introduzidos na demonstração do teorema: $1, 2, 3, 4, \cdots, n, \cdots$. Representemos por B o conjunto cujos elementos são os cardinais $2, 3, 4, \cdots n, \cdots$; teremos a relação $B \sim B+(1)$ com $1 \notin B$. Então, o conjunto dos números cardinais é infinito no sentido da Definição 3.

TEOREMA 8. *Se* A *pertence a toda a classe* K *de conjuntos que satisfaz as condições* 1). *e* 2). *do teorema precedente, então* A *é finito.*

Com efeito, se A pertence a uma classe K que verifica as condições 1) e 2), então A pode ser alcançado mediante o processo de construção indicado na demonstração do teorema precedente e corresponde-lhe um dos números cardinais $1, 2, 3, 4, \cdots, n$. Resultará imediatamente que se tem a relação $A \not\sim A+(X)$ com $X \notin A$ e portanto A é finito.

Derivam daqui os seguintes corolários:

COROLÁRIO 1. *Para que* A *seja finito é necessário e suficiente que* A *pertença a toda a classe* K *que verifique as condições* 1). *e* 2). *do teorema* 7.

COROLÁRIO 2. *Para que* A *seja finito é necessário e suficiente que* A *pertença a toda a classe* K *de conjuntos que verifique as condições:*

1) *Se* $X \in A$ *então* $(X) \in K$,

2) *Se* $B \in K$ *e* $C \in K$ *então* $B+C \in K$.

Este teorema demonstra-se sem dificuldade.

Muitas outras propriedades importantes dos conjuntos finitos se podem demonstrar sem grande dificuldade, mas com aquelas que aqui apresentamos consideramos a teoria já esboçada.

O cálculo das probabilidades e a teorização do comportamento económico([1])

por **Gustavo de Castro**

1. O Comportamento Económico.

Se o Cálculo das Probabilidades pôde passar por uma teoria dos jogos de azar, esta teoria dos jogos de azar pode descrever-se como uma *teoria do comportamento económico*. A concepção do Cálculo como uma teoria de comportamento tem, porém, que ser temperada pela concepção das realidades que nos afasta de extremos insensatos. A matemática não pode ser vista como produto do exercício gratuíto da inteligência nem como codificação de verdades absolutas que os génios desvendam, de maneira mais ou menos sobrenatural, para pautar as únicas condutas inteligentes; há que algures encontrar a vera efígie do que é a um tempo uma construção maravilhosa da inteligência e um apoio precioso da nossa acção sobre a natureza — tudo isto, mas só isto.

Veja-se a solene advertência de BOREL: «*La science du Hasard ne saurait, plus que toute autre science, prétendre à régir nos actes; elle peut seulement, comme c'est le rôle de la science, faciliter la reflexion qui précède l'action chez tous les êtres raisonnables. Dans les ques-*

([1]) Este escrito é a redacção da segunda de quatro palestras que, sob o título geral «*O Cálculo das Probabilidades. Palestras sobre os progressos duma disciplina por ocasião dum centenário*», foram realizadas na Administração-Geral dos Correios, Telégrafos e Telefones, em Janeiro-Fevereiro de 1955. Incluidas numa longa série de palestras profissionais daquela Administração, esta é publicada aqui por sua amável deferência.

tions compliquées, le bon sens a besoin d'être guidé par les résultats des calculs ; les formules ne créent pas l'esprit de finesse, mais en facilitent l'usage.»

A decisão dum comportamento é efectivamente o ónus e o previlégio de quem conhece a substância das coisas, de quem tem a intimidade dos problemas : é a rota fixada por quem, debruçado sobre a carta, revive e absorve os pormenores, as circunstâncias significativas, valorizando-os convenientemente. No acto de decisão há que conjurar toda a possível informação, uma parte da qual analizada, cifrada matemàticamente ; mas uma parte só. Aquele a quem cabe esta análise e estes cálculos — o matemático — raras vezes poderá dominar a parte que se não conta nem mede, embora se exprima ; menos ainda a informação que se tem e se não sabe exprimir e a que nem se chega a saber que se tem. Informação que não vem revelada, mas duma docilidade do espírito em face da realidade ; informação que é a impregnação do espírito paciente pela natureza das coisas. A experiência e até os pendores que fazem o matemático, e são só certa experiência e certos pendores, não substitui a experiência e os pendores que se exigem para a decisão. Adquirir uns e outros no mesmo domínio, sem que interfiram e sem que se prejudiquem, é uma tarefa de sucesso incerto, que parece de desaconselhar, embora seja indispensável no matemático o conhecimento do clima da administração e no administrador a inteligência do conteúdo, real valor e limitações, da contribuição da matemática.

