MATEMÁTICAS SUPERIORES

PONTOS DE EXAMES DE FREQUÊNCIA E FINAIS

MATEMÁTICAS GERAIS

F. C. L. — Matemáticas Gerais — Exame final — Outubro de 1956.

Ponto n.º 1

4175 — Seja $f(x, y)$ contínua e constante nos pontos da circunferência $x^2+y^2=1$ e diferenciável no seu interior.

a) Mostre (pelo teorema de Rolle) que a derivada de f ao longo da recta $\begin{cases} x=\alpha t \\ y=\beta t \end{cases}$ $(\alpha^2+\beta^2=1)$ se anula pelo menos uma vez em ponto interior.

b) Prove que, quando homogénea, f é também constante sobre as circunferências concêntricas, interiores.

c) Verifique que, nas condições da alínea *b*), $z=f(x, y)$ define uma superfície de revolução.

4176 — Considere a função $\begin{cases} f(x)=x \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x} \\ f(0)=0 \end{cases}$ definida no intervalo $(-1, 1)$. Diga, justificando, se é contínua no ponto $x=0$. Calcule as derivadas laterais neste mesmo ponto. É $f(0)$ extremo? Porquê?

4177 — Desenvolva em série de potências de x a fracção

$$y=\frac{x^4-2x+1}{(1+x)(1+x^2)^2}$$

depois de a ter decomposto em elemento simples.

Ponto n.º 2

4178 — Considere a função

$$f(x)=\begin{cases} (x-a)\, e^{\frac{1}{x-a}} \\ 0 \end{cases}$$

a) Calcule $\omega(a)$

b) Assíntotas da imagem de $f(x)$.

c) Expressão linear que mais se aproxima de $f(x)$ nas vizinhanças do infinito. Diferença entre $f(x)$ e aquela expressão linear e sinal de tal diferença para grandes valores de $|x|$.

4179 — Mostre que a equação

$$f(x, y)=xy^3+x^3y-2=0$$

define nas vizinhanças do valor $x=1$ uma função $y=\varphi(x)$ como sua raiz sob a condição $\varphi(1)=1$.

Calcule ao longo da imagem de $\varphi(x)$ o valor da expressão $xf'_x+yf'_y$. Direcção da imagem referida naquele ponto e sentido da concavidade nas suas vizinhanças.

4180 — Dê um desenvolvimento em série de potências de x da função

$$f(x)=\log\frac{1+x^2}{1-x^2}$$

e indique a sua região de validade. Confirme o resultado por recurso ao desenvolvimento de $f'(x)$.

F. C. L. — Matemáticas Gerais — Ponto de exame — 1.ª Frequência (1.ª chamada) — 1956-1957.

4181 — Que se pode dizer de um ponto fronteiro a um conjunto X, quando ele não é um x?

b) Mostre que é fechado o conjunto X_1 obtido pela adjunção a qualquer conjunto X de todos os seus pontos fronteiros.

c) Sendo Y o conjunto dos reais não contidos em X_1, mostre que Y é conjunto aberto.

d) Seja X um conjunto com infinitos elementos de um e outro sinal, elementos sujeitos à condição de:

$$a<|x|<b.$$

É X limitado? Relacione com a e b os limites de Weierstrass de X_1. Supondo que existem sempre elementos $x<a+1/n$ e $x>b-1/n$ com qualquer n, quais são os limites a respeito de X?

4182 — *a*) Estabeleça a fórmula da radiciação de índice n e faça a sua aplicação ao número $z=\rho(\cos m\pi+i \operatorname{sen} m\pi)$ com m inteiro. Discuta o resultado relativamente à existência do valor real da raiz.

b) Designe $[A\,B\,C\,D]$ e $[A'\,B'\,C'\,D']$ dois quadrados de centro na origem, o 1.º de vértices nos eixos coordenados e o 2.º com os lados paralelos a estes, e inscritos em circunstâncias de raio r e r_1. Quais os complexos cujas raízes de índice 4 têm por imagens os vértices de um e outro quadrado?

4183 — *a*) Considere o polinómio real:

$$f(z)=a_0+a_1(z-a)+\cdots+a_n(z-a)^n \text{ para } a_n>0$$

Relacione $f, f' \cdots f^{(n)}$ com os a_i e indique, com justificação, o préstimo da regra de Ruffini para o cálculo de tais coeficientes.

b) Mostre que sendo $f(a), f'(a) \cdots f^{(n-1)}(a)$ não negativos, a é limite excedente das raízes reais de f. Supondo que $z=a$ é raiz de multiplicidade α de $f(z)$, que polinómios derivados de $f(z)$ se anulam em α? Determinar as constantes α e β para $\beta \neq 0$ de modo que o polinómio $f(z)=z^4+4\alpha z^3+2z^2-\beta$ admita alguma raiz tripla não nula e para tais valores de α e β calcule essas raízes e dê a decomposição de f em factores primários. Qual o m. d. c. de f e f'? f' e f''? f' e f'' e f'''?

