O Problema 3X+1

Vítor Araújo
Departamento de Matemática Pura, Faculdade de Ciências da Universidade do Porto

Dado um inteiro positivo *n*, se *n* for par, dividamo-lo por 2, se *n* for ímpar, consideremos (3n+1)/2. Se $T: IN \rightarrow IN$ for a função definida desta maneira, verifica-se numericamente que, se aplicarmos repetidamente *T* a qualquer inteiro positivo *n*, acabamos por obter o número 1.

Será possível explicar a razão deste comportamento simples? Ninguém conseguiu ainda...

A origem deste problema é obscura. Na literatura é atribuída a Lother Collatz (ver [4, 10]), estudante da Universidade de Hamburgo nos anos 30 do século XX, que parece ter sido a primeira pessoa a escrever sobre o assunto e a divulgá-lo junto dos seus colegas. Desde então o problema tem sido estudado por uma variedade de pessoas de diferentes campos da Matemática e das Ciências da Computação.

Os (poucos) resultados conhecidos acerca deste problema podem ser expressos mais elegantemente em termos das iterações da função seguinte.

Definição 1. Seja $T : IN \rightarrow IN$ dada por

$$T(N) = \begin{cases} (3N+1)/2 & se \quad N \text{ é ímpar} \\ N/2 & se \quad N \text{ é par.} \end{cases}$$

Então escrevemos $T^2(N)=T(T(N))$ e $T^3(N)=T(T(T(N)))$ *etc. e dizemos que a sucessão* $(T^k(N))_{k \in IN}$, *obtida por* iteração *da função T aplicada a N, é a* órbita *do número N.*

Vamo-nos restringir ao caso de iteração de inteiros positivos, embora esta definição da função *T* possa ser estendida facilmente aos inteiros negativos.

1. Formalização do problema

Dado um inteiro N ≥1 consideremos

$$Mx(N) = \lim_{k \to \infty} max\left\{T(N), T^2(N), \ldots, T^k(N)\right\}$$

e

$$Mn(N) = \lim_{k \to \infty} min\left\{T(N), T^2(N), \ldots, T^k(N)\right\}$$

que são os maior e menor valores assumidos pela órbita de *n*, quando os limites existem e são finitos. Notemos que a sucessão

$$M_k = max\left\{T(N), T^2(N), \ldots, T^k(N)\right\}, \quad k = 1, 2, 3 \ldots$$

é crescente, e a sucessão

$$m_k = min\left\{T(N), T^2(N), \ldots, T^k(N)\right\}, \quad k = 1, 2, 3 \ldots$$

é decrescente. Assim, *Mn(N)* existe sempre, pois $(m_k)_{k \geq 1}$ decresce e é sempre maior ou igual a 1. Quanto a *Mx(N)*, existirá sempre que $(M_k)_{k \geq 1}$ for limitada (consideramos que o limite não existe se não for finito).

Assim podemos classificar qualquer inteiro positivo *N* em três categorias:

Convergente: se *Mn(N)=1*;

Divergente: se *Mx(N)* não existe;

Cíclico: nos restantes casos.

Notemos que qualquer $N \geq 1$ está sempre numa das categorias acima, e apenas numa. De facto, $(M_k)_{k\geq 1}$ pode ser limitada, ou não limitada: neste último caso, N é divergente. No primeiro caso, $Mx(N)$ existe e, como temos sempre $Mn(N) \geq 1$, há duas possibilidades: ou temos igualdade, e N é convergente; ou, caso contrário, N é cíclico.

Desconhece-se qualquer inteiro positivo que seja divergente, e portanto temos a seguinte conjectura, amplamente aceite mas ainda não demonstrada.

Conjectura 1. *Nenhum inteiro positivo N é divergente.*

1.1. Ciclos e a principal conjectura

É claro que há um ciclo na iteração de T,

$T(1)=2, \qquad T(2)=1.$

Até hoje, efectuaram-se numerosos cálculos para muitos valores de N e nunca se encontrou outro ciclo, pelo que se supõe que este seja o único.

