da exponencial.

TEOREMA V — *Se* $u_n \to u > 0$ *e* $v_n \to v$, *então* $u_n^{v_n} \to u^v$.

Com efeito, $\lim u_n^{v_n} = \lim b^{\log_b u_n^{v_n}} = \lim b^{v_n \log_b v_n} = b^{v \log_b u} = b^{\log_b u^v} = u^v$.

Claro que, sendo u finito e $v_n \to \begin{cases}+\infty\\ -\infty\end{cases}$, $u_n^{v_n} \to \begin{cases}+\infty\\ 0\end{cases}$; se $u_n \to \infty$, também $u_n^{v_n} \to \infty$, desde que v_n não tenda para zero ou $-\infty$, etc.

Há, porém, muitos casos que o teorema não esclarece, como seja o de

$$\lim(1+1/n)^n = e = 2{,}71828\cdots$$

E sabido que $(1+1/n)^n$ se aproxima do seu limite por valores crescentes (¹), circunstância de que muitas vezes se pode lançar mão:

Exemplo 12.

$\sqrt[n]{n} \to 1$. Com efeito, a sucessão é decrescente, pois $\sqrt[n+1]{n+1} < \sqrt[n]{n}$ implica $(n+1)^n < n^{n+1}$, ou seja $(1+1/n)^n < n$; e esta condição verifica-se necessàriamente para $n \geqslant 3$, visto que $(1+1/n)^n$ tende crescentemente para $e < 3$. Como $\sqrt[n]{n} > 1$, deverá existir um limite $l \geqslant 1$. Ora, se fosse $l > 1$, ter-se-ia $n > l^n$, condição que se não pode verificar para valores de n suficientemente grandes, visto que $l^n/n \to +\infty$ (II).

(¹) Ibid., pág. 57.

Um procedimento semelhante ao adoptado na demonstração de V permite resolver com facilidade muitas questões relativas a limites.

Por exemplo, se $u_n \to a > 0$, $\log_b u_n$ tende para o valor finito $\log_b a$, e $\lim \sqrt[n]{u_n} = \lim b^{\frac{1}{n}\log_b u_n} = b^0 = 1$ como se viu no Ex. 10. Outro exemplo:

Exemplo 13.

$u_n = (n+1)^{1/\log n} \to e$, visto que $\log u_n = \dfrac{\log(n+1)}{\log n} = \dfrac{\log n + [\log(n+1) - \log n]}{\log n} = 1 + \dfrac{\log(1+1/n)}{\log n} \to 1$.

Adiante se encontrarão mais exemplos desta técnica.

TEOREMA VI — *Se* $u_n \to 0$, $v_n \to \infty$ *e* $u_n v_n \to l$, *tem-se* $(1+u_n)^{v_n} \to e^l$.

De facto, pode escrever-se

$$(1+u_n)^{v_n} = \left[\left(1+\frac{1}{1/u_n}\right)^{1/u_n}\right]^{u_n v_n}$$

e, como $1/u_n \to \infty$, sabe-se (¹) que $\left(1+\dfrac{1}{1/u_n}\right)^{1/u_n} \to e$. Em vista de V, tem-se portanto $\lim(1+u_n)^{v_n} = e^{\lim u_n v_n} = e^l$.

Evidentemente, se $u_n v_n \to +\infty$, $(1+u_n)^{v_n} \to \infty$; quando $u_n v_n \to -\infty$, $(1+u_n)^{v_n} \to 0$.

COROLÁRIO — *Se* $x_n \to x$ *e* $u_n \to \infty$, $\lim(1+x_n/u_n)^{u_n} = e^x$.

É uma generalização da célebre fórmula de JOÃO BERNOULLI.

Exemplo 14.

$$\lim(1+1/n)^{n^k} = \begin{cases} e & \text{se } k=1\\ 1 & \text{se } k<1\\ +\infty & \text{se } k>1\end{cases}$$

Exemplo 15.

$(1-1/n^2)^n \to e^0 = 1$

Exemplo 16.

$\lim(1+1/\log n)^{\log(n+1)} = e^{\lim \log(n+1)/\log n} = e^1$ (Ex. 13)

Exemplo 17.