É contanto a verdade que, quando uma parte da informação se pode já processar cientìficamente, a matemática é muitas vezes um auxiliar inestimável de que não seria avisado prescindir ; como, de resto, muitos outros instrumentos de que o espírito se muniu para uma mais segura e poderosa perscrutação, tal o telescópio que empurra para mais longe a verdadeira noite, a do que se não conhece.

Uma vez por outra, até, toda a informação pertinente é a que o matemático domina e então toda a reflexão é matemática : a reflexão matemática pauta então, excepcionalmente, as decisões. É em situações ideais deste tipo que se exemplifica a utilização dos conceitos, dos instrumentos e das técnicas, e se adquire firmeza na utilização ; a distância do modelo à realidade constitui uma preocupação diferente.

Assim o Cálculo das Probabilidades é a teoria de comportamento económico em certas situações em que um jogo de azar constitui um modelo satisfatório e sugestivo, embora ideal e sumário. Onde um jogador se move por razões que são identificáveis às de quem decide, de onde uma possibilidade de formulação de critérios de escolha. Em que há várias opções, entre valores que podem adquirir-se, eventualmente, com probabilidades de aquisição calculáveis.

É pois produto duma reflexão que tende a pautar resoluções pelo cálculo dos valores que podem adquirir-se, e das probabilidades da sua aquisição, seguido do confronto com os custos das diferentes opções ; tudo dirigido por certos princípios.

Desculpando-nos dum exemplo que de tão sugestivo favorecerá indevidamente o expositor, consideremos a questão da exploração industrial da roleta. Ponha-se à decisão a questão de se é ou não «económico» ser-se banqueiro ; se se pode ou não ser banqueiro quando se procura tirar rendimento dum capital e, no caso afirmativo, que rendimento se tira.

Supunhamos que J joga e' escudos no vermelho. A quantia e' pode ver-se como a entrada que J paga a B contra a obrigação assumida por este de lhe pagar $18\,e'$ escudos se saír o vermelho.

Observemos que os e' escudos de J terão valores diferentes ao longo do tempo : antes de apostados valem e'; depois de parada a bola valem $18e'$ ou 0, consoante o caso. E quando a bola está a andar, depois do «nada mais» e antes de parada?

Está a ver-se o interesse duma resposta a esta questão; se os e' escudos postos na mesa *valerem* e, a diferença $e'-e$ é um um ganho do banqueiro, pelo menos num conveniente sentido. O conhecimento deste *ganho* será pelo menos um elemento valioso na supesagem da situação de que poderá sair uma *decisão de comportamento económico*.

Terão porém algum valor os e' escudos no lapso que estamos considerando? Parece poder afirmar-se que sim, e a seguinte situação esclarecerá o caso. Suponhamos que entro numa sala de jogo e encontro, fortemente apostado, um devedor antigo; suponhamos, por amor da discussão, que a minha presença provoca uma avalanche de consciência que o leva a propor-me que aceite a sua posição como prestação a deduzir da dívida, e que eu digo que sim.

Quanto devo abater à dívida? A resposta de que se abata o que a casa pagar não me é satisfatória quando em maré de sorte: eu sentiria que o meu devedor me tinha explorado a veia, obrigando-me ainda a cuidar das fichas; que os deuses não tinham afinal sido propícios a mim, porque eu era um tolo; perceberia mesmo que o devedor me não tinha passado posição nenhuma, o que tinha era feito de mim seu cobrador, etc. Pelo contrário, quando cheio de azar, diria o meu devedor que eu tinha jogado e perdido o dinheiro dele; que os deuses preferem os tipos simpáticos e ele nunca deveria ter mudado a mão; que, apesar de tudo, não merecia isto, etc.

Podemos até sondar a questão mais um pouco, numa situação afim mas diferente. Se o jogo fosse demorado, ou de duração incerta, poderia conceber-se que uma vez por outra um jogador apressado se dispusesse a vender a posição; esta circunstância, a ser frequente, poderia suscitar uma outra indústria, a dum segundo banqueiro que comprasse posições. Porque quantias e'' conviria a este segundo banqueiro comprar posições? A diferença $e-e''$, se conhecermos e, dará o seu ganho, em certo sentido.