De facto já se conseguiu mostrar que qualquer outro ciclo deve ter pelo menos 275.000 elementos, contrastando com os 2 elementos deste ciclo simples. E então temos a principal conjectura relativa ao comportamento da iteração da transformação T.

Conjectura 2. *Todos os inteiros positivos N são convergentes.*

1.2. Conjectura com grafos dirigidos

Com o fim de tentar compreender melhor o comportamento desta função T, podemos pensar neste problema por intermédio de um *grafo dirigido*: um conjunto de pontos, chamados *vértices*, associados a números inteiros N e com *arestas* dirigidas de N para $T(N)$, representadas por setas unindo os dois vértices N e $T(N)$ no plano. Por este grafo podemos observar como a estrutura das iterações da função T é bastante complexa.

Notemos que o pedaço do grafo apresentado é o "mais próximo" de 1, mas que *7* não se encontra, embora encontremos todos os inteiros de 1 a 6 nos vértices... Para $N = 7$ a órbita é

7, 11, 17, 26, 13, 20, 10, 5, 8, 4, 2, 1, 2, 1, 2, 1 ...

e o vértice correspondente a *7* teria que ficar mais acima no grafo.

Reparemos na irregularidade dos valores dos elementos das órbitas. Para $N = 26$, a órbita lê-se facilmente do grafo

26, 13, 20, 10, 5, 8, 4, 2, 1, 2, 1, 2, 1 ...

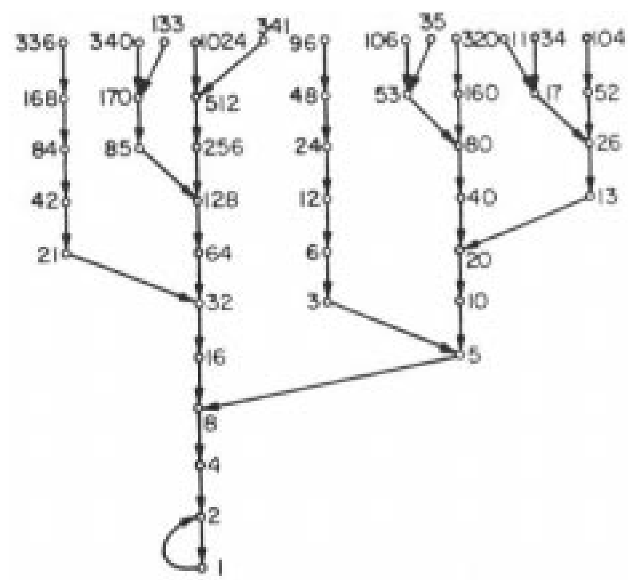

Figura 1 - Uma porção do grafo dirigido correspondente às iterações da função *T*.

Mas, se tomarmos $N = 27$, então teremos uma órbita que demora 67 iterações até chegar ao número 1 e, entretanto, os valores na órbita sobem até 4616, quando na porção apresentada do grafo o maior valor é 1024.

Dizer que a órbita de todo o inteiro positivo N "passa" por 1 para algum iterado, é o mesmo que dizer que, partindo de qualquer vértice do grafo anterior, há um caminho desse vértice até ao vértice 1 seguindo as arestas do grafo.

Então podemos enunciar a principal conjectura noutro formato.

Conjectura 3. *O grafo correspondente a* T *é conexo.*

Ser *conexo* significa aqui que podemos ir de um vértice qualquer do grafo para qualquer outro seguindo um caminho ao longo de arestas do grafo, mas respeitando o sentido das setas - um caminho "bem orientado". Então dizer que toda a órbita finalmente "passa" pelo número 1 é dizer que qualquer vértice pode ser ligado ao número 1 por um caminho de arestas bem orientado. E dizer que o grafo acima é conexo, já que 1 pertence ao grafo, significa que qualquer outro ponto do grafo tem uma órbita que assume o valor 1 após um número finito de iterados. Portanto esta conjectura é equivalente à Conjectura 2.