$\lim u_n(a^{1/u_n}-1) = \log a$, com $|u_n| \to \infty$.

Com efeito, pondo $x_n = u_n(a^{1/u_n}-1)$, basta notar que $(1+x_n/u_n)^{u_n} = a$, donde $e^{\lim x_n} = a$, ou seja $\lim x_n = \log a$.

Em particular, $\log a = \lim n(\sqrt[n]{a}-1)$.

(¹) Ibid., pág. 70.

É interessante verificar algumas propriedades dos logaritmos a partir desta igualdade. Por ex.,

$$\log(1/a) = \lim n(\sqrt[n]{1/a}-1) = \lim -n(\sqrt[n]{a}-1) : \lim\sqrt[n]{a} = -\log a ;$$

$$\log 1 = \lim n(\sqrt[n]{1}-1) = 0 ;$$

$$\log ab = \lim[n(\sqrt[n]{a}-1)\sqrt[n]{b} + n(\sqrt[n]{b}-1)] = \log a + \log b ;\ \text{etc.}$$

Exemplo 18.

Calcular o limite de $u_n = n \log\frac{1}{2}(1+x^{1/n})$.

$u_n = \log\left[1+\frac{1}{2}(x^{1/n}-1)\right]^n$. Por sua vez,

$$\left[1+\frac{1}{2}(x^{1/n}-1)\right]^n \to e^{\lim \frac{1}{2}n(x^{1/n}-1)} = e^{\frac{1}{2}\log x} = x^{1/2}.$$

Portanto, $\lim u_n = \frac{1}{2}\log x$.

Vamos agora esclarecer alguns casos que o teorema V deixa obscuros.

Teorema VII — *Se* $u_n \to +\infty$ *e* $v_n \to 0$, $u_n^{v_n} \to 1$ *caso* $u_n v_n$ *se conserve limitado.*

Com efeito, tem-se então

$$\log u_n^{v_n} = v_n \log u_n = u_n v_n \cdot \frac{\log u_n}{u_n} \to 0 ,$$

visto que $\log u_n/u_n \to 0$ (¹).

Exemplo 19.

Para a sucessão de t. g. $a_n = (\sqrt{n})^{\log(1-2/n)}$ vem:

$$\log a_n = \log(1-2/n)\cdot\frac{1}{3}\log n = \frac{1}{3}\log(1-2/n)^{\log n} \to \frac{1}{3}\log e^0 = 0 .$$

Evitava-se este cálculo notando que $u_n v_n = \log(1-2/n)^{n^{1/3}} \to \log e^{\lim 2/n^{2/3}} = 0$; $u_n v_n$ é pois limitado e a sucessão a_n está nas condições do teor. anterior.

Recorde-se também a sucessão do Ex. 13.

Teorema VIII — *Se* $u_n \to +0$ *e* $v_n \to 0$, $u_n^{v_n} \to 1$ *desde que* v_n/u_n *seja limitado.*

Na verdade, $\log u_n^{v_n} = \frac{v_n}{u_n}(u_n \cdot \log u_n) \to 0$ (¹).

Exemplo 20.

$$\left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{n}\right)^{k/n} \to 1 .$$

(¹) «Tendendo para o infinito ou tendendo para zero, os números evoluem mais ràpidamente que qualquer potência dos respectivos logaritmos» — ibid., pág. 72.

Teorema IX — *Se* $u_n \to 1$ *e* $v_n \to \infty$, $u_n^{v_n}$ *é convergente se o for* $(u_n - 1)\, v_n$.

De facto, $(u_n - 1) \to 0$ e $\lim[1+(u_n-1)]^{v_n} = e^{\lim(u_n-1)v_n}$ (VI). Claro que, se $(u_n-1)v_n \to +\infty$, também $u_n^{v_n} \to +\infty$; mas, quando $(u_n-1)v_n \to -\infty$, $u_n^{v_n} \to 0$.

Exemplo 21.

Na sucessão de t. g. $[\log(n+1)/\log n]^n$, tem-se

$$(u_n - 1)\, v_n = \frac{\log(n+1)-\log n}{\log n}\cdot n = \log(1+1/n)^n / \log n \to 0 ,$$

e portanto $\lim[\log(n+1)/\log n]^n = e^0 = 1$.

