MATEMÁTICAS ELEMENTARES

PONTOS DOS EXAMES DE APTIDÃO ÀS ESCOLAS SUPERIORES

Exames de aptidão para frequência das licenciaturas em Ciências Matemáticas, Ciências Fisico-Químicas e Ciências Geofísicas, preparatórios para as escolas militares e curso de engenheiros geógrafos — Ano de 1953 — Ponto n.º 1.

3734 — Provar que dois números ímpares consecutivos são sempre primos entre si.

R: *Sejam* $2n+1$ *e* $2n+3$ *os números. Todo o divisor comum dos dois números será um divisor da sua diferença isto é de* 2, *como os divisores de* 2 *são* 1 *e* 2 *e este último não é neste caso divisor dos dois números só* 1 *o será e portanto os números são primos entre si.*

3735 — Calcular dois inteiros positivos, sabendo que o seu m. m. c. é 308 e que o seu m. d. c. é 11. Achar as diversas soluções do problema.

R: *Seja* $a=11m$ *e* $b=11n$ *os números cujo* m d c *é* 11 *e cujo* m m c *é* 308. *Será então* $308=11\,m.n.$, *onde* m *e* n *são inteiros primos entre si. Daquela fórmula resulta* $mn=28$ *e portanto ou* $m=1$ *e* $n=28$ *ou* $m=2$ *e* $n=14$, *ou* $m=4$ *e* $n=7$, *donde as três soluções:* $a_1=11, b_1=308$; $a_2=22, b_2=154$; $a_3=44, b_3=77$.

3736 — Qual o resto da divisão do produto abc por 9, sabendo que os restos das divisões de a, b e c por 9 são 3, 4 e 8 respectivamente. Justificar a resposta.

R: *Em vista do enunciado é* $abc\equiv 3.4.8$ *mod 9 ou seja* $abc\equiv 96$ *mod 9 ou ainda* $abc\equiv 6$ *mod 9, e daqui resulta ser o resto* 6. *A justificação resulta da definição de congruência e das propriedades das congruências.*

3737 — Decompor de todos os modos possíveis o número 3000 em duas parcelas inteiras positivas, múltiplas respectivamente de 18 e de 31.

R: *Será* $18x+31y=3000$. *Esta equação tem uma solução inteira* $y=-6, x=177$, *donde as soluções gerais em números inteiros* $x=177+31m$; $y=-6-18m$ *onde* m *é um inteiro? As soluções inteiras positivas obtem-se daquelas fórmulas desde um inteiro tal que* $-177/31<m<-1/3$ *quer dizer que seja* $m-5\leqslant m<-1/3$, *donde vem para* m *os valores* $-5, -4, -3, -2$ *e* -1. *O problema tem assim 5 soluções.*

3738 — Determinar m de modo que as raízes da equação $x^2+2mx+4=0$ sejam reais, desiguais e ambas positivas.

R: *Terá que ser* $\Delta=m^2-4>0$, *isto é,* $m<-2$ *ou* $m>2$; *e alem disso ser* $-m>0$, *donde finalmente a solução do problema* $m<-2$.

3739 — Determinar x de modo que o 2.º, o 3.º e o 5.º termos do desenvolvimento de $(2+x)^5$ estejam em progressão geométrica.

R: *Os termos pedidos são, o* 2º : $80x$, *o* 3º : $80x^2$ *e o* 5º : $10x^4$. *Para que os termos estejam em progressão geometrica terá que ser* $(80x^2):(80x)=(10x^4):(80x^2)$ *donde* $x=\frac{1}{8}x^2$ *e daqui as duas soluções* $x=0$ *ou* $x=8$. *A solução* $x=0$ *servirá desde que se considere a existência de progressões geometricas de razão* 0, *fora disso não.*

Exames de aptidão para frequência das licenciaturas em Ciências Matemáticas, Ciências Fisico-Químicas e Ciências Geofísicas, preparatórios para as escolas militares e curso de engenheiros geógrafos — Ano de 1953 — Ponto nº 2.

3740 — Provar que o produto de dois números pares consecutivos é um múltiplo de 8.

R: *Sejam* $a=2n$ *e* $b=2n+2$ *os números pares consecutivos. Será* $ab=2n(2n+2)=4n^2+4n=4n(n+1)$; *por outro lado é ou* $n=2p$ *ou* $n=2p+1$ *No primeiro caso* $ab=4.2p(n+1)=8p(n+1)$ *e o produto é multiplo de* 8. *No segundo caso é* $n+1=2p+2$ *e então* $ab=4n(2p+2)=8n(p+1)$ *e do mesmo modo é* ab *multiplo de* 8.

3741 — Determinar os inteiros positivos que divididos por 7 dão resto superior ao cociente em 3 unidades.

R: *A equação que resolve o problema é* $x=7y+y+3$ *ou seja* $x-8y=3$ *da qual uma solução em números inteiros se vê imediatamente ser* $x=3, y=0$; *daqui as soluções gerais, em números inteiros* $x=3+8m$ *e* $y=m$ *onde* m *é um inteiro qualquer. Quer dizer os números pedidos são da forma* $x=3+8m$ *onde* $m\geqslant 0$ *é um inteiro, inferior a 4 pois o resto deve ser inferior a 7.*

3742 — Qual o resto da divisão de $a+b$ por 13, sabendo que a é um múltiplo de 104 e que b dividido por 13 dá de resto 8. Justificar a resposta.

R: *Como* $104=\dot{13}$ *e* $b=\dot{13}+8$ *será* $a+b=\dot{13}+8$ *donde o resto da divisão de* $a+b$ *por* 13 *é* 8.

3743 — Decompor de todos os modos possíveis a fracção $\frac{3149}{510}$ em duas parcelas fraccionárias positivas de denominadores 17 e 30, respectivamente.