$b+c=2a$; 2.º) a área do rectângulo construído com os dois menores lados é m vezes a área do triângulo. Discussão. Aplicação ao caso de ser $a=438\,m$ e $m=3$.

R: *Seja* $b+c=2a$, *e suponhamos que* b *é o menor dos lados do triângulo*: $b<a<c$. *A área do rectângulo referido é* $a \cdot b$; *e como a altura do triângulo para o lado* b *é* $a \cdot \operatorname{sen} C$, *a sua área exprime-se por* $a \cdot b \cdot \operatorname{sen} C/2$; *donde, em virtude da condição do enunciado,* $\operatorname{sen} C = 2/m$. *Tem, pois, de ser* $m \geqslant 2$.

Se $m=2$, *o triângulo é rectângulo em* C, *com* $a \cdot b = 2$; *e desta relação, juntamente com* $a^2+b^2=c^2$ *e* $b+c=2a$, *tiram-se os valores dos seus lados* $\left(a=4\,b/3,\ c=5\,b/3\right.$ *com* $\left.b=\sqrt{3}/\sqrt{2}\right)$, *obtendo-se em seguida os valores dos ângulos* $(A=\operatorname{arc\,sen} 4/5)$.

Se $m>2$, *obtido* C *de* $\operatorname{sen} C = 2/m$, *da relação entre os lados e as somas dos ângulos opostos vem, calculando a soma* $b+c$, $2 \operatorname{sen} B = \operatorname{sen} A + \operatorname{sen} C$; *mas sendo* $\operatorname{sen} B = \operatorname{sen}(A+C)$, *fica* $2 \operatorname{sen}(A+C) = \operatorname{sen} A + \operatorname{sen} C$, *o que conduz a* $3 \operatorname{tg}\dfrac{A}{2} = \operatorname{cotg}\dfrac{C}{2}$, *que permite determinar* A, — *ficando o problema resolvido, pois se conhecem os três ângulos do triângulo e se sabe que* $(b+c)/2 \operatorname{sen} A = b/\operatorname{sen} B = c/\operatorname{sen} C$. *Como* $a<c$ *segue-se que também* $A<C$ *ou seja* $\operatorname{tg}\dfrac{A}{2} < \operatorname{tg}\dfrac{C}{2}$; *assim, a relação* $3 \operatorname{tg}\dfrac{A}{2} \cdot \operatorname{tg}\dfrac{C}{2} = 1$ *conduz a* $\operatorname{tg}^2\dfrac{C}{2} > \dfrac{1}{3}$ *e, como* $C \in (0,\pi)$, $\operatorname{tg}\dfrac{C}{2} > \dfrac{1}{\sqrt{3}}$. *Deste modo conclui-se que tem de ser* $C \in \left(\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{2\pi}{3}\right)$. *Excluido o caso de ser* $m=2$, *já considerado, fica-nos* $\sqrt{3}/2 < \operatorname{sen} C = \dfrac{2}{m} < 1$ *e portanto* $m \in \left(2, 4/\sqrt{3}\right)$, *ficando o problema com duas soluções para* m *neste intervalo.*

Soluções dos N.os 3931 a 3938 de L. Albuquerque

MATEMÁTICAS SUPERIORES

PONTOS DE EXAMES DE FREQUÊNCIA E FINAIS

GEOMETRIA DESCRITIVA

F. C. L. — GEOMETRIA DESCRITIVA — 1.º Exame de Frequência, 1954-55.

3939 — Sejam $\alpha, \beta, \alpha', \beta' \cdots$ números reais. Considere o conjunto dos pares (α, β) e defina nesse conjunto uma soma pela lei seguinte

$$(\alpha, \beta) + (\alpha', \beta') = (\alpha + \alpha', \beta + \beta').$$

Mostre que a correspondência $(\alpha, \beta) \to \alpha$, é um homomorfismo, e determine o seu núcleo.

3940 — Determine o grupo dos automorfismos de um grupo cíclico finito.

3941 — Considere um plano oblíquo qualquer. Determine o seu traço no $\beta_{2,4}$ utilizando uma recta de perfil do plano.

3942 — Dadas 3 rectas não complanas duas a duas, mostre (construindo) que é possível haver uma recta paralela a uma delas e que encontra as outras duas.

3943 — Dadas 2 rectas, uma paralela ao $\beta_{2,4}$ e outra paralela ao $\beta_{1,3}$ construir por um ponto não pertencente a nenhuma das rectas dadas, uma recta paralela ao $\beta_{2,4}$ que as encontre.

Observação:

Resolver o problema sem recorrer à *LT*, no caso em que tiver solução.

Enunciar a condição necessária e suficiente para que o problema tenha solução.

F. C. C. — GEOMETRIA DESCRITIVA — 2.º Exame frequência — 1953-54.

Ponto n.º 1

3944 — Por um ponto de *L. T.* conduzir uma recta que faça ângulos de 40º com o plano vertical de projecção e com um plano vertical que define com aquele um diedro de 70º.

R: *A recta é uma das arestas de um triedro, cujas faces medem 70º, 50º e 50º, sendo as outras duas arestas eixos dos dois planos.*

3945 — Determinar os pontos de B_1 que distam 4cm de *L. T.*

R: *São os pontos da intersecção de* B_1 *com uma superfície cilíndrica de revolução que tem* L. T. *por eixo e* 4cm *por raio dum paralelo.*

3946 — Conduzir pela *L. T.* os planos que definem ângulos de 30º com uma horizontal inclinada 45º sobre o plano vertical de projecção.

R: *São os planos tangentes, conduzidas por* L. T. *a uma superfície cónica de revolução que tem a horizontal por eixo e 60º de abertura.*

Soluções dos N.os 3944 a 3946 de J. Farinha

ANÁLISE INFINITÉSIMAL

F. C. L. — Cálculo Infinitésimal — 1.º Exame de Frequência — 1.ª chamada — 11 de Janeiro de 1955

Teoria

3947 — Defina operação de fração contínua e indique como tal operação se aplica ao desenvolvimento dos números reais e enuncie os teoremas que respeitam a tais desenvolvimentos, quer no caso dos números fraccionários, quer no caso dos números irracionais.

