MATEMÁTICAS SUPERIORES

PONTOS DE EXAMES DE FREQUÊNCIA E FINAIS

MATEMÁTICAS GERAIS

I. S. T. — MATEMÁTICAS GERAIS — 2.° Exame de Frequência Extraordinário — 11 de Julho de 1953.

I

3675 — Achar a condição de convergência da série cujo termo geral é $u_n = (2+11\,n)\,\dfrac{a\,(a+5)\cdots(a+5\,n)}{b\,(b+5)\cdots(b+5\,n)}$.

R: *Utilizando o critério de* DUHAMEL, *e atendendo a que* $\dfrac{u_n}{u_{n+1}} = \dfrac{2+11\,n}{13+11\,n}\cdot\dfrac{b+5\,(n+1)}{a+5\,(n+1)}$ *vem* $\lim\limits_{n=\infty} n\cdot\left(\dfrac{u_n}{u_{n+1}}-1\right) = \dfrac{11\,b-11\,a-55}{55} > 1$ *Por consequência,*

$$11\,b-11\,a > 110 \quad ou \quad b-a > 10 .$$

3676 — Determine a equação do plano diametral da quádrica $x^2-y^2-2\,z^2+4\,xz-2\,yz-2\,x-2\,y+4\,z+5=0$ que é perpendicular à recta $\begin{cases} x=1 \\ y=2\,z-3 \end{cases}$.

R: *As coordenadas do centro da quádrica são a solução de*

$$\begin{cases} x+2\,z-1=0 \\ y+z+1=0 \\ 2\,x-y-2\,z+2=0 \end{cases} \quad ou \quad \begin{cases} x=-1 \\ y=-2 . \\ z=\;\;1 \end{cases}$$

As equações normais da recta dada são:

$$\frac{x-1}{0} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-0}{1} .$$

Como o plano é diametral ele passa pelo centro da quádrica e tem uma equação de tipo $A\,(x+1)+B\,(y+2)+C\,(z-1)=0$. *Por ser perpendicular à recta dada, podemos tomar para parâmetros directores do plano os valores* $0, 2$ *e* 1: $2\,(y+2)+z-1=0$ *ou* $2\,y+z-3=0$.

II

3677 — Defina séries absolutamente convergentes e aponte as suas propriedades mais importantes, incluindo as que dizem respeito às operações sobre séries.

Se trocarmos, numa dada série, cada termo u_{2n} com o termo u_{2n+1}, a série resultante será da mesma natureza? Justifique.

3678 — Faça o estudo de um sistema de n equações lineares e homogéneas a n incógnitas.

Considere agora um sistema de n equações lineares e homogéneas a $n+1$ incógnitas, com característica n. Demonstre que neste caso os valores das incógnitas são proporcionais aos determinantes que se obtêm a partir do quadro da matriz do sistema, suprimindo sucessivamente as várias colunas e trocando-lhes alternadamente os sinais.

3679 — Mostre a importância das transformadas, dos limites das raízes e das regras eliminatórias no cálculo das raízes inteiras duma equação algébrica de coeficientes inteiros.

Prove que a equação $x^n - x^{n-1} + k = 0$ não pode ter raízes inteiras se k for impar. Poderá ter raizes fraccionárias? E raizes irracionais?

3680 — Deduza a equação às direcções conjugadas de uma cónica.

Considere uma direcção conjugada de si própria. Em que se transforma a equação deduzida?

Sabendo que as assíntotas passam pelo centro de uma cónica, de coordenadas (x_0, y_0), escreva uma equação reunida das duas assíntotas utilizando a equação obtida. Essa equação reunida representará, por sua vez, uma cónica?

Enunciados e resoluções dos n.os 3675 e 3676 de J. H. Arandes.

I. S. C. E. F. — MATEMÁTICAS GERAIS — 1.° Exame de Frequência — 11 de Fevereiro de 1953.

I

3681 — Escreva a equação da recta — r — que é perpendicular, no ponto médio, ao segmento $\overline{AB}$ de extremidades $A\,(2,2)$ e $B\,(2,2\,b)$.

Suposto fixado o parâmetro b, considere as circunferências que passam por A e B; notando que o lugar geométrico dos centros delas é a recta r, determine o intervalo no qual se deve conservar b para

N. R. — A numeração dos exercícios publicados nesta revista no número 55 (Agosto de 1953) a partir da 2.ª coluna da página 21 (Pontos de Matemáticas Gerais — I. S. T. 1.° ex. ord. 13 de Março de 1953) está errada. Os números 3559 a 3655 devem ser substituidos pelos números 3657 a 3674. Pede-se ao leitor que faça a respectiva correcção para evitar confusões em citações futuras.

que sempre *duas* dessas circunferências tenham o seu centro sobre a circunferência de equação $x^2+y^2=4$. Qual ou quais os valores de b que conduzem a uma só circunferência? Escreva a equação desta única solução. R: *Ponto médio* $M(2, 1+b)$; *coef. angular de* $\overline{AB}$, $\frac{2-2b}{2-2}$ *donde* $\overline{AB}$ *paralela a* $\overrightarrow{OY}$; *a equação de* r *é pois,* $y-1-b=0$.

Para haver duas soluções a linha dos centros deve cortar a circunferência, e o sistema $\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ y=1+b \end{cases}$ *deverá ter duas soluções reais distintas.*

Vem sucessivamente: $x^2+(1+b)^2=4$, $x^2=4-(1+b)^2$, $x=\pm\sqrt{4-(1+b)^2}$, $4-(1+b)^2>0$, $(1+b)^2<4$, $|b+1|<2$; *então,* b *na vizinhança* 2 *do ponto* -1: $-1-2<b<-1+2$.

Para haver uma só solução, $b_1=-3$ $b_2=1$ *a que correspondem os centros* $C_1(0,-2)$ *e* $C_2(0,2)$ *e a que correspondem os raios,* $r_1=\sqrt{20}$ *e* $r_2=2$; *as equações das circunferências:* $x^2+(y+2)^2=20$ *e* $x^2+(y-2)^2=4$.