2. Tempos de paragem

É óbvio que antes que a órbita "caia" no ciclo 1-2, isto é, que $T^k(N)=1$ para algum $k>1$, devemos ter $T^j(Nq)<N$ para algum $j<k$.

Definição 2. *Dado um inteiro positivo N*, o tempo de paragem $\sigma(N)$ *é o menor inteiro* $k\geq 1$ *tal que* $T^k(N)<N$, ou $\sigma(N)=\infty$ *se não existir tal inteiro.*

É claro que se a conjectura for verdadeira, então todos os inteiros positivos N têm tempo de paragem finito. O recíproco também se verifica, como mostramos a seguir, isto é, *se todos os inteiros positivos tiverem tempo de paragem finito, então a conjectura é verdadeira.*

Teremos então outra forma para a conjectura principal.

Conjectura 4. *Todos os inteiros positivos têm tempo de paragem finito.*

De facto, suponhamos que todos os inteiros positivos N têm tempo de paragem finito, $\sigma(N)<\infty$. Então fixando um $N\geq 1$ qualquer, teremos sucessivamente

$N_1=T^{\sigma(N)}(N)<N$,

$N_2=T^{\sigma(N_1)}(N_1)<N_1$,

$N_3=T^{\sigma(N_2)}(N_2)<N_2$

...

e esta *sucessão decrescente de inteiros positivos* tem de parar no inteiro 1, ou seja, para algum $j\geq 1$ vale $N_j=1$. Como

$1=N_j=T^{\alpha(N)+\alpha(N_1)+\ldots\alpha(N_{j-1})}(N)$,

então N foi enviado para 1 por um iterado de T. Deste iterado em diante, a órbita reduz-se ao ciclo 1-2, tal como a conjectura principal diz acontecer.

Surpreendentemente, parece ser mais fácil estudar os tempos de paragem do que directamente as órbitas da função T! Isto apesar de os tempos de paragem serem bastante irregulares.

Definição 3. O tempo de paragem total $\sigma_\infty(N)$ *associado ao inteiro N é o menor* $K\geq 1$ *tal que* $T^k(N)=1$.

Podemos observar a irregularidade das funções *tempo de paragem* e *tempo de paragem total* na seguinte tabela.

n	$\sigma(n)$	$\sigma_\infty(n)$
1	∞	2
7	7	11
27	59	70
$2^{50}-1$	143	383
2^{50}	1	50
$2^{50}+1$	2	223
$2^{500}-1$	1828	4331
$2^{500}+1$	2	2204

As próximas tabelas parecem indicar que quem quer que tente achar alguma regularidade para os *tempos de paragem total* deve acabar por ficar bastante desesperado...

Alguém consegue discernir um padrão nestes tempos de paragem total? Dá vontade de dizer que eles são aleatórios.

	1000 –1009	1010 –1019	1020 –1029	1030 –1039	1040 –1049	1050 –1059	1060 –1069	1070 –1079	1080 –1089	1090 –1099
0	72	42	34	50	23	23	80	18	31	31
1	91	42	34	26	80	61	80	107	88	31
2	72	72	42	88	80	53	80	23	31	23
3	29	72	42	99	80	53	90	18	88	23
4	45	26	10	88	23	53	23	18	31	23
5	45	26	26	88	23	107	30	18	31	50
6	45	34	26	88	80	23	23	23	88	61
7	61	99	26	88	80	51	42	23	88	88
8	72	94	80	42	23	23	18	34	15	61
9	72	42	80	42	42	23	18	34	31	23

Figura 2 - Listagem dos tempos de paragem para *N* entre 1000 e 1099.