3948 — Defina conjunto complementar dum conjunto dado e justifique a classificação dos pontos de um conjunto que resulta das relações deste com o seu complementar. Defina fronteira de um conjunto e enuncie os teoremas que respeitam a tal conceito.

3949 — Defina números derivados, semi-derivadas e derivadas de uma função de uma só variável independente, num dos seus pontos.

Defina diferencial de uma tal função e escreva a sua expressão analítica e indique o significado geométrico da diferencial considerada.

Prática

3950 — Dada a quádrica

$$x^2+y^2+z^2-2\,yz+2\,zx-2\,xy+x-1=0$$

a) mostre que a superfície tem uma recta de centros a distância infinita;

b) determine o plano diametral conjugado com a direcção definida por $(1\,,3\,,5)$ e mostre que ele passa pela recta de centros;

c) classifique a quádrica e escreva a sua equação reduzida.

3951 — Dada a superfície

$$m^2\,(x^2+2\,a\,x+y^2)=z^2 \qquad (a \text{ e } m \text{ fixos})$$

a) indicar as suas direcções principais e verificar se há rectas que passem pela origem das coordenadas e pertençam à superfície;

b) determinar o lugar geométrico das circunferências:

$$\begin{cases} x^2+2\,a\,x+y^2=\mathrm{R}^2 \\ z=h \end{cases}$$

que se apoiam na recta

$$x=z-my=0\,;$$

c) em face dos resultados obtidos que pode dizer àcerca da superfície dada?

F. C. L. — Cálculo Infinitésimal — 2.ª Frequência — 2.ª chamada — 30 de Abril de 1955.

Prática

3952 — A partir da equação vectorial $C=P+\rho\vec{n}$ que dá o centro de curvatura de uma curva plana correspondente ao ponto P, mostre que

$$\frac{dc}{ds}=\frac{d\rho}{ds}\vec{n}$$

onde s é o arco da curva dada tomado a partir de um ponto P_0.

Conclua daí que a tangente à evoluta é normal à evolvente no ponto correspondente. O que acontece nos pontos em que ρ é máximo ou mínimo? Determine a evoluta da elipse

$$\frac{x^2}{4}+y^2=1$$

e estude a natureza dos pontos da evoluta que são centros de curvatura da elipse nos seus vértices.

3953 — Determine a menor distância da origem O à superfície

$$x^2+y^2+z^2-8\,x-8\,y-6\,z+24=0$$

e mostre que o ponto à menor distância se encontra numa normal à superfície passando por O.

3954 — Determine e estude os pontos singulares da curva

$$x^3+y^3=xy\,.$$

Qual a ordem do contacto da curva com a circunferência

$$x^2+y^2=y\,?$$

F. C. C. — Cálculo Infinitésimal — 2.º Exame de frequência — Maio de 1954.

Ponto 1

3955 — Determinar e caracterizar o integral geral e o integral singular da equação

$$2\,y^2\,(1+y'^2)=(x+yy')^2\,.$$

R: *As curvas do integral geral são as circunferências com centro sobre* Ox *e tangentes às rectas* $y=\pm x$, *que constituem o integral singular.*

3956 — Determinar as curvas integrais da equação

$$y'''+y'=2\,(1-\operatorname{sen}2\,x)+\cos x$$

que passam pela origem tangencialmente à recta $y = -x$.

R: *Integral geral*

$$y = c_1 + c_2 \cos x + c_3 \operatorname{sen} x + 2x - \frac{1}{2}\cos 2x - \frac{x}{2}\cos x\,.$$

As condições dadas exigem $c_3 = -\frac{5}{3}$, $c_2 = \frac{1}{3} - c_1$.

3957 — Calcular $\frac{d^2 y}{d x^2}$ em função de $z, t, \frac{dz}{dt}$ e $\frac{d^2 z}{d t^2}$, sendo $\begin{cases} x = z + t e^t \\ y = z^2 - t^2 . \end{cases}$

R:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2z\frac{dz}{dt} - 2t}{\frac{dz}{dt} + e^t + t e^t}\,,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\left[2\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 + 2z\frac{d^2z}{dt^2} - 2\right]\left(\frac{dz}{dt} + e^t + t e^t\right) -}{\left(\frac{dz}{dt} + e^t + t e^t\right)^2}$$

$$\frac{-\left(\frac{d^2z}{dt^2} + 2e^t + t e^t\right)\left(2z\frac{dz}{dt} - 2t\right)}{\left(\frac{dz}{dt} + e^t + t e^t\right)^2}$$

Ponto 2

3958 — Mostrar que as curvas integrais da equação diferencial

$$y y'^2 + 2 x y' - y = 0$$

constituem duas famílias de curvas ortogonais. Determiná-las e representá-las geomètricamente.

R: *Trata-se de uma equação do 2.º grau em* y', *em que o produto das raízes vale* -1. *O integral geral é a família de parábolas* $y^2 = \alpha^2 + 2\alpha x$.

3959 — Determinar a curva integral da equação

$$y'' + y' - \operatorname{sen} x = 0$$

que passa pelo ponto $\left(\pi, \frac{1}{2}\right)$ com tangente paralela a Ox.

R: *Integral geral:* $y = c_1 + c_2 e^{-x} - \frac{1}{2}(\operatorname{sen} x + \cos x)$.

As condições impostas exigem $c_1 = -\frac{1}{2}$, $c_2 = \frac{1}{2} e^{\pi}$.

3960 — Calcular z''_{xy} em função de $u, v, w, w'_u, \cdots$,

sendo $\begin{cases} u = y + z \\ v = y - z \\ w = x^2 - e^z . \end{cases}$

R: *Atendendo a que* $z = \frac{u - v}{2}$, $x = \left(w + e^{\frac{u-v}{2}}\right)^{1/2}$, *as equações*

$$w'_u z'_x - w'_v z'_x = 2x - e^z z'_x$$
$$w'_u (1 + z'_y) + w'_v (1 - z'_y) = -e^z z_y$$

dão z'_x *e* z'_y *em função de* u, v, w, w'_u, w'_v.