3682 — Calcule, nos pontos $t=0$ e $t=2$, a derivada $\frac{dy}{dt}$ da função composta com $y=e^{\operatorname{arc\,sen} x}$ e $x=\sqrt[3]{1-t^3}+2$. R: *A função composta está definida naqueles valores de* t *que façam* $-1\leqslant x\leqslant 1$, *e portanto não existe função no ponto* $t=0$, *mas existe no ponto* $t=2$.

No ponto $t=2$ *a função intermediária admite derivada* $\frac{dx}{dt}=-\frac{t^2}{\sqrt[3]{(1-t^3)^2}}$, *finita igual a* $-\frac{4}{\sqrt[3]{49}}$; *no ponto correspondente* $x=2-\sqrt[3]{7}$ *a função principal admite derivada* $\frac{dy}{dx}=\frac{e^{\operatorname{arc\,sen} x}}{\sqrt{1-x^2}}$, *também finita igual a* $\frac{e^{\operatorname{arc\,sen}(2-\sqrt[3]{7})}}{\sqrt{1-\left(2-\sqrt[3]{7}\right)^2}}$. *Vem então:*

$$\frac{dy}{dt}=-\frac{4\cdot e^{\operatorname{arc\,sen}(2-\sqrt[3]{7})}}{\sqrt[3]{49}\cdot\sqrt{1-\left(2-\sqrt[3]{7}\right)^2}}.$$

II

3683 — Pode uma sucessão u_n ter limite finito e o conjunto (u_n) admitir dois pontos de acumulação? Justifique. R: *Se* $a\neq b$ *são esses pontos de acumulação, existem vizinhanças* $I(a,\varepsilon_1')$ *e* $I(b,\varepsilon_1'')$ *disjuntas; dentro da primeira há um ponto de* (u_n) *distinto de* a *e que é um termo* u_{α_1} *da sucessão, dentro da segunda há um ponto de* (u_n) *distinto de* b *e que é um termo* u_{β_1} *da sucessão; os dois termos são distintos, não só como termos mas até numèricamente por serem disjuntas as vizinhanças.*

Se $a\neq u_{\alpha_1}$ *e* $b\neq u_{\beta_1}$ *existem vizinhanças* $I(a,\varepsilon_2)$ *e* $I(b,\varepsilon_2'')$ *por maioria de razão disjuntas e dentro das quais não se encontram nem* u_{α_1} *nem* u_{α_2}. *Portanto dentro da primeira há um ponto do conjunto distinto de* a *que é um termo da sucessão* u_{α_2} *e dentro da segunda um ponto distinto de* b *que é um termo* u_{β_2}.

Assim se constroem duas subsucessões com limites distintos.

3684 — Indique, e justifique, os tipos de séries cuja soma se possa calcular com exactidão. R: *As séries* $\sum_0^\infty K^n(x)=1+K(x)+K^2(x)+\cdots$ *para as quais é* $S_n(x)=\frac{1-K^n(x)}{1-K(x)}$ *e cuja soma é* $S(x)=\frac{1}{1-K(x)}$ *sempre que* $|K(x)|<1$.

As séries $\sum_0^\infty\left(\frac{1}{N_n}-\frac{1}{N_{n+1}}\right)$ *para as quais* $S_n=\frac{1}{N_0}-\frac{1}{N_n}$ *que terão soma* $S=\frac{1}{N_0}-\frac{1}{L}$ *sempre que* N_n *converge para limite finito* $L\neq 0$.

As séries $\sum_0^\infty\left(\frac{1}{N_n}-\frac{1}{N_{n+2}}\right)$ *para as quais* $S_n=\frac{1}{N_0}+\frac{1}{N_1}-\frac{1}{N_{n+1}}-\frac{1}{N_n}$ *que terão soma* $S=\frac{1}{N_0}+\frac{1}{N_1}-\frac{2}{L}$ *sempre que* N_n *converge para* $L\neq 0$.

Podemos supor estas séries como séries de funções, mas então a função $N_n(x)$ *deverá convergir uniformemente em* X' *para a função* $L(x)$; *em* X' *nem a função* $L(x)$ *nem as funções* $N_n(x)$ *se devem anular.*

O aluno podia ainda citar outras séries, mas a resposta considerava-se já suficiente.

3685 — Prove que $f'(c)$ (se existir) é não negativa se $f(x)$ cresce em $x=c$. R: *Se* $f(x)$ *é crescente em* c *existe uma vizinhança de* c *para a qual* $c-\varepsilon<x'<c<x''<c+\varepsilon$ *faz* $f(x')\leqslant f(c)\leqslant f(x'')$ *e então* $f(x)-f(c)$ *quando não é nulo e tem o mesmo sinal de* $x-c$; *vem* $\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\geqslant 0$, *e se o limite existir*, $f'(c)\geqslant 0$.

3686 — Seja $f'(x)$ a derivada duma função $f(x)$ regular em (a,b). Mostre que $f'(x)$ é contínua no intervalo aberto (a,b), desde que não tenha limite infinito em ponto algum interior a (a,b). Se $\lim_{x=b-0} f'(x)=H$, qual o valor de H? Justifique a resposta. R: *Seja* d *um ponto interior ao intervalo* (a, b) *e* *portanto com uma vizinhança* I (d , ε) *inteiramente contida no intervalo*. *Com* x *nesta vizinhança de* d *vem* $\frac{f(x)-f(d)}{x-d} = f'(x_1)$ *com* $0 < |x_1 - d| < |x - d|$; *fazendo tender* x *para* d *o que arrasta* x_1 *para* d, *o primeiro membro terá sempre limite finito* $= f'(d)$ *e o segundo membro tem também, por hipótese, limite finito sendo* $\lim_{x_1 = d} f'(x_1) = f'(d)$.