Admitido pois o interesse em se conhecer, para fins convenientes, o valor e duma parada e', feita a um jogo de azar que principia, parece-nos importante que se reconheça que a sua definição é um problema de certo modo anterior ao Cálculo das Probabilidades, o qual se formou para o resolver com base em critérios que lhe são exteriores (embora este Cálculo tenha imposto e orientado a sua formulação).

Voltando [1] à carta de PASCAL a FERMAT, de 29 de Julho de 1654, vemos logo no começo que PASCAL tinha recebido na véspera uma carta de FERMAT com a solução de dois problemas; o dos *dados* e o das *partilhas*, ambos propostos pelo CAVALEIRO DE MÉRÉ a PASCAL. Em resposta escreve PASCAL: «...*vous avez trouvé les deux partis, des dés et des parties, dans la parfaite justesse... je ne doute plus maintenant que je ne sois dans la vérité, après la rencontre admirable où je me trouve avec vous...*»

Que problemas eram estes, o dos dados e o das partilhas? O dos dados é o que resolvemos atrás; o outro é um problema de partilha do bolo entre dois jogadores quando o jogo tem que desfazer-se antes dum fim. É, portanto, noutro ângulo, a questão que nos ocupa. Vejamos o problema de que se tratava: Dois jogadores J_1 e J_2 jogam um bolo de 64 pistolas que caberá ao primeiro que ganhar três jogadas, sendo as possibilidades de ganho em cada jogada iguais para ambos. O jogo tem que acabar quando J_1 está com duas jogadas ganhas e J_2 com uma; como devem partilhar o bolo? Trata-se

[1] Veja-se a primeira palestra: «*Da Navegação e do Comércio ao Cálculo das Probabilidades*», Memórias da Ordem dos Engenheiros, 99.

também, pois, duma questão de valores de posições num jogo de azar.

Um terceiro ângulo é o da *equidade* no jogo, o do problema do cálculo das paradas dos jogadores para que um jogo de azar seja um *jogo equitativo*. Se, num jogo, J_1 entra com e_1', que passa a valer e_1, e J_2 com e_2', que passa a valer e_2, de quanto devem ser as entradas para que $e_1 = e_2$. Ou o problema inverso: Dois jogadores lançam a moeda para saber quem fica com as posições de ambos (J_1 tinha apostado 2 num cavalo e 3 na primeira dúzia; J_2 tinha apostado 1 no vermelho, 4 numa quadra); será o jogo *equitativo*?

Fica, pois, posto um problema cuja solução poderá intervir em problemas de decisão: uma quantia que se aposta num jogo de azar muda de valor, ou pode mudar; x escudos apostados no vermelho à roleta podem não valer o mesmo que x escudos apostados nas menores de sete (contra o dôbro) no lançamento de dois dados. E valerão o mesmo que x escudos apostados num pleno da primeira roleta?

O que se quer é saber calcular o valor em cada caso.

2. O Princípio de Bernoulli.

Por estranho que à primeira vista pareça o Cálculo das Probabilidades não liquida a questão. Um dos bons ensinamentos que dele se colhem vem mesmo com o esclarecimento de que lhe não compete liquidar a questão. Mostra-nos para isso que vários princípios são possíveis e, analizando as consequências põe-nos em condições de optar em conhecimento de causa. De caminho vão-se separando distintos tipos de problemas e delimitando o domínio das matemáticas, o que não é tarefa inútil ou fácil (e o que torna a análise interessante para quem a faz, diga-se incidentalmente e um pouco como desculpa).

Procuremos caminhar para a solução do nosso problema pela introdução de umas definições. Recorde-se que as definições matemáticas criam seres de espírito, distintos dos seres reais dos quais são contrapartidas; mais ou menos fiéis na representação que constituem, não podem ser julgadas na comparação directa, que só pode ser terminante quando exclui, mas pela possibilidade que dêem duma teorização que, na estrutura geral e nas verificações da prática, se mostre satisfatória. Por isso convém qne os novos seres tenham novos nomes. Vejamos então.

Põe-se o problema de obter, relativamente a um ganho aleatório (de 100 contos com a probabilidade 1/10, por exemplo), um número que na descrição de JACOB BERNOULLI seja *a esperança de obtermos o melhor, temperada ou diminuída pelo receio do pior*. Seja a *attente* definida por HUYGENS, a que se chamou depois «esperança matemática» com alguma infelicidade; utilizaremos, com HUYGENS, o termo *expectação* para representar essa esperança que se define, no caso simples, como o produto da quantia a ganhar pela probabilidade do ganho ($100 \times 1/10 = 10$ contos, no caso do exemplo). Vejamos a definição com a generalidade de que precisamos.