A equação

$$\begin{aligned} &[w''_{u^2}(1 + z'_y) + w''_{uv}(1 - z'_y)]\, z'_x + w'_u z''_{xy} - \\ &- [w''_{v^2}(1 - z'_y) + w''_{vu}(1 + z'_y)]\, z'_x - w'_v z''_{xy} = \\ &= - e^z z'_x z'_y - e^z z''_{xy} \end{aligned}$$

permite depois calcular z''_{xy} *em função de* $u, v, w, w'_u, \cdots$.

Soluções dos N.os 3955 e 3960 de J. Dionísio

I. S. A. — Cálculo Infinitesimal e das Probabilidades — **Prova escrita do Exame Final — 1.ª época — 1.ª chamada — 1955.**

3961 — Desenvolva $\sqrt{1 - e^{-x}}$ em série de potências de e^{-x} e indique os valores de x para os quais a série é convergente. Com base neste resultado desenvolva em série o integral

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1 - e^{-x}}}$$

e justifique o processo utilizado.

3962 — Calcule o integral de $x y^2$ no domínio limitado pelas curvas representativas das funções $\cos x$, $\cos 3x$ no intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

3963 — Determine o domínio de existência da função

$$\varphi(t) = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(x-1)^t}$$

e calcule o valor exacto da função para $t = \frac{1}{2}$.

3964 — *a*) Resolva a equacão $y' = \sqrt{1 - y^2}$, sendo y função incógnita de x e diga em que consistem as linhas integrais da equação. *b*) Escreva o integral geral de $\frac{\partial z}{\partial x} + \sqrt{1 - y^2}\,\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ e determine a superfície integral da equação que passa pela recta $x = 0$, $y = z$.

3965 — Calcule a probabilidade de que, tirando ao acaso três cartas dum baralho completo, com reposição após cada tiragem, as cartas sejam: *a*) as três de copas; *b*) duas de copas e uma de espadas; *c*) as três dum mesmo naipe; *d*) as três de naipes diferentes; *e*) não todas dum mesmo naipe.

I. S. A. — Cálculo Infinitesimal e das Probabilidades — Prova escrita do Exame Final — 1.ª Época — 2.ª Chamada — 1955.

3966 — Determine o domínio de existência da função

$$\varphi(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-tx^2}}{x^t(1+3x^2)}\,dx$$

e calcule o valor da função para $t=0$.

3967 — Calcule o integral da função

$$x^7\,y^2\,e^{-yz}$$

no domínio limitado pelas superfícies de equações $y=x^2,\ y=2,\ z=0,\ z=y$.

3968 — Verifique que o diferencial

$$\frac{y\,dx}{a-z}+\frac{x\,dy}{a-z}+\frac{x\,y\,dz}{(a-z)^2}$$

é exacto, e determine uma sua primitiva.

3969 — Resolva o sistema de equações

$$\begin{cases} y'=y+2z\\ z'=3y+z\end{cases}$$

em que y, z são funções incógnitas de x.

3970 — Calcule a probabilidade de que, em três lançamentos sucessivos dum dado perfeito, a soma dos pontos obtidos seja:

a) não superior a 4;

b) não inferior a 17;

c) superior a 4 e inferior a 17.

Posto isto, calcule a probabilidade de que, em seis lançamentos sucessivos dum dado perfeito, a soma dos pontos obtidos, tanto nos três primeiros como nos três últimos lançamentos, seja superior a 4 e inferior a 17.

Enunciados dos N.os 3961 a 3970 de J. S. e Silva

I. S. C. E. F. — Análise Infinitésimal — Exame final — 14 de Outubro de 1954.

I

3971 — Considere a equação $f(x,y,z)=2xz^2+x^2y^2-2y-3z=0$ e prove que ela define uma função $z=\varphi(x,y)$ na vizinhança de $P(-1,1,-1)$. Escreva até aos termos do 2.º grau, inclusivé, o desenvolvimento tayloriano da função $z=\varphi(x,y)$ segundo as potências de $(x+1)$ e $(y-1)$.

A função $z=\varphi(x,y)$ terá um extremo no ponto $(-1,1)$? Justifique a resposta.

R: *Como* $f(-1,1,-1)=0$ *e* $f(x,y,z)$ *é contínua como função de* (x,y) *e* z *e* $f'_z(-1,1,-1)\neq0$, *existe uma vizinhança do ponto* $(-1,1)$ *dentro da qual existe uma função* $z=\varphi(x,y)$ *que substituída na equação dada a transforma numa identidade*

$$z'_x(-1,1)=-\frac{f'_x(-1,1,-1)}{f'_z(-1,1,-1)}=0,$$

$$z'_y(-1,1)=-\frac{f'_y(-1,1,-1)}{f'_z(-1,1,-1)}=0,$$

$$z''_{x^2}(-1,1)=-\frac{f''_{x^2}(-1,1,-1)}{f'_z(-1,1,-1)}=-2,$$

$$z''_{xy}(-1,1)=-\frac{f''_{xy}(-1,1,-1)}{f'_z(-1,1,-1)}=4\ \textit{e}$$

$$z''_{y^2}(-1,1)=-\frac{f''_{y^2}(-1,1,-1)}{f'_z(-1,1,-1)}=-2$$

e portanto o desenvolvimento tayloriano de $z(x,y)$ *é o seguinte:*

$$z(x,y)=z(-1,1)+(x+1)\,z'_x(-1,1)+(y-1)\,z'_y(-1,1)+(x+1)^2\,z''_{x^2}(-1,1)+2(x+1)(y-1)\,z''_{xy}(-1,1)+(y-1)^2\,z''_{y^2}(-1,1)+R_3=-1-2(x+1)^2+8(x+1)(y-1)-2(y-1)^2+R_3.$$

Como o ponto $(-1,1)$ *faz* $z'_x(-1,1)=0$ *e* $z'_y(-1,1)=0$ *teremos de analizar o sinal de* s^2-rt *para ver se existe um extremo. Ora* $s^2-rt=4^2-(-2)(-2)>0$ *e portanto não há extremo.*

II

3972 — *a*) Prove que $\int_A x^{2m-1}\,y^{2n-1}\,dx\,dy=\frac{\beta(m,n)}{4(m+n)}\,r^{2(m+n)}$, $m>0$, $n>0$ onde A é o quarto de círculo $x^2+y^2\leqslant r^2$ situado no 1.º quadrante.

b) Sabe que em certas condições $\int_a^b f(x)\,dx=f(c)(b-a)$ com $a<c<b$. Enuncie e demonstre alguma proposição análoga para $\iint_A f(x,y)\,dx\,dy$ sendo A o rectângulo $a\leqslant x\leqslant b$, $c\leqslant y\leqslant d$.