Com $x < b$ *vem* $\frac{f(x)-f(b)}{x-b} = f'(x_1)$ *e, portanto,* $\lim_{x_1 = b-0} f'(x_1) = f'_e(b)$.

3687 — Calcule $\lim_{n\to\infty} \log\left(1+\frac{2n}{3n^2+1}\right)^n$.

R: $\log\left(1+\frac{2n}{3n^2+1}\right)^n = n \log\left(1+\frac{2n}{3n^2+1}\right) =$

$$= n \,.\, \xi_n \,.\, \frac{2n}{3n^2+1} \longrightarrow \frac{2}{3} \quad \text{visto } \xi_n \to 1$$

III

3688 — Sob que condições converge a série $\sum_0^\infty (-1)^n a_n$? Prove a afirmação.

Dadas as séries alternadas $\sum(-1)^n a_n$ e $\sum(-1)^n b_n$, se $\frac{a_n}{b_n} \to l$ finito (possìvelmente nulo) que se pode concluir quando $\sum(-1)^n b_n$ fôr absolutamente convergente? Justifique. E quando $\sum(-1)^n b_n$ fôr simplesmente convergente? Porquê?

Estude a natureza da série $1+\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\alpha(\alpha+1)}{\beta(\beta+1)}+\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{\beta(\beta+1)(\beta+2)}+\cdots$ $(\alpha,\beta>0)$. R: *Se* $\sum(-1)^n b_n$ *fôr simplesmente convergente*, $\sum(-1)^n a_n$ *nunca poderá ser absolutamente convergente*.

Note-se que: se $\frac{a_n}{b_n}$ *tende monòtonamente para zero e a série* $\sum(-1)^n b_n$ *é convergente (mesmo simplesmente) também* $\sum(-1)^n a_n$ *é convergente.*

Com efeito, para $n \geqslant m$ *se tem* $\frac{a_m}{b_m} > \frac{a_{m+1}}{b_{m+1}} > \frac{a_{m+2}}{b_{m+2}} > \cdots > 0$ *e multiplicando os termos da série convergente*

$$(-1)^m b_m + (-1)^{m+1} b_{m+1} + (-1)^{m+2} b_{m+2} + \cdots$$

por aqueles números positivos decrescentes, *se obtém a seguinte série*

$$(-1)^m a_m + (-1)^{m+1} a_{m+1} + (-1)^{m+2} a_{m+2} + \cdots$$

que é também convergente.

O termo geral $\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+n-1)}{\beta(\beta+1)(\beta+2)\cdots(\beta+n-1)}$ *conduz a* $\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{\beta+n}{\alpha+n} = 1+\frac{\beta-\alpha}{n}+\frac{\alpha(\alpha-\beta)}{n(n+\alpha)}$ *e, pelas regras de* Gauss, *se* $\beta-\alpha>1$ *convergência*; *se* $\beta-\alpha\leqslant 1$ *divergência.*

3689 — Defina função $f(x)$ regular em (a,b) e demonstre o teorema de Rolle. Designando por x'_i e x'_{i+1} dois zeros consecutivos de $f'(x)$ indique, justificando, quantos zeros de $f(x)$ existem entre x'_i e x_{i+1}.

Verifique o teorema de Rolle com a função $f(x) = (x-a)^p \,.\, (x-b)^q$ R: $f(x) = (x-a)^p (x-b)^q$ *é função regular no intervalo* (a, b) *sendo* $f(a) = f(b) = 0$. *Tem-se* $f'(x) = p(x-a)^{p-1}(x-b)^q + q(x-a)^p(x-b)^{q-1} = (x-a)^{p-1}(x-b)^{q-1}[(p+q)x-(pb+qa)]$. *A derivada anula-se para* $x_1 = \frac{pb+qa}{p+q}$ *e, se por exemplo,* $a<b$ *será* $a<x_1<b$, *como é fácil de verificar.*

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — **1.º Exame extraordinário — 6 de Março de 1953.**

I

3690 — Dada a circunferência de equação $x^2+y^2=5$ indique os limites de variação de $-a-$ por forma que existam duas tangentes conduzidas por $P(a,2)$ à circunferência anterior. Fixe um desses valores de a e considere as duas tangentes t_1 e t_2; determine a equação do lugar dos centros das circunferências tangentes a t_1 e t_2. R: *A circunferência tem centro em* O (0, 0) *e* $r=\sqrt{5}$. *As tangentes estão entre as rectas do feixe de centro em* P, $y-2 = m(x-a)$, *e deverão passar à distância* $\sqrt{5}$ *da origem, isto é:* $\left|\frac{-2-ma}{\sqrt{1+m^2}}\right| = \sqrt{5}$ *ou* $|2+ma| = \sqrt{5(1+m^2)}$ *ou* $(2+ma)^2 = 5(1+m^2)$ *devendo a equação* $m^2(a^2-5)+4am-1=0$ *admitir duas raízes* m_1 *e* m_2 *reais e distintas;* $16a^2+4(a^2-5) = 20a^2-20>0$ *ou* $a^2>1$ *ou* $|a|>1$. *Então deverá ser* $a<-1$ *ou* $a>1$.

Escolhamos um valor de a *que faça* $20a^2-20$ *quadrado perfeito, por exemplo,* $20a^2-20=4$, $20a^2=24$, $a=\sqrt{\frac{6}{5}}$. *Escolhendo assim* a, *vem:* $m=\frac{-2a\pm 1}{a^2-5}$. *As equações das tangentes são:* $t_1 \equiv y-2-m_1(x-a)=0$ *e* $t_2 \equiv y-2-m_2(x-a)=0$.