$\sigma_\infty(n)$	freq.	$\sigma_\infty(n)$	freq.	$\sigma_\infty(n)$	freq.	$\sigma_\infty(n)$	freq.
10	1	29	1	50	3	88	5
15	1	31	7	53	4	91	1
18	6	34	6	61	4	99	2
23	17	42	9	72	6	107	2
26	6	45	3	80	16		

Figura 3 - Listagem da contagem das repetições de valores na tabela anterior.

2.1. Tempos de paragem arbitrariamente grandes

Pode não ser imediatamente óbvio da definição que *têm de existir tempos de paragem arbitrariamente grandes.*

Porém, se tomarmos $N = 2^p-1$ com p>1 vamos obter

$T(N)=3.2^{p-1}-1$,

$T^2(N)=3.2^{p-2}-1$,

$T^3(N)=3^3.2^{p-3}-1$

...

e assim sucessivamente até

$T^p(N)=3^p-1$,

que é o primeiro elemento par da órbita de N.

Portanto, o tempo de paragem de $N = 2^p-1$ é maior ou igual a p, para qualquer p >1.

Depois de observarmos tanta irregularidade, é espantoso que os tempos de paragem se comportem, afinal, muito bem quando olhamos para inteiros N muito grandes, como veremos adiante.

3. Comportamento assimptótico dos tempos de paragem

Em 1976, Riho Terras [4, 11, 12] mostrou que se pode dizer algo sobre o comportamento da função "*tempo de paragem*" para N muito grande - o que se chama habitualmente de *comportamento assimptótico*.

Teorema 1. *Para cada p≥1, dado o conjunto*

$$S_p(m)=\{N\geq 1: \quad N\leq m \quad e \quad \sigma(N)\leq p\}$$

então o limite seguinte

$$F(p)=\lim_{m\to\infty}\frac{1}{m}\#S_p(m)$$

existe e ainda

$$\lim_{p\to\infty} F(p) = 1.$$

Como $\#S_p(m)$ simboliza o número de elementos do conjunto $S_p(m)$, então $\frac{1}{m}\# S_p(m)$ é a *frequência de inteiros entre* 1 *e m cujo tempo de paragem não ultrapassa p.*

O resultado diz então que esta frequência tem um limite $F(p)$ quando m tende a infinito (*frequência assimptótica*). Além disso, se fizermos o limite superior p dos tempos de paragem tender também a infinito, então a frequência assimptótica converge para 1.

Intuitivamente, *para m muito grande e para p muito grande, a frequência de inteiros entre* 1 *e m com tempos de paragem inferiores a p é muito próxima de* 1.

Faz então sentido dizer que *quase todos os números têm tempo de paragem finito*, e portanto também que a conjec*tura principal é quase verdadeira*!

Observemos que este resultado tem um sabor probabilístico, já que estamos a considerar a *frequência de inteiros entre* 1 *e m com tempos de paragem inferiores a p* no seu enunciado - isto apesar de o Teorema dizer respeito ao comportamento duma função definida por uma regra perfeitamente clara e muito simples!

A prova deste resultado é bastante longa e recheada de "truques" que não se prestam facilmente a generalizações - falaremos de uma delas já a seguir - embora seja "elementar", no sentido em que um licenciado em Matemática está em condições de entender a demonstração.

4. Generalizações deste resultado

Alguns autores investigaram até que ponto este resultado assimptótico pode ser estendido para outras funções. Um dos resultados mais gerais obtidos diz respeito às funções $U = U_{m,d}$ definidas por

$$U(N) = \begin{cases} \dfrac{N}{d} & se \quad N \equiv 0 \bmod d \\ \dfrac{mN-r}{d} & se \quad N \not\equiv 0 \bmod d \end{cases}$$

em que, no segundo caso, $r \in R$ é tal que $mN \equiv r$ mod d. Neste contexto, m e d são inteiros positivos primos entre si, isto é, $(m,d) = 1$ e R é um conjunto de representantes das classes não congruentes com *0* módulo d.