R: a) *Fazendo a mudança para coordenadas polares vem*

$$\iint_A x^{2m-1}\,y^{2n-1}\,dx\,dy=\int_0^r \rho^{2(m+n)-1}\,d\rho\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2m-1}\theta\,\mathrm{sen}^{2n-1}\theta\,d\theta=\frac{1}{2}\,\beta(m,n)\int_0^r\rho^{2(m+n)-1}\,d\rho=\frac{\beta(m,n)}{4(m+n)}\,r^{2(m+n)}.$$

b) *Sabemos que* $\int_a^b f(x)\,dx=f(c)(b-a)$ *quando* $f(x)$ *é contínua em* (a,b). *Vamos então demonstrar a seguinte proposição: «Se* $f(x,y)$ *é contínua em relação ao par de variáveis* (x,y) *no rectângulo* $a\leqslant x\leqslant b$, $c\leqslant y\leqslant d$ *então:*

$$\int_a^b dx\int_c^d f(x,y)\,dy=(b-a)(d-c)\,f(\eta,\tau)$$

onde (η,τ) *é um ponto do rectângulo».*

Com efeito, sendo $f(x, y)$ *contínua em relação ao par de variáveis* (x, y) *também o é em relação a* x *e a* y *separadamente, e então* $\int_c^d f(x, y)\,dy = (d-c)\,f(x, \tau)$, *com* $c < \tau < d$, *e* $\int_a^b (d-c)\,f(x, \tau)\,dx = (d-c)(b-a)\,f(\eta, \tau)$ *com* $a < \eta < b$ *e o teorema está provado.*

III

3973 — Achar uma curva tal que se a normal num ponto M corta o eixo $0x$ num ponto P, o centro de curvatura C é simétrico de P em relação a M.

R: *A normal é* $Y - y = -\frac{1}{y'}(X - x)$ *ou seja* $X - x + y'(Y - y) = 0$ *e as coordenadas de* P *são* $(x + yy', 0)$. *Como* $\overline{CM} = \overline{MP}$ *conclui-se fàcilmente que* $yy'' = 1 + y'^2$ *e esta equação pode escrever-se do seguinte modo* $yy'\frac{dy'}{dy} = 1 + y'^2$

$$\frac{dy}{y} = \frac{y'\,dy'}{1+y'^2};\ \log\frac{y}{C_1} = \log\sqrt{1+y'^2};\ y' = \frac{1}{C_1}\sqrt{y^2 - C_1^2}\quad x = C_1\int\frac{dy}{\sqrt{y^2 - C_1^2}} + C_2;\ x - C_2 = C_1 \operatorname{arcch}\frac{y}{C_1}$$

e finalmente $y = C_1 \operatorname{ch}\frac{x - C_2}{C_1}$ *(catenária).*

I. S. C. E. F. — ANÁLISE MATEMÁTICA — Prova prática — 10 de Janeiro de 1955.

3974 — Determinar as equações dos planos tangentes à superfície $\frac{y^2}{4} + z^2 = 1$ paralelos à recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+2}{2}$

R: *A superfície é um cilindro de geratrizes paralelas a* $\overrightarrow{0X}$; *o correspondente plano projectante da recta é:* $2y - 3z - 6 = 0$. *Os planos procurados deverão ter equações da forma* $2y - 3z + c = 0$. *Tudo se reduz a fazer com que o sistema*

$$\begin{cases} 2y - 3z + c = 0 \\ y^2 + 4z^2 - 4 = 0 \end{cases}$$

tenha soluções reais iguais. A equação $25z^2 - 6cz + c^2 - 16 = 0$ *que resulta da eliminação de* y *deverá ter raízes reais iguais, e portanto:* $9c^2 - 25(c^2 - 16) = 0$ *ou* $c = \pm 5$. *As equações dos planos tangentes são:* $2y - 3z \pm 5 = 0$.

3975 — Escrever a expressão da derivada de ordem n da função: $f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}\cdot \operatorname{sen}^2 x$

R: *Decompõe-se* $\frac{1}{x^2-1}$ *em soma de fracções simples* $\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right]$ *e vem imediatamente:*

$$\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{1}{x^2-1}\right) = \frac{(-1)^n}{2}\cdot\frac{(x+1)^{n+1} - (x-1)^{n+1}}{(x^2-1)^{n+1}}.$$

Como $\frac{d}{dx}(\operatorname{sen}^2 x) = 2\operatorname{sen} x \cos x = \operatorname{sen} 2x$, *temos fàcilmente:*

$$\frac{d^n}{dx^n}(\operatorname{sen}^2 x) = 2^{n-1}\operatorname{sen}\left(2x + \frac{(n-1)\pi}{2}\right).$$

Empregue-se agora a fórmula de LEIBNIZ

$$\frac{d^n}{dx^n}f(x) = \frac{(-1)^n}{2}\cdot\frac{(x+1)^{n+1}-(x-1)^{n+1}}{(x^2-1)^{n+1}}\cdot\operatorname{sen}^2 x + \sum_{p=1}^{p=n-1}\frac{(-1)^{n-p}}{2}\cdot\frac{(x+1)^{n-p+1}-(x-1)^{n-p+1}}{(x^2-1)^{n-p+1}}\cdot 2^{p-1}\cdot\operatorname{sen}\left(2x+\frac{(p-1)\pi}{2}\right) + \frac{1}{x^2-1}\cdot 2^{n-1}\cdot\operatorname{sen}\left(2x+\frac{(n-1)\pi}{2}\right).$$

3976 — Indicar como se racionalizam os integrais $\int\frac{dx}{\operatorname{sen}^6 x\cdot\cos^2 x}$; $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{4-x}-\sqrt{4-x}}$; $\int(2x^2+\operatorname{arc\,sen} x)^2 dx$; $\int(x+2)^3[1+(x+2)^2]^{1/2}\,dx$ e resolver completamente dois deles.