4184 — Descreva a operação de condensação de uma matriz A e o seu préstimo no cálculo da característica, justificando alguma proposição das que, fundamentam a técnica, aplicando esta mesma técnica à resolução do sistema de equações:

$$\begin{cases} x+y-3z+u=-3 \\ 2x+y+4z-2u=9 \\ x+2y+z-u=4 \\ x+y+3z+u=9 \\ x+y+u=\alpha \end{cases}$$

Determine α de modo que o sistema seja possível.

Enunciados dos n.os 4175 a 4184 de J. Dionísio.

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — 2.º Exame de frequência — Ordinário — 29-6-56.

4185 — Resolver os seguintes problemas:

a) Calcular $\lim\limits_{x=0} \dfrac{x \cdot tg\, x}{e^x-x-1}$.

R: 2.

b) Calcular $P\, x \cdot \log \sqrt[3]{1+x^4}$.

R: $\dfrac{x^2}{2} \log \sqrt[3]{1+x^4} - \dfrac{x^2}{3} + \dfrac{1}{3} \operatorname{arctg} x^2 + C$.

c) Utilizar a sucessão de Fourier para averiguar se $f(x)=12x^4-7x^3+13x^2-7x+1$ tem raízes em $(0,1)$. Em caso afirmativo separá-las.

R: *Existem duas raízes, respectivamente nos intervalos* $\left(0, \dfrac{7}{26}\right)\left(\dfrac{7}{26}, 1\right)$.

4186 — Provar que quando $S_n \to S$ também $\dfrac{S_1+S_2+\cdots+S_n}{n} \to S$. Enunciar alguma proposição da teoria das séries relacionada com esta propriedade e mostrar que $\Sigma(-1)^n k$ (k constante), embora divergente, é somável por média.

Deduzir o primeiro critério de Cauchy. Como aplicá-lo à determinação do intervalo de convergência de $\Sigma\, a_n x^n$?

Definir série absolutamente convergente e provar que a sua soma é independente da ordem dos termos.

4187 — Provar que, sendo $u=f(z)$ univalente e contínua no conjunto limitado e fechado Z, a função inversa $z=g(u)$ é contínua no conjunto transformado $U=f(Z)$.

Sendo $f(x)$, $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ contínuas e deriváveis em (a,b) e $\Delta'(x)=\begin{vmatrix} f'(x) & \varphi'(x) & \psi'(x) \\ f(a) & \varphi(a) & \psi(a) \\ f(b) & \varphi(b) & \psi(b) \end{vmatrix}$ a derivada de $\Delta(x)=\begin{vmatrix} f(x) & \varphi(x) & \psi(x) \\ f(a) & \varphi(a) & \psi(a) \\ f(b) & \varphi(b) & \psi(b) \end{vmatrix}$ provar que $\Delta'(c)=0$ onde $a<c<b$. Como se deduzem desta propriedade os teoremas de Lagrange e de Cauchy?

4188 — Em que condições a equação $f(x,y)=0$ define na vizinhança de $P(a,b)$ uma função $y(x)$? Admitindo a derivabilidade de $y(x)$ aplicar a regra de derivação das funções compostas para deduzir a fórmula $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{f'_x}{f'_y}$.

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — Exame final — Época de Julho (1.ª chamada) — 16-7-56.

4189 — Considerar o determinante $|A|=|a_i^k|=0$ ($A_i^k \neq 0$ para todos os valores $i, k=1,\cdots n$) e o sistema $A_i^\alpha x_\alpha=0$ $(i,\alpha=1,\cdots n)$.

Mostrar que o sistema é indeterminado, indicar o seu grau de indeterminação d e apresentar d soluções independentes. Qual é a expressão geral das suas soluções?

R: *O sistema é indeterminado em virtude de* $|\hat{A}|=|A|^{n-1}=0$ *e, como* $M_r(\hat{A})=|A|^{r-1}$ compl. $M(A^*)$ (Jacobi), *só com* $r=1$ *se encontra um menor diferente de zero. O grau de indeterminação do sistema será* $d=n-1$ *e, por exemplo, as* d *soluções*

$$(a_1^1, a_1^2, \cdots a_1^n)$$
$$(a_2^1, a_2^2, \cdots a_2^n)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$(a_{n-1}^1, a_{n-1}^2, \cdots a_{n-1}^n)$$

são independentes como consequência da hipótese proposta.