Se M (X , Y) *é um ponto equidistante de* t_1 *e* t_2, *deverá ser*

$$\left|\frac{Y-2-m_1(X-a)}{\sqrt{1+m_1^2}}\right|=\left|\frac{Y-2-m_2(X-a)}{\sqrt{1+m_2^2}}\right|$$

e obtemos duas rectas perpendiculares de equações $\frac{Y-2-m_1(X-a)}{\sqrt{1+m_1^2}}=\pm\frac{Y-2-m_2(X-a)}{\sqrt{1+m_2^2}}$. *Uma destas rectas passa evidentemente pela origem.*

3691 — Indique a relação que liga a derivada duma função com a derivada da sua inversa. Dada a ção $y=2\cdot arc\,sec\sqrt{1+x^2}$ prove que $\frac{dx}{dy}=\frac{x^2+1}{2}$.

R: *Seja* y = f (x) *uma função unívoca, definida em* X *ao qual* a *é ponto interior; se* f (x) *é contínua em* a, *e admite uma inversa unícoca nas vizinhanças de* b = f (a), *inversa* x = φ (y) *diferenciável em* b, *então* f (x) *é diferenciável em* a, *e a sua derivada no ponto* a, *é o inverso aritmético da derivada da função inversa no ponto* b: $\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=a}=$

$$=\frac{1}{\left[\frac{dx}{dy}\right]_{y=b=f(a)}}\qquad \frac{dy}{dx}=2\cdot\frac{\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{(\sqrt{1+x^2})^2-1}}=$$

$$=\frac{2}{1+x^2}\ \textit{donde}\ \frac{dx}{dy}=\frac{1+x^2}{2}.$$

II

3692 — Quantos termos positivos e negativos tem uma série simplesmente convergente de termos reais? Justifique.

3693 — x_n é um polinómio inteiro de grau dois em y_n e z_n de coeficientes reais: prove que x_n tem limite real finito quando o tiverem y_n e z_n. R: *Um polinómio de 2.º grau em* y_n *e* x_n, *suposto completo, é da seguinte forma*: $ay_n^2+by_nz_n+cz_n^2+dy_n+ez_n+f$. *Deveriam enunciar-se os teoremas, sobre os limites da soma e produto, e com eles calcular o limite do polinómio.*

3694 — Prove que uma função crescente em (a, b) é crescente em cada ponto de (a, b). R: *Por hipótese:* $x' < x''$ *implica* $f(x') \leqslant f(x'')$. *Qualquer que seja* c *vem*: $x'<c<x''$ *a implicar* $f(x')\leqslant f(c)\leqslant f(x'')$, *logo crescente em* c.

3695 — A função $f(x)$ está definida em c, mas não tem derivada nesse ponto interior do domínio, tendo contudo derivadas laterais finitas de sinais contrários: prove que se $f(x)$ é contínua ela tem um extremo em c. Poderá afirmar a existência de extremo se a função não é contínua em c? Porquê? R: *Por hipótese, com* $x' < c < x''$, *as fracções* $\frac{f(x')-f(c)}{x'-c}$ *e* $\frac{f(x'')-f(c)}{x''-c}$ *são de sinais contrários, para uma vizinhança de* c *que as faça ter os sinais dos respectivos limites; como os denominadores são de sinais contrários os numeradores são necessàriamente do mesmo sinal, por exemplo, ambos positivos; sendo a função contínua em* c, *virá* $f(x')\geqslant f(c-0)=$ $=f(c)=f(c+0)\leqslant f(x'')$ *e portanto, haverá um mínimo em* c. *Então, dum e doutro lado de* c *temos* $f(x)\geqslant f(c)$.

Com $x'<c$ *tem-se* $f(x')-f(c)=(x'-c)[f'_e(c)+\alpha]$ *e do mesmo modo com* $c<x''$ *vem* $f(x'')-f(c)=$ $=(x''-c)[f'_d(c)+\beta]$ *visto serem finitas as derivadas laterais; então dado* $\delta>0$ *é possível determinar* $\varepsilon>0$ *tal que* $c-\varepsilon<x'<c<x''<c+\varepsilon$ *faça* $|f(x)-f(c)|<\delta$. *A função será sempre contínua em* c, *não sendo de considerar a última parte da questão.*

3696 — Estude a série $1+\frac{1}{2}x+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}x^2+$ $+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}x^3+\cdots$. R: *O termo geral da série é* $u_n=$ $=\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot2n}x^n$.

$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\frac{2n+1}{2n+2}|x|\to|x|$. *Intervalo de convergência* $(-1, 1)$. *Para* $x=1$ *vem a série* $\sum\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot2n}$ *para a qual se tem* $\frac{2n+2}{2n+1}=$ $=1+\frac{1/2}{n}+\frac{-1-1/2n}{2n+1}$ *e, pelas regras de* Gauss, *a série é divergente.*

Para $x=-1$ *vem a série* $\sum(-1)^n\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot2n}$ *que é alternada; como* $a_{n+1}=a_n\frac{2n+1}{2n+2}$ *a série é decrescente. Mas podemos escrever*

$$\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{7}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n-2}\cdot\frac{1}{2n}=$$
$$=\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{2n-2}\right)\frac{1}{2n}$$

e o termo geral não pode tender para zero porque, depois de dividido por $\frac{1}{n}$, *tende para* ∞. *A série é divergente.*

III

3697 — É dada uma sucessão u_n) para a qual o conjunto (u_n) tem só dois pontos de acumulação (próprios): prove que existe, pelo menos, uma subsucessão u_{α_n}) com limite. Pode, nas condições anteriores, existir uma subsucessão sem limite? Porquê?

Neste caso, diga quando a sucessão u_n^2) tem limite finito.