R: *Para o primeiro integral, como os expoentes de* $\operatorname{sen} x$ *e* $\cos x$ *são da mesma paridade é possível exprimir a função integranda racionalmente em* $\operatorname{tg} x$ *com as fórmulas de fácil dedução*

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x}\qquad \cos^2 x = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x}$$

$$\operatorname{sen} x\cos x = \frac{\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}^2 x}.$$

Para o segundo integral, faz-se: $4 - x = t^6$ *e vem:*

$$-6\int\frac{t^3\,dt}{1-t^2}.$$

Para o terceiro integral vem:

$$\int(2x^2+\operatorname{arc\,sen} x)^2 dx = \frac{4}{5}x^5 + 4\int x^2\operatorname{arc\,sen} x\,dx + \int\operatorname{arc}^2\operatorname{sen} x\,dx$$

e acha-se integrando por partes:

$$\int x^2 \operatorname{arc\,sen} x\, dx = \frac{x^3}{3} \operatorname{arc\,sen} x + \frac{1}{3}\int x^2 \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx =$$

$$= \frac{x^3}{3} \operatorname{arc\,sen} x + \frac{1}{3} x^2 \sqrt{1-x^2} + \frac{2}{9}\sqrt{(1-x^2)^3} + C$$

$$\int \operatorname{arc^2 sen} x\, dx = x \cdot \operatorname{arc^2 sen} x + 2\int \operatorname{arc\,sen} x \cdot \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx =$$

$$= x \cdot \operatorname{arc^2 sen} x + 2\sqrt{1-x^2} \operatorname{arc\,sen} x - 2x + C$$

valores a substituir em cima.

Finalmente, tem-se: $\int (x+2)^3 [1+(x+2)^2]^{1/2}\, d(x+2)$

e faz-se $1+(x+2)^2 = z^2$ *o que dá:* $d(x+2) = \frac{z}{x+2} dz$.

$$\int (z^2-1) z^2\, dz = \frac{z^5}{5} - \frac{z^3}{3} + C$$

$$\int (x+2)^3 [1+(x+2)^2]^{1/2}\, dx = \frac{1}{5} [1+(x+2)^2]^{5/2} -$$

$$- \frac{1}{3}[1+(x+2)^2]^{3/2} + C.$$

Enunciados e soluções dos n.os 3971 a 3976 de Fernando de Jesus

F. C. C. — Análise Superior — 2.º Exame de Frequência — 1952-53.

3977 — Desenvolver em série nas vizinhanças da origem a função $f(z) = 1/(2 \operatorname{sen} z - e^{iz})$, e indicar o raio do circulo de convergência.

R: $f(z) = -1 + (-2+i) z + \left(-\frac{7}{2} + 2i\right) z^2 + \cdots$.

O raio do círculo de convergência é

$$\frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi^2}{4} + \log^2 2}$$

3978 — Calcular $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{(x^2+4)\sqrt[3]{x-1}}\, dx$

R: $\dfrac{\pi}{\sqrt[6]{135}} \operatorname{sen} \dfrac{\alpha}{3}$, *sendo* $\alpha = \operatorname{arc\,tg} 2$

F. C. C. — Análise Superior — Alguns problemas dos exames de frequência e finais do ano lectivo 1953-54.

3979 — Integrar pelo método de Bertrand o sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{xz - z(x+y+z)\log(x+y+z)}{xz - x(x+y+z)\log(x+y+z)} \\[2ex] \dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{yz - z(x+y+z)\log(x+y+z)}{yz - y(x+y+z)\log(x+y+z)} \end{cases}.$$

R: *O integral geral do sistema*

$$\frac{dx}{Q'_z - R'_y} = \frac{dy}{R'_x - P'_z} = \frac{dz}{P'_y - Q'_x},$$

que é neste caso

$$\frac{dx}{x(y-z)} = \frac{dy}{y(z-x)} = \frac{dz}{z(x-y)},$$

define as linhas de turbilhão

$$\begin{cases} \log(xyz) = c_1 \\ x+y+z = c_2. \end{cases}$$

Efectuada a mudança de variáveis

$$\begin{cases} \log(xyz) = u \\ x+y+z = v, \end{cases}$$

a equação diferencial total equivalente ao sistema proposto reduz-se a $v \log v\, du = dv$, *equação que integrada dá* $u = \log\log v + c$. *O resultado final será então* $x+y+z = e^{cxyz}$.

3980 — Integrar o sistema de Charpit-Lagrange e determinar um integral completo para a equação de derivadas parciais

$$p^2 + q^2 = 2(px + qy).$$

R: *Integral geral do sistema de* Charpit-Lagrange:

$$\begin{cases} p = \alpha q \\ 4z = p^2 + q^2 + \beta \\ 2px - p^2 = \gamma \\ 2qy - q^2 = \delta. \end{cases}$$

Integral completo:

$$z = \frac{2\alpha}{1+\alpha^2}\left(\frac{\alpha}{2} x^2 + xy + \frac{y^2}{2\alpha}\right) + \beta.$$

3981 — Mostrar que as linhas assintóticas da superfície $z = \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}$ se projectam sobre os planos $z = k$ segundo duas famílias de curvas ortogonais.

R: *As projecções referidas são as circunferências de centro na origem* $x^2 + y^2 = c$ *e as rectas que passam pela origem* $y = cx$.

3982 — Determinar as trajectórias ortogonais das superfícies integrais da equação

$$(x^2 + y^2)\, dx + 2xy\, dy + 2\, dz = 0.$$

R: *Integre-se o sistema*

$$\frac{dx}{x^2+y^2} = \frac{dy}{2xy} = \frac{dz}{z},$$

o que dará

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = \alpha y \\ z = \beta e^{-\frac{1}{x+y}}. \end{cases}$$

3983 — Calcular os três primeiros termos do desenvolvimento em série de MAC-LAURIN da função

$$f(z) = \frac{\cos z}{1 + ch\, z}.$$

Calcular o raio de convergência e os polos de $f(z)$ com a respectiva ordem.