4. Alguns teoremas particulares.

Este parágrafo é consagrado a alguns teoremas de grande utilidade prática. Embora, por comodidade, aqui se apresentem num encadeado lógico, fazendo fundamentalmente depender a demonstração de cada um deles da demonstração dos precedentes, faz-se notar que qualquer das proposições mencionadas pode ser provada independentemente, a partir da própria definição de limite.

Teorema X — *Convergindo* a_n *para* a, *também* $\frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = s_n$ *converge para o mesmo limite.*

Pondo $a_n = a + \varepsilon_n$ $(\varepsilon_n \to 0)$, o teorema fica demonstrado desde que se prove que $E_n = \frac{1}{n}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_n) \to 0$. Ora, dado δ arbitràriamente pequeno, existirá uma ordem p para além da qual $\varepsilon_n < \frac{1}{2}\delta$; e, fazendo $|\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_n| = K$, vem

$$|E_n| \leqslant \frac{1}{n}|\varepsilon_1+\varepsilon_2+\cdots+\varepsilon_p| + \frac{1}{n}(|\varepsilon_{p+1}|+\cdots+|\varepsilon_n|)$$
$$\leqslant \frac{K}{n} + \frac{1}{n}(|\varepsilon_{p+1}|+\cdots+|\varepsilon_n|)$$
$$< K/n + \delta(n-p)/2n < K/n + \delta/2 < \delta/2 + \delta/2 = \delta ,$$

para n superior ao maior dos números p e $2K/\delta$; q. e. d.

Exemplo 22.

$$\lim(1 + 1/2 + \cdots 1/n)/n = \lim 1/n = 0 .$$

Note-se, de passagem, que este resultado permite concluir (VII)

$$\sqrt[n]{1+1/2+\cdots+1/n} \to 1 .$$

Deixa-se assim ver quão útil pode ser a associação destes diferentes teoremas no cálculo de limites.

Exemplo 23.

$$\lim \frac{1}{n}(1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\cdots+\sqrt[n]{n}) =$$
$$= \lim \sqrt[n]{n} = 1\,. \quad \text{(Ex. 12)}$$

Observe-se que a recíproca de X nem sempre é verdadeira; pode s_n convergir sem que a_n tenha limite: por ex., com $a_n = \frac{1}{2}[1-(-1)^n]$, $s_n \to \frac{1}{2}$.

Pode também demonstrar-se, de forma análoga, que $s_n \to +\infty$ quando $a_n \to +\infty$: nesta hipótese, uma ordem q existirá a partir da qual $a_n > \Delta$, por maior que seja Δ. Então, $s_n > \frac{1}{n}(a_1+\cdots+a_q)+\Delta(n-q)/n$. Fazendo $n \to \infty$, o 2.º membro tende para Δ; o limite de s_n só pode pois ser $+\infty$, porque é forçosamente superior a Δ e este é arbitràriamente grande.

O teorema é portanto verdadeiro quer seja a finito ou infinito.

Teorema XI — *Se* $b_n \to b$, *tambem* $r_n = \sqrt[n]{b_1 b_2 \cdots b_n} \to b$ (b *finito ou* $+\infty$).

Pois que $\log r_n = \frac{1}{n}(\log b_1 + \log b_2 + \cdots + \log b_n) \to \log b$ (X).

Teorema XII — *Se* $c_n - c_{n-1} \to A$, *também* $c_n/n \to A$ (A *finito ou infinito*).

De facto, pondo $c_n - c_{n-1} = a_n$, vem $c_n = a_1 + \cdots + a$ e o teorema reduz-se a X.

Teorema XIII — *Se* $u_n / u_{n-1} \to B$, *também* $\sqrt[n]{u_n} \to B$ ($B > 0$, *finito ou infinito*).

Com efeito, $\log u_n - \log u_{n-1} \to \log B$, e portanto $(\log u_n)/n = \log \sqrt[n]{u_n} \to \log B$.