Calcule $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{3}{n^2+1}\right)^n$. R: *Sejam* $u' \neq v'$ *os dois pontos de acumulação próprios. Há uma vizinhança de* u' *e uma vizinhança de* v' *sem pontos em comum; dentro de cada uma delas encontramos* u_{α_1} *e* u_{β_1} *distintos de* u' *e de* v' *respectivamente. Considerando novas vizinhanças de* u' *e* v' *que excluam* u_{α_1} *e* u_{β_1} *encontramos dentro delas* u_{α_2} *e* u_{β_2}, *e assim sucessivamente.*

As subsucessões u_{α_n}) *e* u_{β_n}) *têm respectivamente limites* u' *e* v'. *A subsucessão* $u_{\alpha_1}, u_{\beta_2}, u_{\alpha_3}, u_{\beta_4}, \cdots$ *não tem limite. A sucessão* u_n^2) *terá limite quando* $u' = -v'$ *e o limite será* $|u|^2 = v^2$.

$$\left(1-\frac{3}{n^2+1}\right)^n = e^{n\log\left(1-\frac{3}{n^2+1}\right)} = e^{n\cdot\xi_n\cdot\frac{-3}{n^2+1}} \to 1$$

visto que $\xi_n \to 1$.

3698 — Defina função regular e demonstre o teorema de Cauchy para estas funções. Deduza dele o teorema de Lagrange.

Prove que se $f'(x) \equiv \varphi'(x)$ em (a,b) então $f(x) - \varphi(x) = C$ (C constante).

Verifique o teorema de Lagrange com a função $f(x)=x^3$ em (a,b). R: *Se* $f'(x) \equiv \varphi'(x)$ *em* (a,b) *então* $f(x)-\varphi(x)=F(x)$ *tem em* (a,b) *uma derivada* $F'(x) \equiv 0$ *sendo portanto regular em* (a,b). *Portanto com qualquer* $a<x<b$ *vem* $\frac{F(x)-F(a)}{x-a} = F'(x_1) = 0$ *donde* $F(x)=F(a)$ *para todo o* x *em* (a,b).

$f(x)=x^3$ *em* (a,b) *dá* $f(a)=a^3$ *e* $f(b)=b^3$ *e portanto* $\frac{a^3-b^3}{a-b} = 3x_1^2$. *Resta provar que* $a<x_1<b$ $(0<a<b)$.

$$Mas\ x_1 = +\sqrt{\frac{1}{3}\frac{a^3-b^3}{a-b}} = +\sqrt{\frac{1}{3}(a^2+b^2+ab)} = +\sqrt{\frac{1}{3}[(a+b)^2-ab]}.$$

$$Portanto\ \sqrt{\frac{3a^2}{3}} < \sqrt{\frac{a(a+2b)}{3}} = \sqrt{\frac{(a+b)^2-b^2}{3}} < x_1 < \sqrt{\frac{(a+b)^2-a^2}{3}} = \sqrt{\frac{b(2a+b)}{3}} < \sqrt{\frac{3b^2}{3}}.$$

Enunciados e resoluções dos n.os 3681 a 3698 de J. R. Albuquerque.

ANÁLISE INFINITÉSIMAL

I. S. C. E. F. — Cálculo — 2.º Exame de frequência — 19 de Junho de 1948.

I

3699 — Achar a área da curva $x^{2n}+y^{2n}=a^2(xy)^{n-1}$, designando n um número inteiro e positivo.

Nota: Ponha-se $y=tx$, sendo t uma variável auxiliar.

II

3700 — Integrar a equação

$$\frac{d^n y}{dx^n} - \frac{n}{1}a\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \frac{n(n-1)}{2!}a^2\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \cdots + (-a)^n y = e^{ax}.$$

III

3701 — Quantas vezes se deve lançar três dados para ter a probabilidade p de obter pelo menos uma vez o ponto 15?

I. S. C. E. F. — Cálculo — 2.º Exame de frequência — 28 de Junho de 1948.

I

3702 — Calcular o integral duplo $\iint_A x\,dx\,dy$, em relação à área A limitada pela curva $3x^2+2x-y+1=0$ pelo eixo dos YY, e pela tangente à curva no ponto de curvatura máxima.

II

3703 — Estudar os pontos múltiplos da curva

$$f(x,y) = x^{2/3} + y^{2/3} - a^{2/3} = 0.$$

III

3704 — Fez-se uma tiragem de dados, tendo-se obtido 5 pontos. Qual é a probabilidade de que a jogada se tenha feito com 4 dados?

I. S. C. E. F. — Cálculo — 2.º Exame de frequência — 24 de Junho de 1949.

I

3705 — Calcular o integral duplo

$$I=\iint_D \frac{dx\,dy}{(a^2+x^2)(b^2+y^2)}\,.$$

D é o rectângulo definido por $x=0$ $x=c$ $y=0$ $y=d$. Calcular ainda o integral na hipótese de c e d crescerem além de todo o limite.

II

3706 — Dá-se a equação diferencial $(ax+by)\,dx+ +(a'x+b'y)\,dy=0$ em que a, a', b, b', são números comensuráveis; em que caso o integral é algébrico?

III

3707 — Calcular a razão dos volumes gerados pela curva $y=e^x$ $0\leqslant x\leqslant 1$:
$a)$ em torno de OX. $b)$ em torno de OY.

I. S. C. E. F. — Cálculo — 2.º Exame de frequência — 17 de Junho de 1950.

I

3708 — Calcular o integral $\displaystyle\iint_A \frac{1}{xy}\,dx\,dy$,

sendo A a área limitada pelas circunferências

$$\begin{cases} x^2+y^2=2x \\ x^2+y^2=4x \\ x^2+y^2=2y \\ x^2+y^2=4y\,. \end{cases}$$

II

3709 — Determine para a curva $x=\operatorname{sen} t$ $y=\cos t$, $z=\operatorname{tg} t$ o triedro intrinseco ou de Frenet referente ao ponto de parâmetro $t=\dfrac{\pi}{4}$.

III

3710 — Determine um factor integrante de um dos tipos $\mu(x)$, $\mu(y)$, $\mu(x+y)$, $\mu(xy)$ e integre e equação $(x^2-1)\,y'-x\,y=x^2$. Não poderia resolver esta equação por outros métodos? No caso afirmativo resolva por um outro método.