R: $f(z) - \frac{1}{2} - 3z^2 + \frac{73}{96} z^4 + \cdots$

Polos: $z = i(\pi + 2k\pi)$, $K = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$, *duplos*.

Raio de convergência, π.

3984 — Calcular pelo método dos resíduos

$$\int_1^2 \frac{1}{x^2 \sqrt[3]{(2-x)(x-1)^2}}\, dx.$$

R: $$\frac{5\sqrt[3]{3}\sqrt{4}\,\pi}{18}$$

3985 — Calcular pelo método dos resíduos

$$\int_1^2 \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{(2-x)(x-1)}}\, dx.$$

R: $\frac{\sqrt[4]{8}\sqrt[4]{125}}{10}\pi\, sen\left(\frac{\pi}{8} + \frac{\theta}{2}\right)$ *com* $\theta = \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2}$, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$.

3986 — Calcular o integral

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{(x+1)\sqrt{x-2}}\, dn$$

usando o método dos resíduos e verificar o resultado por meio do cálculo real.

R: $\frac{\sqrt{3}}{3}\pi$.

Enunciados e soluções dos n.os 3977 a 3986 de J. Dionísio

ÁLGEBRA SUPERIOR

F. C. L. — ÁLGEBRA SUPERIOR — 1.º Exame de Frequência — 2.ª chamada — 7 de Março de 1955.

I

3987 — Seja $\mathfrak{G}$ um grupo e $\mathfrak{h}$ e $\mathfrak{g}$ dois sub-grupos. Mostre que se $\mathfrak{h}\,\mathfrak{g}$ é um sub-grupo, se tem

$$\mathfrak{h}\,\mathfrak{g} = \mathfrak{g}\,\mathfrak{h} \quad \text{e} \quad \mathfrak{h}\,\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \cup \mathfrak{g}.$$

II

3988 — Mostre que todo o módulo com um gerador é isomorfo de um módulo cociente dos inteiros.

III

3989 — Seja $\mathfrak{A}$ um anel. Mostre que toda a potência $\mathfrak{A}^K$ de $\mathfrak{A}$ é um ideal bilateral.

IV

3990 — Prove que o anel dos elementos da forma $\{m + n\sqrt{2}\}$ em que m, n são inteiros tem algoritmo de divisão. Conclua por consequência, que é um domínio euclidiano.

V

3991 — Dado o domínio de integridade $\mathfrak{O}[x]$ em que

$$\mathfrak{O} = \mathfrak{J}/(3),$$

diga quais são os polinómios irredutíveis do 1.º e 2.º graus.

Verifique depois que, para os referidos polinómios é, de facto, $b^2 - 4c \neq$ dum quadrado perfeito.

MECÂNICA RACIONAL

I. S. T. — MECÂNICA RACIONAL — 1.º exame de frequência — 1951.

3992 — Dados três pontos

$$P_1(a_1, b_1, c_1) \text{ de massa } m_1;$$
$$P_2(a_2, b_2, c_2) \text{ de massa } m_2;$$
$$P_3(a_3, b_3, c_2) \text{ de massa } m_3;$$

que relações devem existir entre as coordenadas dos pontos para que seja possível determinar as massas de modo tal que os eixos coordenados sejam eixos principais de inercia?

E se forem mais de três pontos?

3993 — Indeterminação nos problemas variacionais:
1.º — No caso do integral simples;
2.º — No caso do integral duplo.

3994 — Operações sobre tensores — grandeza dum vector e ângulo de dois vectores em cálculo absoluto —. Produto interno e produlo externo.

I. S. T. — MECÂNICA RACIONAL — **2.º exame de frequência — 1951.**

3995 — Um ponto move-se sobre o eixo dos xx segundo a lei $x^2 = \frac{\lambda t^2}{x_0^2} + (x_0 + v_0 t)^2$, sendo λ uma constante e x_0 e v_0 as condições iniciais.

Mostrar que a lei de forças é $F = \frac{m\lambda}{x^3}$, sendo m a massa do ponto.

3996 — Deduza as fórmulas de LORENTZ e verifique a invariância da forma $ds^2 = c^2 dt^2 - dy_1^2 - dy_2^2 - dy_3^2$.

3997 — Equilíbrio duma funicular submetida à acção de forças centrais.

3998 — Verifique que as equações canónicas são as das características da equação às derivações parciais de HAMILTON-JACOBI.

CÁLCULO DAS PROBABILIDADES

F. C L. — CÁLCULO DAS PROBABILIDADES — **Prova extraordinária em 24 de Março de 1955.**

3999 — Dois jogadores A e B atiram alternadamente dois dados ao ar, começando A; A ganha o jogo se obtiver uma soma de 6 pontos antes de B ter obtido uma soma de 7 pontos; B ganha o jogo se obtiver uma soma de 7 pontos antes de A ter obtido uma soma de 6 pontos. Calcule a probabilidade que cada jogador tem de ganhar e a de empate, supondo

a) que o jogo é limitado a n partidas no máximo.

b) que o jogo prosegue até que um dos jogadores tenha ganho.

4000 — Uma urna contém 1 esfera branca e a pretas. Fazem-se extrações sucessivas de uma esfera sem reposição até ter-se extraído todas as esferas da urna. Determinar o valor médio do número de esferas pretas saídas antes de sair a branca e o valor médio do número de esferas pretas saídas depois de ter saído a branca. Diga, justificando, se não podia indicar imediatamente, antes de resolver o problema a que é igual a soma daqueles 2 valores médios.

4001 — Dois jogadores A e B jogam entre si um jogo composto de 300 partidas, cada uma das quais é equitativa. Em cada partida A tem a probabilidade p de ganhar 2 escudos e B a probabilidade $q = 1 - p$ de ganhar b escudos. Determinar o valor de p de modo que seja igual a 0,8427 a probabilidade de que nenhum dos jogadores ganhe mais de 60 escudos.