Podia também ter-se recorrido a XI, notando que

$$\lim \sqrt[n]{u_n} = \lim \sqrt[n]{u_1 \frac{u_2}{u_1}\frac{u_3}{u_2}\cdots\frac{u_n}{u_{n-1}}} = \lim \frac{u_n}{u_{n-1}}\,.$$

Este teorema, cuja recíproca (tal como a dos anteriores) pode não se verificar, é dos de mais larga aplicação.

Exemplo 24.

$$\lim \sqrt[n]{n^k} = \lim (n+1)^k / n^k = 1 \qquad \text{(cf. Ex. 12)}.$$

Exemplo 25.

$$\lim \sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots 2n}\,/\,n = \lim \sqrt[n]{(n+1)\cdots(n+n)/n^n} =$$
$$= \lim\, (2n+1)(2n+2)\,n^n / (n+1)^{n+2} =$$
$$= \lim\, (2n+1)(2n+2)/(n+1)^2 \cdot$$
$$\cdot \lim n^n/(n+1)^n = 4/e\,.$$

Exemplo 26.

$$\lim \sqrt[n]{\frac{n+1}{n}\,\mathrm{tg}\frac{1}{n}\log\frac{n+1}{n}} =$$
$$= \lim \sqrt[n]{\mathrm{tg}\frac{1}{n}\log\frac{n+1}{n}} \qquad \left(\sqrt[n]{\frac{n+1}{n}} \to 1\right)$$
$$= \lim\, \mathrm{tg}\frac{1}{n+1}\log\frac{n+2}{n+1} : \left(\mathrm{tg}\frac{1}{n}\log\frac{n+1}{n}\right) =$$
$$= \lim \frac{\mathrm{tg}\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n+1}} \cdot \frac{\frac{1}{n}}{\mathrm{tg}\frac{1}{n}} \cdot \frac{\log\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n}{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}} = 1$$

Teorema XIV — *Se* $\frac{u_{n+1}-u_n}{v_{n+1}-v_n} \to C$, *também* $\frac{u_n}{v_n} \to C$ $(u_n, v_n \to \infty)$.

Quando $(u_{n+1}-u_n)$ e $(v_{n+1}-v_n)$ convirjam, o teorema resulta imediatamente de XII. No entanto, para abranger todos os casos, há que fazer uma demonstração directa.

Supondo C finito, uma ordem m existirá a partir da qual

$$C - \delta < (u_{p+1} - u_p) / (v_{p+1} - v_p) < C + \delta\,,$$

ou seja

$$(v_{p+1} - v_p)(C - \delta) < u_{p+1} - u_p < (C + \delta)(v_{p+1} - v_p)\,;$$

dando a p os valores $m, m+1, \cdots, n-1$ e somando, vem

$$(v_n - v_m)(C - \delta) < u_n - u_m < (C + \delta)(v_n - v_m)\,,$$

donde

$$u_m / v_n + (1 - v_m / v_n)(C - \delta) < u_n / v_n <$$
$$< (C + \delta)(1 - v_m / v_n) + u_m / v_n\,.$$

Ora, quando n aumenta indefinidamente, $v_n \to \infty$, $u_m/v_n \to 0$, $v_m/v_n \to 0$; u_n/v_n tem pois o seu limite compreendido entre $C-\delta$ e $C+\delta$. Por ser δ arbitrário, fica demonstrada a tese.

A justificação é análoga no caso de limite infinito.

Exemplo 27.

$$\lim\, (1^k + 2^k + \cdots + n^k) / n^{k+1} =$$
$$= \lim\, (n+1)^k / [(n+1)^{k+1} - n^{k+1}] =$$
$$= \lim \frac{n^k + kn^{k-1} + \cdots}{(k+1)\,n^k + \cdots} = \frac{1}{k+1} \qquad (k > 0)\,.$$

Exemplo 28.

$$\lim \sqrt[n]{\log n!} = \lim \frac{\log (n+1)!}{\log n!} \qquad \text{(XIII)}$$

$$= \lim \frac{\log(n+1) + \log n + \cdots + \log 2}{\log n + \cdots + \log 2} =$$

$$= \lim \frac{\log(n+2)}{\log(n+1)} \text{ (XIV)} = 1 . \quad \text{(cf. Ex. 13)}$$