I. S. C. E. F. — Cálculo — 2.º Exame de frequência — 28 de Junho de 1950.

I

3711 — Calcular o integral triplo

$$\iiint_V \frac{dx\,dy\,dz}{(a^2+x^2+y^2+z^2)^2} \quad \text{sendo } V \text{ o 1.º octantante.}$$

II

3712 — Achar os volumes gerados pela rotação da elipse $x=a\cos\theta$ $y=b\operatorname{sen}\theta$ em torno de:
$a)$ OX. $b)$ OY.

III

3713 — Determinar as equações das curvas cujo comprimento da tangente é: $a)$ Constante $b)$ igual à abscissa $c)$ igual ao dobro da ordenada.

I. S. C. E. F. — Cálculo — Exame final — 11 de Outubro de 1950.

I

3714 — As duas superficiais cilindricas $2x^3= =3a^2y$ e $az=x^2$ passam ambas pela origem. Achar o comprimento do arco da sua intersecção, compreendido entre os pontos $O(0,0,0)$ e $P(x,y,z)$.

II

3715 — Dada a variável casual

$$X\begin{cases} 1,2,3,4,5 \quad (\text{valores de } X) \\ \dfrac{2}{5},\dfrac{1}{10},\dfrac{1}{10},\dfrac{1}{10},\dfrac{3}{10} \quad (\text{valores de } P), \end{cases}$$

calcular a probabilidade de que o desvio absoluto seja de módulo igual ou inferior a 2.

III

3716 — Averiguar a existência de máximos ou mínimos para a função $f(u)=\displaystyle\int_0^{u^2} \operatorname{arc\,tg}\frac{x}{u^2}\,dx$.

I. S. C. E. F. — Cálculo — 2.º Exame de frequência — 11 de Junho de 1951.

I

3717 — $a)$ Determinar as faces e as arestas do triedro de Frenet referente à curva $x=\log t$ $y=t^2$ $z=t^3$ no ponto de parâmetro $t=1$. $b)$ Calcule também as curvaturas de flexão e torsão, e as coordenadas de centro do curvatura.

II

3718 — Achar o valor médio da função $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ nos domínios: *a*) Superfície do sólido Σ. *b*) Volume de sólido Σ. O sólido Σ é formado pela região limitada pelas superfícies $z^2 = x^2 + y^2$ e $(z-1)^2 + x^2 + y^2 = 1$ (ramo positivo).

III

3719 — Sendo P e Q duas funções de x e de y, achar a condição para que a diferencial $P\,dx + Q\,dy$ admita um factor integrante função de $u = y^2 - x$.

Mostrar que este factor integrante se pode obter por quadratura, determine-o e integre a equação $P\,dx + Q\,dy = 0$ no caso de ser:

$$P = (2y^2 - 2x - 1)\,e^x + (2y^2 - 3x)\,e^y$$
$$Q = 2y\,e^x + 2x\,(y^2 + y - x)\,e^y .$$

I. S. C. E. F. — Cálculo — Exame final — 11 de Outubro de 1952.

I

3720 — É dada a família de superfícies $a^2x^2 + \lambda^2y^2 + a\,z^2 + 1 = 0$ onde a é um parâmetro arbitrario e λ uma constante *determinada*. Será possível dar a λ um valor tal que a aresta de reversão da superfície envolvente da família passe pela origem das coordenadas? Verifique que, para qualquer valor de λ, essa aresta de reversão é sempre uma curva plana.

II

3721 — 1.º Efectuar a mudança de variáveis $\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}$ em cada uma das seguintes equações:

a) $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

b) $$x\frac{\partial u}{\partial y} - y\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

c) $$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

sendo $u = f(x,y)$.

2.º Diga qual é o significado vectorial de cada uma das equações *a*), *b*), *c*).

III

3722 — Determinar a família de curvas planas para as quais o segmento da tangente intersectada pelos eixos coordenados é constante. Verifique que só interessa a solução singular.

I. S. C. E. F. — Cálculo — 1.º Exame de Frequência — 7 de Março de 1953.

I

Primitivação

3723 — Calcule as seguintes primitivas

1) $$\int \frac{\mathrm{sen}\,x\,dx}{\mathrm{sen}\,(x-a)\,\mathrm{sen}\,(x-b)\,\mathrm{sen}\,(x-c)} \qquad a \neq b\,,c$$

assumindo valores diferentes entre si

2) $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{1+\mathrm{sen}\,x}$. R: 1) *Decompondo a fracção vem*

$$\frac{\mathrm{sen}\,x}{\mathrm{sen}\,(x-a)\,\mathrm{sen}\,(x-b)\,\mathrm{sen}\,(x-c)} = \frac{A}{\mathrm{sen}\,(x-a)} + \frac{B}{\mathrm{sen}\,(x-b)} + \frac{C}{\mathrm{sen}\,(x-c)} \quad \textit{com}$$

$$A = \frac{\mathrm{sen}\,a}{\mathrm{sen}\,(a-b)\,\mathrm{sen}\,(a-c)} \qquad B = \frac{\mathrm{sen}\,b}{\mathrm{sen}\,(b-a)\,\mathrm{sen}\,(b-c)}$$

e $C = \dfrac{\mathrm{sen}\,c}{\mathrm{sen}\,(c-a)\,\mathrm{sen}\,(c-b)}$; *logo a primitiva será*

$$A\log\mathrm{tg}\frac{x-a}{2} + B\log\mathrm{tg}\frac{x-b}{2} + C\log\mathrm{tg}\frac{x-c}{2} + K .$$

2) *Multiplicando ambos os membros da função integranda por* $1-\mathrm{sen}\,x$ *e integrando por partes vem:*

$$I = \int x\sec^2 x\,dx - \int x\sec x\,\mathrm{tg}\,x\,dx = x\,\mathrm{tg}\,x + \log\cos x - x\sec x + \log\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) + C .$$