ASTRONOMIA

F. C. L. — EXAME PRÁTICO DE ASTRONOMIA — **1.ª Frequência — 1.ª chamada — 3 de Fevereiro de 1950.**

4002 — Calcular analítica e gràficamente as coordenadas equatoriais de Urano sabendo que as suas coordenadas eclípticas são $\begin{cases} \lambda = 158^\circ\, 18'\, 08'',5 \\ \beta = -\, 3^\circ\, 50'\, 49'',6 \end{cases}$ e que a obliquidade da eclíptica é $\varepsilon = 23^\circ\, 27'\, 24'',9$.

4003 — Calcular analítica e gràficamente o azimute e o ângulo horário da estrela α Piscis Australis (Fornalhaut) cujas coord. são $\begin{cases} \alpha = 22^h\, 53^m\, 49^s,780 \\ \delta = -\, 29^\circ\, 58'\, 00'',31 \end{cases}$ no momento do seu nascimento num lugar cuja latitude é $\varphi = 25^\circ\, 46'\, 15'',09$.

F. C. L. — EXAME PRÁTICO DE ASTRONOMIA — **1.ª Frequência — 2.ª chamada — 13 de Fevereiro de 1950.**

4004 — Calcular analítica e gràficamente as coordenadas galácticas duma estrela cujas coordenadas equatoriais são $\begin{cases} \alpha = 14^h\, 20^m\, 30^s,5 \\ \delta = 38^\circ\, 43'\, 15'',8 \end{cases}$ sabendo que a origem de contagem das longitudes galácticas tem de ascensão recta $18^h\, 40^m\, 0^s,00$ e que o plano do equador galáctico faz um ângulo de $62^\circ\, 0'\, 0'',0$ com o plano do equador celeste.

4005 — Calcular analítica e gràficamente o ângulo horário e a distância zenital da estrela α Lyrae (Vega) cujas coordenadas são $\begin{cases} \alpha = 18^h\, 34^m\, 34^s,043 \\ \delta = 38^\circ\, 42'\, 56'',91 \end{cases}$ no instante em que corta o 1.º vertical Este dum lugar cuja latitude é $\varphi = -\, 40^\circ\, 40'\, 59'',98$.

Se estivesse a trabalhar com um teodolito neste local teria possibilidade de efectuar esta observação? Porquê?

F. C. L. — EXAME PRÁTICO DE ASTRONOMIA — **2.ª Frequência — 1.ª chamada — 11 de Maio de 1950.**

4006 — Na data de hoje, num lugar da terra de coordenadas $\begin{cases} \varphi = 29^\circ\, 56'\, 39'',45\ N \\ \lambda = 4^h\, 15^m\, 43^s,78\ E \end{cases}$ observou-se, no momento da sua passagem meridiana, a estrela α Scorpii (Antares) cujas coord. são $\begin{cases}\alpha = 16^h\,25^m\,09^s{,}908\\ \delta = -26^h\,16'\,54'',90\end{cases}$

Pretende-se determinar:

a) o tempo sideral, o tempo verdadeiro e o tempo legal no momento da observação.

b) o tempo sideral num local situado no meridiano médio do 6.º fuso a W de Greenwich.

c) o ângulo horário, o tempo sideral e o tempo médio num local cujas coordenadas são $\begin{cases}\varphi = +68^\circ\,47'\,19'',96\\ \lambda = -10^h\,49^m\,27^s{,}18\end{cases}$.

4007 — Num local de coordenadas $\begin{cases}\varphi = 53^\circ\,10'\,20'',84\,N\\ \lambda = 10^h\,33^m\,42^s{,}85\,W\end{cases}$ observou-se hoje o Sol, a leste do meridiano, tendo-se determinado para altura $h = 40^\circ\,58'\,47'',16$.

Sabendo-se que as coordenadas do Sol são $\begin{cases}\alpha = 3^h\,03^m\,39^s{,}95\\ \delta = +17^\circ\,18'\,25'',4\end{cases}$ pretende-se calcular o tempo verdadeiro nesse instante.

F. C. L. — Exame Prático de Astronomia — **2.ª Frequência — 2.ª chamada — 26 de Maio de 1950**

4008 — Observou-se às 11^h de tempo civil, num determinado lugar da terra, o Sol cujas coordenadas são $\begin{cases}\alpha = 8^h\,40^m\,48^s{,}82\\ \delta = +18^\circ\,19'\,49'',4\end{cases}$. Sabendo que a ascensão recta do Sol médio nesse instante é $\alpha_{\theta_m} = 8^h\,34^m\,33^s{,}56$ pretende-se calcular o tempo sideral e o tempo verdadeiro no momento da observação.

4009 — Num local de coord. $\begin{cases}\varphi = -30^\circ\,30'\,30''\\ \lambda = 10^h\,15^m\,30^s{,}6\,E\end{cases}$ observou-se hoje uma estrela tendo-se determinado para seu azimute $A = 129^\circ\,49'\,50''$; as coordenadas da estrela são $\begin{cases}\alpha = 10^h\,15^m\,30^s{,}6\\ \delta = 20^\circ\,25'\,04''\end{cases}$.

Pretende-se determinar:

a) a distância zenital da estrela, o tempo sideral e o tempo verdadeiro no momento da observação.

b) o ângulo horário e o tempo legal num lugar de coordenadas $\begin{cases}\varphi = 66^\circ\,32'\,18'',9\,N\\ \lambda = 11^h\,54^m\,47^s{,}8\,W\end{cases}$.

F. C. L. — Exame Prático de Astronomia — **1.ª Frequência — 1.ª chamada — 31 de Janeiro de 1955.**

4010 — Uma estrela de coord. $\begin{cases}\alpha = 10^h\,34^m\,00^s{,}30\\ \delta = -85^\circ\,44'\,50'',96\end{cases}$ foi observada num lugar cujas coordenadas geográficas são $\begin{cases}\varphi = -22^\circ\,53'\,43'',96\\ \lambda = +2^h\,52^m\,53^s{,}77\end{cases}$.

Determinar:

a) a distância zenital quando a estrela passa no meridiano.

b) analítica e gràficamente o azimute, o ângulo horário e a distância zenital no momento da sua elongação E.