TEOREMA XV — *Sendo* $b_n \geqslant 0$, $(b_1+b_2+\cdots+b_n) \to \infty$ e $A_n \to \alpha$, *então*

$$lim \frac{b_1 A_1 + b_2 A_2 + \cdots + b_n A_n}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n} = \alpha .$$

Com efeito, como $\sum_1^n b_i A_i \to \infty$, está-se na hipótese do teorema precedente, e

$$\lim \frac{\sum b_i A_i}{\sum b_i} = \lim \frac{\sum_1^{n+1} b_i A_i - \sum_1^n b_i A_i}{\sum_1^{n+1} b_i - \sum_1^n b_i} =$$

$$= \lim \frac{b_{n+1} A_{n+1}}{b_{n+1}} = \lim A_{n+1} = \alpha .$$

Exemplo 29.

$$\lim \frac{\operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}\frac{\theta}{2} + \cdots + \operatorname{sen}\frac{\theta}{n}}{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}} =$$

$$= \lim \theta \frac{\frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} + \frac{1}{2}\frac{\operatorname{sen}(\theta/2)}{\theta/2} + \cdots + \frac{1}{n}\frac{\operatorname{sen}(\theta/n)}{\theta/n}}{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}} =$$

$$= \theta . \lim \frac{\operatorname{sen}(\theta/n)}{\theta/n} = \theta .$$

Exemplo 30.

$$\lim \frac{1}{n^2}\left[1^2 \operatorname{sen}\theta + 2^2 \operatorname{sen}\frac{\theta}{2} + \cdots + n^2 \operatorname{sen}\frac{\theta}{n}\right] =$$

$$= \lim \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k^2 \operatorname{sen}\frac{\theta}{k} =$$

$$= \lim \frac{\theta}{n^2} \frac{n(n+1)}{2} \frac{\sum_1^n k \frac{\operatorname{sen}(\theta/k)}{\theta/k}}{\sum_1^n k} =$$

$$= \frac{\theta}{2} \lim \frac{\operatorname{sen}(\theta/n)}{\theta/n} = \frac{\theta}{2} .$$

TEOREMA XVI - *Se* $a_n \to 0$, $b_n \to 0$ *e* $\frac{a_n - a_{n+1}}{b_n - b_{n+1}} \to \lambda$, *também* $\frac{a_n}{b_n} \to \lambda$.

A demonstração é análoga à de XIV. Em vista da hipótese, a partir de certa ordem m ter-se-á $(b_p - b_{p+1})(\lambda - \delta) < a_p - a_{p+1} < (\lambda + \delta)(b_p - b_{p+1})$; somando a estas as correspondentes desigualdades para $p+1, p+2, \cdots, n-1$, obtém-se $(b_p - b_n)(\lambda - \delta) < a_p - a_n < (\lambda + \delta)(b_p - b_n)$, ou seja

$$a_n/b_p + (1 - b_n/b_p)(\lambda - \delta) < a_p/b_p <$$
$$< (\lambda + \delta)(1 + b_n/b_p) + a_n/b_p ,$$

condição que deve verificar-se qualquer que seja n. Fazendo então $n \to \infty$, vem $\lambda - \delta < a_p/b_p < \lambda + \delta$. A partir da ordem m, a_p/b_p acha-se pois compreendido entre $\lambda - \delta$ e $\lambda + \delta$, e por isso $a_p/b_p \to \lambda$, q. e. d.

TEOREMA XVII — *Se* $a_n \to a$ *e* $b_n \to b$,

$$\frac{a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n}{n} \to ab$$

$$e \quad \frac{a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1}{n} \to ab .$$

A primeira parte do teorema resulta imediatamente de X.

Quanto à segunda sucessão, pondo $a_n = a + \varepsilon_n$ o termo geral escreve-se

$$a \frac{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}{n} + \frac{\varepsilon_1 b_n + \varepsilon_2 b_{n-1} + \cdots + \varepsilon_n b_1}{n} .$$

Ora o primeiro termo tende para ab (X) e o segundo, cujo módulo é inferior a $\frac{1}{n}\{|\varepsilon_1| + |\varepsilon_2| + \cdots + |\varepsilon_n|\} \times$ máx. $|b_i|$, tende para zero.