Chama-se *expectação* duma posição num jogo de azar, num certo instante, à soma dos produtos que se obtêm multiplicando as probabilidades das possíveis cadeias de sucessos futuros pelos ganhos eventuais correspondentes; chama-se *valor actuarial duma entrada* à expectação da posição que com ela se compra; chama-se *valor actuarial duma quantia apostada* à soma dos valores actuariais das entradas em que se desdobra, no tempo e no espaço.

Postas estas definições diremos que o *princípio* de valorização, agora no sentido «económico», que os primeiros cultures das Probabilidades aceitaram implìcitamente, é o

1º PRINCÍPIO DE BERNOULLI: *o valor em numerário, numa época, duma quantia apos-*

tada num jogo de azar é o seu valor actuarial nessa época.

Observe-se que o «valor em numerário», a que o princípio se refere, pretende ser o que as palavras significam na linguagem comum das pessoas que têm capitais para investir; por isto se trata dum princípio, aceitável ou não: uma proposição híbrida relacionando um ser de pensamento com uma coisa, um ser de acção. Por isso é, como todos os princípios, susceptível de traçar regras de conduta se lhe juntarmos mais um princípio e um esclarecimento.

PRINCÍPIO DE ACÇÃO ECONÓMICA: *deve agir-se por forma a aumentar a fortuna em numerário.*

Esclarecimento: propõe-se então no princípio de BERNOULLI que o valor em numerário seja identificado com o valor actuarial, por forma a assentar-se no seguinte

2º PRINCÍPIO (DE ACÇÃO ECONÓMICA) DE BERNOULLI: *entre várias alternativas de acção económica, como valores actuariais conhecidos e tudo o resto igual, deve tomar-se a decisão que torne máxima a soma do valor em numerário que resta com o valor actuarial adquirido, da fortuna com a expectação actuais.*

Suponhamos para exemplo que, detentor duma fortuna de 100, confronto a compra (por 100) duma habilitação a 300 com a probabilidade $^1/_2$ com a compra (por 10) duma habilitação de 10.000 com a probabilidade de $^1/_{2.000}$. O princípio diz-me que devo preferir comprar a primeira a não comprar nada, mas não comprar nenhuma a comprar a segunda; as fortunas relativas aos três casos são as seguintes:

(*i*) Se não compro nada a fortuna é $f_1=0$;

(*ii*) Se compro a primeira habilitação,

$$f_2 = 100-100 + \frac{300}{2} = 150;$$

(*iii*) Se compro a segunda,

$$f_3 = 100-10 + \frac{10.000}{2.000} = 95.$$

Postas assim as coisas, será a ponderação das consequências da adopção das normas (como esta), em que este principio de acção se desdobra, que dirá se a teorização é ou não aceitável e delimitará o seu domínio de validade. Por essa ponderação ficarão definidas a traço grosso as fronteiras do domínio das situações concretas em que se aceitará decidir como estabelece o princípio. No exemplo que acabou de dar-se não é difícil imaginar casos em que o homem prudente decidiria contra as injunções da teoria; é pois de esperar que novas condições venham a introduzir-se por forma a conceder ao princípio a força que ainda se não devisa.

Assim, na linha da adopção do princípio de BERNOULLI, com o esclarecimento que se deu, virá a proposição das definições seguintes: um jogo de azar é equitativo para um jogador se a sua entrada é igual à expectação que compra; um jogo de azar em que o bolo é a soma das entradas é equitativo quando estas são inversamente proporcionais às probabilidades de ganho que compram; a partilha equitativa do bolo, num jogo de azar desfeito antes do fim, está em dar-se aos jogadores os valores actuariais das posiçõesque têm.

O que está a fazer-se é o desenvolvimento duma teorização; a utilização da palavra «equitativo» não deve fazer-nos esquecer que se trata aqui da definição dum novo termo «jogo equitativo». Não se exclui a possibilidade dum «jogo equitativo» ser desfavorável. Faça-se sòmente referência ao facto de que a definição de «jogo equitativo» não subtrai dificuldades às que possam provir dos princípios de BERNOULLI, como quando (por exemplo) se põe o problema da opção entre jogos equitativos. Estamos porém aqui mais interessados nos princípios, o que nos obriga a limitar os nossos casos àqueles em que existe uma e uma só opção que torna máxima a fortuna total, soma da fortuna e da expectação actuais.

(Continua no próximo número)