4011 — Determinar gràficamente as coordenadas equatoriais do planeta Neptuno cujas coordenadas eclípticas são $\begin{cases}\lambda = +166^\circ\,10'\\ \beta = +1^\circ\,03'\end{cases}$ sendo a obliquidade de eclíptica $\epsilon = 23^\circ\,27'$.

4012 — Duas estrelas de coordenadas (α_1, δ_1) e (α_2, δ_2) foram observadas num mesmo vertical nos instantes θ_1 e θ_2.

Determinar o azimute do vertical e a latitude do lugar de observação.

F. C. L. — Exame Prático de Astronomia — **1.ª Frequência — 2.ª chamada — 7 de Fevereiro de 1955.**

4013 — Determinar analítica e gràficamente o ângulo horário e a distância zenital duma estrela de coord. $\begin{cases}\alpha = 18^h\,43^m\,43^s{,}043\\ \delta = +38^\circ\,24'\,56'',19\end{cases}$ no instante em que corta o 1.º vertical Este dum lugar cuja latitude é $\varphi = -40^\circ\,04'\,59'',98$.

Calcular o tempo sideral nesse instante.

Se estivesse a trabalhar com um teodolito neste local teria possibilidade de efectuar esta observação? Porquê?

Determinar a distância zenital e o tempo sideral no momento das passagens meridianas.

4014 — Determinar gràficamente as coord. equatoriais duma estrela cujas coordenadas galácticas são $\begin{cases}g = -5^\circ\,20'\\ G = 129^\circ\,37'\end{cases}$. As coordenadas do polo norte galáctico são $\begin{cases}\alpha = 12^h\,40^m\\ \delta = +28^\circ\,00'\end{cases}$ e a origem de contagem das longitudes galácticas tem por coord. $\begin{cases}\alpha = 18^h\,40^m\\ \delta = 0^\circ\,0'\end{cases}$

4015 — Num lugar de latitude φ_N, duas estrelas $(\alpha_1 ; \delta_1)$ e (α_2, δ_2) são observadas num mesmo vertical (de azimute desconhecido) no mesmo instante. Determinar o tempo sideral local no instante da observação.

FÍSICA MATEMÁTICA

F. C. L. — FÍSICA MATEMÁTICA — **1.º Exame de Frequência — Ano 1953-54.**

4016 — Duas barras rígidas assentes em S e S' (referenciais em movimento relativista) experimentam ambas contracções. Explique o paradoxo aparente.

4017 — FIZEAU realizou a seguinte experiência: Fez passar raios luminosos por tubos onde circulava água em velocidade constante v e mediu a velocidade da luz nesse trajecto, $\bar{c}$.

Sabendo que é n o índice de refracção da água e $\bar{c}_e = \frac{c}{n} + v$ o valor não relativista a esperar deduza o valor relativista $\bar{c}_r$ e encontre o que for obtido experimentalmente desprezando os termos de ordem de $\beta^2 = \left(\frac{v}{c}\right)^2$.

4018 — Defina comprimento duma barra (fixa em S') em S com o produto de velocidade do referencial S' em que assenta pelo tempo que medeia entre os 2 passagem dos extremos de barra pelo mesmo ponto P a S.

Deduza expressão da contracção dos comprimentos.

Enunciados dos N.os 4016 a 4018 de J. Tiago de Oliveira

F. C. C. — FÍSICA MATEMÁTICA — **2.º Exame de Frequência — Ano de 1952-53.**

4019 — Considere a equação $a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} = 1$ em que a e b são constantes.

a) Determine o integral geral.

b) Determine a superfície integral que contém a curva $z = x^2 + y^2$, $z = 1$.

c) Mostre que a equação dada é a equação de derivadas parciais das superfícies cilindricas.

R: *a*) $x - az = f(y - bz)$ *que:* c) *é a equação das superfícies cilindricas;* b) $1 - a^2 - (x - az)^2 - 2ax + 2a^2 z = b^2 + 2b(y - bz) + (y - bz)^2$.

4020 — Verificar se é aplicável o critério de JORDAN relativo às séries de FOURIER para a função

$$f(x) = \operatorname{sen} 1/x\,,\ f(0) = 0\,,\ \text{com } x \subset (-\pi, \pi)\,.$$

R: *A aplicação do critério de* JORDAN *exige que a função seja de variação limitada. Na soma que define a variação total da função, cada parcela*

$$|\operatorname{sen} 1/x_{k+1} - \operatorname{sen} 1/x_k|$$

pode ter o valor 2 desde que se tome

$$x_{k+1} = \frac{1}{2j\pi + \pi/2} \quad e \quad x_k = \frac{1}{2j\pi - \pi/2}$$

com j *inteiro. Deste modo a função dada não é de variação limitada, e o critério de* JORDAN *não é aplicável.*

4021 — Prove que o potencial definido pela calote da esfera

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 + b^2$$

de densidade $\mu = z$ e limitado pelo circulo de cota b tem, na origem, o valor πa^2. R: *O potencial é dado pelo integral de superfície* $\iint_S \frac{z\,dS}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ *cujo valor é, de facto,* πa^2.

Soluções dos N.os 4019 a 4021 de J. Farinha

MECÂNICA CELESTE

F. C. C. — MECÂNICA CELESTE — **1.º Exame de frequência.**

Prova prática

4022 — Calcular com um erro inferior a $0{,}1''$ a longitude de JÚPITER na sua órbita, às 0^h *T. U.* de 15 de Abril de 1955, utilizando os elementos do planeta dados nas Efemérides deste ano.

R: $v = 121^\circ\ 57'\ 44''{,}7$. Solução de J. Farinha

Prova teórica

4023 — Baseando-se na expressão do potencial duma camada esférica homogénea, demonstrar que esta atrai um ponto exterior como se a sua massa estivesse reunida no centro.

4024 — Das equações diferenciais dos movimentos do Sol e dos planetas relativamente a um sistema de referência inercial, deduzir as equações diferenciais dos movimentos dos planetas em volta do Sol.

4025 — Partindo das correspondentes fórmulas do movimento elíptico, deduzir as formulas que dão a posição dum cometa hiperbólico na sua órbita.