II

Cálculo vectorial

3724 — Dão-se os pontos $A(1,2)$, $B(2,1)$, e $C(\alpha,\beta)$. Determinar vectorialmente: a) O lugar geométrico dos baricentros do triângulo ABC quando o ponto $C(\alpha,\beta)$ descreve: 1) a recta $y=2x$ 2) a circunferência de centro na bissectriz $y=x$, tangente à recta $y=2x$, de raio 3, situada no 1.º quadrante. R: *O baricentro do triângulo é o ponto* O *de coordenadas* $X = 1 + \frac{\alpha}{3}$ *e* $Y = 1 + \frac{\beta}{3}$. *Para* 1), $\beta = 2\alpha$ *e* $6X - 3Y = 1$. *Para* 2), *como o ponto* C *deve descrever a circunferência* $(x - 3\sqrt{5})^2 + (y - 6\sqrt{5})^2 = 9$ *vem* $(\alpha - 3\sqrt{5})^2 + (\beta - 6\sqrt{5})^2 = 9$ *donde*

$$\left(X - \frac{1+3\sqrt{5}}{3}\right)^2 + \left(Y - \frac{1+3\sqrt{5}}{3}\right)^2 = 9 ,$$

circunferência do mesmo raio que a inicial e de centro no ponto $\left(\dfrac{1+3\sqrt{5}}{3}, \dfrac{1+3\sqrt{5}}{3}\right)$.

b) O ponto C de modo que $\overrightarrow{BC}$ seja ortogonal a $\overrightarrow{AB}$ e o triângulo ABC tenha área igual a 2.

R: *Deverá ser* $\overrightarrow{AB}|\overrightarrow{BC}=0$ *ou* $[(\alpha-2)\,I+(\beta-1)\,J]|\,|(I-J)=0 \to \alpha=1+\beta$. Para o triângulo ter a área 2

$$|\overrightarrow{AB}|\,|\overrightarrow{BC}|=4$$

$$\sqrt{2}\,\sqrt{(\alpha-2)^2+(\beta-1)^2}=4 \to (\alpha-2)^2+(\beta-1)^2=8\,.$$

Resolvendo o sistema $\begin{cases}\alpha=1+\beta\\(\alpha-2)^2+(\beta-1)^2=8\end{cases}$

$$\alpha=4 \; e \; \beta=3 \qquad C(4,3)$$
$$\alpha=0 \quad \beta=-1 \qquad C(0,-1)$$

c) Os vectores $\vec{x}$ tais que $\overrightarrow{AB}\wedge\vec{x}=\overrightarrow{BC}$, admitindo que a equação é possível e que o angulo de $\overrightarrow{AB}$ com $\overrightarrow{AC}$ é de 60°.

Solução geral do problema e solução particular correspondente a $|\vec{x}|=3$. R: *Deverá ser* $\alpha=\beta+1$

$$|\overrightarrow{AC}|\,|\overrightarrow{AB}|\times\cos 60^\circ=\overrightarrow{AB}|\overrightarrow{AC}$$

logo $\begin{cases}\alpha=\beta+1\\\sqrt{(\alpha-1)^2+(\beta-2)^2}\,\sqrt{2}\times\dfrac{1}{2}=\alpha-1-\beta+2\end{cases}$

$$\alpha=2+\sqrt{3} \qquad \beta=1+\sqrt{3}$$
$$\alpha=2-\sqrt{3} \qquad \beta=1-\sqrt{3}$$

$$\vec{x}=\frac{\overrightarrow{BC}\wedge\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|^2}+\lambda\,\overrightarrow{AB}$$

$$\vec{x}_1=-\sqrt{3}\,K+\lambda(I-J)\,,\quad \vec{x}_2=+\sqrt{3}\,K+\lambda(I-J)\,.$$

Para $|\vec{x}|=3$ *vem* $\vec{x}=\pm\sqrt{3}\,K$.

3725 — Determinar vectorialmente a intersecção da superfície de equação: $P=0+\operatorname{sen}\theta\cos\varphi\,I+\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi\,J+\cos\theta\,K$ $\left(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2},\ 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi\right)$, com a recta que passa pelo ponto $(2,2,2)$ e é perpendicular ao plano que intersecta os eixos $0X$, $0Y$ e $0Z$ respectivamente às distâncias $1,1,1$.

Equação do plano tangente à superfície no ponto de abscissa e ordenada respectivamente iguais a $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$. R: *Da equação* $P=0+\operatorname{sen}\theta\cos\varphi\,I+\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi\,J+\cos\theta\,K$ *resulta* $x=\operatorname{sen}\theta\cos\varphi$, $y=\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi$, $z=\cos\theta$ *ou* $x^2+y^2+z^2=1$, *equação duma esfera.*

O plano que passa pelos pontos $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ *e* $(0,0,1)$ *tem por equação* $x+y+z=1$.

A recta terá por equações

$$\frac{x-2}{1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-2}{1}$$

e intersecta a esfera nos pontos

$$E\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \quad e \quad F\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

A equação do plano tangente à esfera no ponto

$$\frac{1}{2},\frac{1}{2},\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

é

$$\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\left(y-\frac{1}{2}\right)\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\left(z\mp\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=0\,.$$

Como há 2 pontos de tangência $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ *e* $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ *obtem-se as equações dos 2 planos normais*

$$x+y+\sqrt{2}\,z-2=0$$
$$x+y-\sqrt{2}\,z-2=0\,.$$

3726 — Um sistema de vectores tem os seguintes momentos resultantes:

Em relação a

$$A(1,0,0) \qquad \vec{M}_A=\lambda I+J+K$$
$$B(0,1,0) \qquad \vec{M}_B=2I+\mu J+2K$$
$$C(0,0,\alpha) \qquad \vec{M}_C=3I+3J+\nu K.$$