Exemplo 31

Dadas as somas $a_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ e $b_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_n$, e calculados os valores $w_n = u_1 v_n + u_2 v_{n-1} + \cdots + u_n v_1$ e $c_n = w_1 + w_2 + \cdots + w_n$, é fácil verificar que $c_n = u_1 b_n + u_2 b_{n-1} + \cdots + u_n b_1 = v_1 a_n + v_2 a_{n-1} + \cdots + v_n a_1$ e $c_1 + c_2 + \cdots + c_n = a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1$.

Daqui resulta que, se as series $\sum u_n$ e $\sum v_n$ forem convergentes $(u_n \to u, v_n \to v)$, então $(c_1 + c_2 + \cdots + c_n)/n \to uv$ (XVII). Por conseguinte, se $\sum w_n$ for convergente, a sua soma $w = \lim w_n$ é, em vista de X, igual a uv (teorema de ABEL).

EXERCÍCIOS

1. Mostrar que $a^n/n^k \to +\infty$ se $a > 1$ e que $b^n n^k \to 0$ se $|b| < 1$.

2. Estudar, para os diferentes valores de x, as sucessões

$[(1-x^2)/(1+x^2)]^n$, $(x^n-n)/(x^n+n)$,
$(x^n+n)/(x^{n-1}+2n)$, $(x-x^{2n+1})/(1+x^{2n+2})$.

3. A sucessão definida por $u_{n+1}=2(1+u_n)/(3+u_n)$ é monótona: crescente se $u_1<1$ e decrescente se $u_1>1$; o limite é 1.

4. Se $u_{n+1}=k/(1+u_n)$, com $k>0$ e $u_1>0$, são monótonas as sucessões $u_1, u_3, u_5, \cdots$ e $u_2, u_4, u_6, \cdots$ (uma crescente e a outra decrescente); e ambas tendem para a raiz positiva da equação $u^2+u=k$.

5. Dada a sucessão definida por $u_1=h$, $u_{n+1}=u_n^2+k$, sendo $0<k<\frac{1}{4}$ e h um número compreendido entre as raízes α e β da equação $u^2-u+k=0$, provar que $\alpha<u_{n+1}<u_n<\beta$ e determinar $\lim u_n$.

6. Sendo $u_1=\frac{1}{2}\left(u+\frac{A}{u}\right)$, $u_2=\frac{1}{2}\left(u_1+\frac{A}{u_1}\right), \cdots$ $(u>0,\ A>0)$, provar que $\lim u_n=\sqrt{A}$ [verificar que $\frac{u_n-\sqrt{A}}{u_n+\sqrt{A}}=\left(\frac{u-\sqrt{A}}{u+\sqrt{A}}\right)^{2^n}$].

7. Dada a sucessão definida por $u_1=a+b, \cdots, u_n=a+b-ab/u_{n-1}$ $(a>b>0)$, mostrar que $u_n=(a^{n+1}-b^{n+1})/(a^n-b^n)$ e determinar $\lim u_n$. Discutir o caso $a=b>0$.

8. Determinar o limite das sucessões de t. g.

$$[n/(3n+1)]^{\sqrt[n]{n}}, \quad n\cdot\log[(3n+2)/(3n-2)],$$
$$\left(\frac{1}{n}\right)^{(\log n)^n/n!}, \quad \frac{(n+1)\log n - n\log(n+1)}{\log n},$$
$$[(2n)!/2^{2n}(n!)^2]^k, \quad [1+1/n(\log n)^h]^{-n^k}$$