Notemos que a função T pertence a esta classe de funções, com $m = 3$, $d = 2$ e $R = \{-1\}$ (logo $r = -1$).

H. Möler, em 1978 [8, 4], caracterizou completamente quais as funções U deste tipo que admitem tempo de paragem finito para quase todos os inteiros, mostrando que essas são precisamente as funções com $m<d^{\,d/(d-1)}$.

4.1. Relação com a parte fraccionária de $(3/2)^k$

O estudo da distribuição, no intervalo [0,1], da parte fraccionária da sucessão $\left(\left(\frac{3}{2}\right)^k\right)_{k\geq 1}$ revelou conexões inesperadas com uma generalização do problema $3X + 1$.

A *parte fraccionária* de qualquer número racional ou real $x > 0$ define-se como a diferença $x-[x]$, em que $[x]$ é o maior inteiro positivo que não ultrapassa x.

Conjectura-se (mais uma conjectura!) que *as partes fraccionárias desta sucessão formam um conjunto denso em* [0,1], isto é, seja qual for o intervalo $[a, b] \subset [0, 1]$, por mais pequeno que seja, existe pelo menos um inteiro k tal que a parte fraccionária de $\left(\frac{3}{2}\right)^k$ está em $[a, b]$.

Uma forma de atacar o problema pode ser determinar quais os possíveis comportamentos de sucessões do tipo $\left(\left(\frac{3}{2}\right)^k.\xi\right)_{k\geq 1}$, em que $\xi > 0$ é um número real fixado.

Em 1968 (ver novamente [4]), K. Mahler considerou o problema de determinar se existem ou não números reais $\xi > 0$ com a propriedade

$$0 \leq \text{parte fraccionária de } \left(\left(\frac{3}{2}\right)^k . \xi \right) \leq \frac{1}{2},$$

para todos os $k = 1, 2, 3, \ldots.$

A existência de tais números reais seria uma indicação da *possível falsidade* da conjectura da densidade, uma vez que se tivermos as desigualdades anteriores para $\xi = 1$, então seria impossível existir um elemento da sucessão $(3/2)^k$ cuja parte fraccionária estivesse em $[1/2, 1]$!

Mahler [7] mostrou que o conjunto de tais reais ξ é *numerável* provando que *existe no máximo um tal* ξ *em cada intervalo* $[N, N+1]$, para $N = 1, 2, 3, \ldots$ Mais ainda, para existir um tal número no intervalo $[N, N+1]$, a órbita $(N, W(N), W^2(N), \ldots)$ de N gerada pela função

$$W(N) = \begin{cases} 3N/2 & \text{se } N \text{ é par,} \\ (3N+1)/2 & \text{se } N \text{ é ímpar,} \end{cases}$$

teria que satisfazer a condição

$Wk(N) \not\equiv 3 \bmod 4$ *para todos os* $k \geq 1$.

Ora, esta função tem certas semelhanças na forma e no comportamento com a função T, e ainda hoje se pensa que é pouco provável que exista algum número ξ como acima.

Mas a estrutura da distribuição das partes fraccionárias de $\left(\frac{3}{2}\right)^k . \xi$ é realmente intrincada... G. Choquet [1, 2, 3] e A. Pollington [9], em 1980 e 1981, mostraram que *existe uma infinidade* (*não numerável*) *de reais* $\xi > 0$ *para os quais*

$$\frac{1}{25} \leq \text{parte fraccionária de } \left(\left(\frac{3}{2}\right)^k . \xi \right) \leq \frac{24}{25}$$

para todos os inteiros positivos k - em completo contraste com a quantidade, *no máximo*, *numerável* de soluções para o problema anterior!

5. Nota final

O problema 3*X*+1, e outros relacionados, levam os matemáticos ao seguinte *dilema*.