Sabendo que o vector resultante é $\vec{R}=-I+2J-K$ determinar α, λ, μ e ν. R: *Como* $M_{0'}|(0'-0)=M_0|(0'-0)$ *e* $M_{0'}=M_0+R\wedge(0'-0)$ *vem:*

$$\begin{cases}(2I+\mu J+2K)|(-I+J)=(\lambda I+J+K)|(-I+J)\\(3I+3J+\nu K)|(-I+\alpha K)=(\lambda I+J+K)|(-I+\alpha K)\\(3I+3J+\nu K)|(-J+\alpha K)=(2I+\mu J+2K)|(-J+\alpha K)\\2I+\mu J+2K=(\lambda I+J+K)+(-I+2J-K)\wedge(-I+J)\end{cases}$$

donde $\begin{cases}\lambda+\mu-3=0\\\lambda+\alpha\nu-\alpha-3=0\\\mu+\alpha\nu-2\alpha-3=0\\\lambda=1\\\mu=2\end{cases}$ $\qquad \begin{aligned}\alpha&=1\\\lambda&=1\\\mu&=2\\\nu&=3\end{aligned}$

III

Integração definida e paramétrica

3727 — $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^8+x^5+1}{(x^4+2x^2+1)^3}\,dx.$

R: *Como* $x^4+2x^2+1=(x^2+1)^2$, *utilizando a regra de* Jacobi *decompõe-se a fracção*

$$\frac{x^8+x^5+1}{(x^2+1)^6}=\frac{x-2}{(x^2+1)^6}-\frac{2}{(x^2+1)^5}+\frac{x}{(x^2+1)^4}+\frac{4}{(x^2+1)^3}\,.$$

Por integração vem:

$$\frac{1}{10}+\frac{1}{6}-2\int_0^\infty\frac{dx}{(x^2+1)^6}-2\int_0^\infty\frac{dx}{(x^2+1)^5}+4\int_0^\infty\frac{dx}{(x^2+1)^3}.$$

Os integrais calculam-se pela fórmula

$$I_n = \int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+1)^n} = \frac{2n-3}{2n-2} I_{n-1} .$$

3728 – A partir do integral

$$\int_0^1 \frac{dx}{e^x+a} \quad \text{calcule} \quad \int_0^1 \frac{dx}{(e^x+1)^2} .$$

R: $F(a) = \int_0^1 \frac{dx}{e^x+a} = \int_0^1 \frac{e^{-x}}{a\,e^{-x}+1} dx =$

$$= -\frac{1}{a}\Big[\log(a\,e^{-x}+1)\Big]_0^1 = -\frac{1}{a}\log\frac{a\,e^{-1}+1}{a+1} .$$

Por derivação paramétrica nota-se que:

$$\int_0^1 \frac{dx}{(e^x+1)^2} = -F'(1) .$$

3729 — Calcular

$I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \text{sen}^4 3\theta \cos^3 6\theta \, d\theta$. R: *Fazendo* $3\theta = \varphi$ *vem*

$$I = \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}^4\varphi \cos^3 2\varphi \, d\varphi =$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}^4\varphi\,(-2\,\text{sen}^2\varphi+1)^3 \, d\varphi =$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\text{sen}^4\varphi - 4\,\text{sen}^6\varphi + 12\,\text{sen}^8\varphi - $$
$$-8\,\text{sen}^{10}\varphi)\, d\varphi .$$

Os integrais de tipo $I_{2n} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}^{2n}\varphi \, d\varphi$ *calculam-se pela fórmula*

$$I_{2n} = \frac{2n-1}{2n} \times \frac{2n-3}{2n-2} \times \cdots \times \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} .$$

Enunciados e soluções dos n.os 3699 a 3729 de M. S. Madureira.

PROBLEMAS

Com o n.º 53 terminou o primeiro concurso anual. O Sr. José Machado Gil, da Barquinha, foi o único concorrente que resolveu todos os problemas propostos na Secção Média desde o n.º 51. Tem por isso direito ao prémio que anunciamos: 1 exemplar do vol. **1**, fasc. 1 e 2 da *Álgebra Moderna* por L. Van der Waerden e 1 exemplar do vol. I do *Boletim da S. P. M.*, que lhe enviámos. A Redacção deseja assinalar que se receberam também, da quasi totalidade dos problemas, soluções muito elegantes do Sr. Vinhas Novais.

Com o n.º 54 iniciou-se novo concurso que termina com este número 56. Dos seus resultados daremos oportunamente notícia.

Problemas propostos ao concurso

Secção Elementar

3730 – Mostre que qualquer que seja x é impossivel a seguinte dupla desigualdade

$$-2 \leqslant tg\,2x\,tg\,x < 0$$

3731 — Sejam os pontos $O(0,0)$, $P(1,p)$, $Q(q,0)$ e $R(4,r)$ os vértices consecutivos duma poligonal plana, de tal modo que $\sphericalangle OPQ = \sphericalangle PQR = 90^\circ$. Se for $p = 2\cos A$, mostre que $r = 2\cos 3A$.

Secção Média

3732 — Demonstrar que a representação gráfica da função $y = [x]^2 + (2[x]+1)(x-[x])$, onde $[x]$ representa o maior inteiro contido em x, para $x > 0$ é uma linha poligonal inscrita na parábola $y = x^2$. (Darboux).

3733 – Duas esferas de raios R e r assentes no plano xy são tangentes exteriormente. A de raio R tem o centro na parte positiva do eixo dos zz, e a outra tem o centro de coordenadas positivas no plano yz. Determine as coordenadas do ponto de contacto.

N. R. — Os números 3650 a 3655, atribuidos aos problemas desta secção no n.º 55 da revista, devem ser substituidos pelos n.os 3669 a 3674. Pede-se ao leitor para fazer a respectiva correcção, evitando assim enganos em futuras citações.

Por ter saido com incorrecções o enunciado do problema 3671 no mesmo número (que figurou com o n.º 3652) publica-se a seguir o enunciado correcto:

3671 – Designando por $[x]$ o maior inteiro contido em x demonstrar que sendo n um inteiro positivo e x um número real se tem sempre

$$[x] + \left[x+\frac{1}{n}\right] + \left[x+\frac{2}{n}\right] + \cdots + $$
$$+ \left[x+\frac{n-1}{n}\right] = [n\,x]$$