FÍSICA MATEMÁTICA

F. C. C. — Física Matemática — **1.º Exame de Frequência — 1952-53.**

3773 — Determinar a série de Fourier da função que coincide com $x^2/4$ em $(-\pi, \pi)$.

R: $$\frac{\pi^2}{12} + \sum_1^\infty (-1)^n \frac{1}{n^2} \cos n x .$$

3774 — A partir do resultado anterior provar a igualdade
$$\sum_1^\infty \frac{(-1)^n}{(2n)^2} = \frac{\pi^2}{48} .$$

R: *Basta fazer* $x = \pi/2$, *recordando que a soma da série é* $[f(x+0) + f(x-0)]/2$.

3775 — Determinar a solução da equação integral
$$u(x) = x + \int_0^x x\, t\, u(t)\, dt$$
e mostre que é uma função inteira. R: *A solução é* $u(x) = \sum f_n(x)$, *com* $f_n(x) = \int_0^x x \cdot t \cdot f_{n-1}(t)\, dt$.

Obtém-se $f_n(x) = \dfrac{x^{3n-1}}{(n-1)!\, 3^{n-1}}$, *e a série* $u(x)$ *converge para todo o valor de* x.

3776 — Efectuando a mudança de variáveis
$$u = x + at, \quad v = x - at,$$
transforma-se a equação da corda vibrante
$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$$
na equação $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\, \partial v}$.

Posto isto, integre a equação da corda vibrante e determine a solução $z(x, t)$ correspondente às condições iniciais.
$$\begin{cases} z(x, 0) = 1 - x^2 \\ z'_t(x, 0) = a . \end{cases}$$

R: $z = 1 - (x - at)^2$.

As soluções dos n.ºs 3746 a 3761 e 3773 a 3776 são de Luís Albuquerque. As soluções dos n.ºs 3762 a 3772 são de M. Madureira.

PROBLEMAS

Problemas propostos ao concurso

Secção Elementar

3777 — Determine a área do circulo menor de uma esfera de raio R, sabendo que o diametro do circulo é precisamente a aresta do tetraedro inscrito na esfera. Mostre que os lados do quadrado e do triângulo equilatero inscritos na circunferência que limita o circulo menor são respectivamente as arestas do cubo e do octaedro regular inscritos na esfera.

3778 — Mostre que o quadrado da soma dos quadrados de três números se pode escrever sob a forma da soma de três quadrados inteiros.

Secção Média

3779 — Prove que, sendo α um número complexo de modulo 1, o conjunto dos números α^n, para $n = 1, 2, 3, \cdots$ é denso sobre o conjunto de todos os números x tais que $|x| = 1$, quando o argumento de α medido em graus é um número irracional.

3780 — Mostre que a sucessão assim definida $u_1 = a$, $u_2 = b$ e $u_n = (u_{n-2} + u_{n-1})/2$, para $n > 2$, é convergente e que o seu limite é $(a + 2b)/3$.

Resoluções dos problemas do concurso propostos no n.º 54

3781 — Apresentaram soluções os Srs. Vinhas Novais, António H. Alves de Oliveira e Fernando de Jesus, publicando-se a solução deste último:

R: *Aproveitando a propriedade que diz: «Num triângulo, a bissetriz dum ângulo interno divide o lado oposto em dois segmentos aditivos directamente propocionais aos lados adjacentes», pode escrever-se (ver figura)*:

$$\text{I)} \begin{cases} m + n = a \\ \dfrac{m}{c} = \dfrac{n}{b} \end{cases} \quad \textit{o que dá} \quad \begin{cases} m = \dfrac{a\,c}{b+c} \\ n = \dfrac{a\,b}{b+c} \end{cases}$$

Em seguida, aplicando o teorema que afirma: «Num triângulo o quadrado do lado oposto a um ângulo agudo é igual à soma dos quadrados dos outros dois menos o dobro do produto dum deles pela projecção do outro sobre ele» vem então para o $\Delta[A\,C\,D]$:

$$n^2 = m^2 + b^2 - 2\,b \cdot \frac{c}{2}$$

ou seja, aproveitando os resultados de I),

$$\frac{a^2\, b^2}{(b+c)^2} = \frac{a^2\, c^2}{(b+c)^2} + b^2 - b\,c$$