Por um lado, na medida em que a função tem alguma *estrutura*, pois podemos calcular *T(N)* a partir de *N* por uma regra muito simples, temos a possibilidade de estudar muito bem o seu comportamento "local": podemos calcular explicitamente e fazer muitas experiências com a função para vários valores iniciais - este aspecto da Matemática foi enormemente potenciado com a vulgarização dos computadores pessoais. Porém obtemos indícios de comportamento *aleatório* quando tentamos extrapolar as nossas experiências numéricas - basta algum tempo a observar as tabelas de tempos de paragem, por exemplo.

Por outro lado, se pensarmos como se estivéssemos a lidar com uma variável *aleatória*, e levarmos em conta *médias* ou *frequências* de certos eventos, conseguimos ver alguma *estrutura* no comportamento assimptótico da função.

Esta *dicotomia* torna-se difícil de resolver num contexto como o das funções inteiras, mas foi possível *conciliar* estes dois aspectos em certos casos de funções reais de uma ou várias variáveis, usando os instrumentos da Análise Infinitesimal e da Topologia Diferencial, indisponíveis no cenário dos números inteiros - mas isso são assuntos que nos levariam ao estudo de *Sistemas Dinâmicos* e *Teoria Ergódica*.

5.1. É possível encontrar a resposta?

Este problema, em especial a conjectura principal, parece intratável com os conhecimentos matemáticos actualmente disponíveis.

Chegou a ser feita uma piada quando este problema estava na moda nas universidades de Yale e Chicago nos anos 50 e 60 do século XX, que dizia que este problema fazia parte duma conspiração para travar o desenvolvimento da Matemática nos E.U.A.

A situação parece tão difícil que, em 1983, Richard Guy [6] publicou uma lista de problemas intitulada

Não tente resolver estes problemas

e o problema 3*X*+1 estava lá, ao lado de muitos outros...

Recentemente, em Março de 2001 [5], foi anunciado que há um número infinito de inteiros *N* com tempo de paragem total finito e que satisfaz $\sigma_\infty(N) \geq 6{,}14316 \log N$. Afinal, alguém não seguiu o conselho de Richard Guy...

Referências

[1] G. Choquet, *Répartition des nombres k*$(3/2)^n$*; mesures et ensembles associés*, C.R. Acad. Sci. Paris, 290 (1980), 575-580.

[2] idem, *Algorithmes adaptés aux suites* $k\theta^n$ *et aux chaînes associées*, ibidem, 290 (1980) 719-724.

[3] idem, *Construction effective de suites k*$(3/2)^n$*. Étude des mesures (3/2)-stables*, ibidem, 291 (1980), 69-74.

[4] Jeffrey Lagarias, *The 3x+1 problem and its generalizations*, American Mathematical Monthly **92** (1985), 3-21.

[5] idem, *Lower bounds for the total stopping time of 3x+1 iterates*, preprint, 2001: `http://arXiv.math.nt/0103054`.

[6] Richard Guy, *Don't try to solve these problem!*, American Mathematical Monthly **90** (1983), 35-41.

[7] K. Mahler, *An unsolved problem on the powers of 3/2*, J. Austral. Math. Soc., 8 (1968), 313-321.

[8] H. Möller, *Über Hasses Verallgemeinerung des Syracuse-Algorithmus (Kakutani's problem)*, Acta Arith., 34 (1978), 219-226.

[9] A.D. Pollington, *Progressions arithmétiques géneralisées et le problème des* $(3/2)^n$, C.R. Acad. Sci. Paris, 292 (1981), 383-384.

[10] Eric Roosendaal, *On the 3x+1 problem*, página html, `http://personal.computrain.nl/eric/wondrous`

[11] Riho Terras, *A stopping time problem on the positive integers*, Acta Arith. 30 (1976), 241-252.

[12] idem, *On the existence of a densitity*, Acta Arith., 35 (1979), 101-102.