9. Verificar que

$$\sqrt[n]{n!}\to\infty, \quad n/\log n!\to 0, \quad \frac{n}{n+1}\,\frac{\log(n+1)}{\log n}\to 1,$$
$$n^k\Big/\binom{n}{k}\to k!, \quad \log\log n/\log n\to 0,$$
$$n\cdot\log\log n/(\log n)^k\to\infty, \quad (n+1)/\sqrt[n]{n!}\to e,$$
$$(\log n)^n/n!\to 0, \quad n^{\log(1+1/n)}\to 1, \quad \sqrt[n]{(2n)!/(n!)^2}\to 4,$$
$$\sqrt[n]{n!}\,/\,n\to 1/e, \quad \frac{1}{n}\sqrt[n]{(2n)!/n!}\to 4/e,$$
$$\frac{1}{n}\,[(n^2+1^2)(n^2+2^2)^2\cdots(n^2+n^2)^n]^{1/n^2}\to 2\,/\,\sqrt{e},$$
$$\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2}\to\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{n}\left\{\left(a+\frac{1}{n}\right)^2+\right.$$
$$\left.\left(a+\frac{2}{n}\right)^2+\cdots+\left(a+\frac{n-1}{n}\right)^2\right\}\to a^2+a+\frac{1}{3},$$
$$n!/n^n\to 0, \quad n\left\{1-\sqrt{(1-a/n)(1-b/n)}\right\}\to(a+b)/2,$$
$$1/n^2+1/(n+1)^2+\cdots+1/(2n)^2\to 0, \quad 1/\sqrt{n}+1/\sqrt{n+1}+$$
$$+\cdots+1/\sqrt{2n}\to\infty, \quad 1/\sqrt{n^2+1}+\cdots+1/\sqrt{n^2+n}\to 1.$$

10. Determinar os limites quando $n\to\infty$ das sucessões de termos gerais

$$(1+1/2^k+\cdots+1/n^k)/n^k, \quad (1+2^2+\cdots+n^2)/n^3,$$
$$\sqrt[m]{(n+a_1)\cdots(n+a_m)}-n,$$
$$\prod_{k=2}^{n}(k^3-1)/(k^3+1), \quad \sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{1+k/n^2}-1\right),$$
$$\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt[3]{1+k^2/n^3}-1\right), \quad \left(\frac{\sum_{i=1}^{k}\sqrt[n]{a_i}}{k}\right)^k,$$
$$\sum_{k=0}^{n-1}\left(\alpha+\frac{1}{n}\right)^k \quad (0<\alpha<1)$$

11. Sendo $y_n=x_n-ax_{n-1}$, com $y_0=x_0$ e $|a|<1$, exprimir x_n em y_n e provar que, quando $y_n\to y$, $x_n\to y/(1-a)$.

12. Mostrar que a sucessão

$$\sqrt{2}, \sqrt{2\sqrt{2}}, \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}, \cdots$$

é convergente e determinar o seu limite.

13. Sendo $p(n)$ o número de factores primos distintos de n, provar que $p(n)/n\to 0$.

14. Provar que $n!\,(a/n)^n$ tende para zero ou ∞ conforme a é inferior ou superior a e.

15. Se $a>b>0$, $\sqrt[n]{a^n+b^n}\to a$. Generalizar, provando que $\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_k^n}\to$ máx. a_i.

16. Sendo $a, b>0$, $\frac{1}{2}(a^{1/n}+b^{1/n})\to\sqrt{ab}$.

17. Se $x_n\to 0$, $\log(1+x_n)/x_n\to 1$.

18. Se $x_n\to 0$, $(e^{x_n}-1)/x_n\to 1$. (Fazer, por ex., $e^{x_n}=1+1/u_n$, com $u_n\to\infty$).

19. Se $y_n\to 0$, $z_n=[(1+y_n)^k-1]/y_n\to k$. (Como $(1+y_n)^k=e^{k\log(1+y_n)}$, vem $z_n=k\,\frac{\log(1+y_n)}{y_n}\,\frac{e^{x_n}-1}{x_n}$, com $x_n=k\log(1+y_n)\to 0$).

20. Provar que, sendo $a_n=\frac{1}{n(\log n)^{1+\alpha}}$ e $l_n=n\log n$, se tem

$$l_n\frac{a_n}{a_{n+1}}-l_{n+1}\to\alpha.$$

21. Se $a>1$, a sucessão $x_1=a$, $x_2=a^{x_1}, \cdots$ $x_n=a^{x_{n-1}}, \cdots$ é convergente quando $a\leqslant e^{1/e}$.