Todas as soluções se contêm na fórmula

$$((x)) = \beta^1((x^1)) + \beta^2((x^2)) + \cdots + \beta^d((x^d))$$

ou, mais explicitamente, utilizando as d *soluções acima apresentadas:*

$$x_1 = \beta^1 a_1^1 + \beta^2 a_2^1 + \cdots + \beta^{n-1} a_{n-1}^1$$
$$x_2 = \beta^1 a_1^2 + \beta^2 a_2^2 + \cdots + \beta^{n-1} a_{n-1}^2$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x_n = \beta^1 a_1^n + \beta^2 a_2^n + \cdots + \beta^{n-1} a_{n-1}^n$$

4190 — Utilizar as teorias da interpolação e eliminação para determinar o parâmetro m, por forma que o polinómio do 3.º grau $f(x)$, de que se conhecem os valores

$$f(-1) = m - 6$$
$$f(0) = m$$
$$f(1) = m - 6$$
$$f(2) = m - 18$$

tenha duas raízes comuns com o polinómio $x^3 - 5x^2 - 4x + 20$. Apresentar a equação das raízes comuns.

R: *Construindo a tabela de diferenças, obtem-se*

x	f(x)	Δ f(x)	Δ² f(x)	Δ³ f(x)
−1	m − 6	6	−12	6
0	m	− 6	− 6	
1	m − 6	−12		
2	m − 18			

Pela fórmula de Gregory-Newton *vem*

$$f(x) = f(a) + (x-a)\frac{\Delta f(a)}{h} + \frac{(x-a)(x-a-h)}{2!}\cdot\frac{\Delta^2 f(a)}{h^2} + \frac{(x-a)(x-a-h)(x-a-2h)}{3!}\frac{\Delta^3 f(a)}{h^3} =$$
$$= m - 6 + (x+1)\cdot 6 + \frac{(x+1)x}{2!}\cdot(-12) + \frac{(x+1)x(x-1)}{3!}\cdot 6 = x^3 - 6x^2 - x + m.$$

Adoptando o método para simplificar o resultante de f (x) *e do polinómio dado obtem-se:*

1	−5	−4	20	
	1	−6	−1	m
−1	−1	3	m − 20	
1	−2	m − 24	20	
2	m − 34	12	40	

Para que existam duas raízes comuns terá de ser $\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -2 & m-34 \end{vmatrix} = 0$ *o que dá imediatamente* $m = 30$ *valor que também anula o resultante. A equação das raízes comuns tira-se do quadro apresentado ou seja* $-x^2 + 3x + 10 = 0$.

4191 — Seja $f(x)$ definida em (a, b) e

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} \qquad (1)$$

com $a < x_1 < x_2 < b$ e $A[x_1, f(x_1)]$ $B[x_2, f(x_2)]$.

Escrever a equação da corda AB e mostrar que se dá a desigualdade (1) quando em (x_1, x_2) a corda deixa o arco da curva por baixo dela.

Escrever com três termos a fórmula de Taylor para $f(x_1)$ e $f(x_2)$, respectivamente segundo as potências de $\frac{x_1-x_2}{2}$ e $\frac{x_2-x_1}{2}$.

Concluir dos desenvolvimentos que a desigualdade (1) tem lugar sempre que $f''(x) > 0$ em (x_1, x_2).

R: *A equação da corda* AB *é*

$$y - f(x_1) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

e, se a corda deixa o arco da curva por baixo dela, terá de ser

$$f(x_1) + \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\left(\frac{x_1+x_2}{2} - x_1\right) - f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) > 0$$

que conduz imediatamente à desigualdade (1).

A fórmula de Taylor *dá*

$$f(x_1) = f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) + \frac{x_1-x_2}{2}f'\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) + \frac{(x_1-x_2)^2}{8}f''(\tau_1)$$
$$f(x_2) = f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) + \frac{x_2-x_1}{2}f'\left(\frac{x_1-x_2}{2}\right) + \frac{(x_2-x_1)^2}{8}f''(\tau_2)$$

Adicionando membro a membro e notando que $f''(x) > 0$ *em* (x_1, x_2), *vem:* $f(x_1) + f(x_2) > 2f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$ *ou*

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} \qquad \text{c. q. d.}$$

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — Exame final — Epoca de Julho — (2.ª chamada) — 20-7-56.

4192 — Considerem-se dois sistemas de eixos coordenados cartesianos rectangulares $S)\ Ox, Oy, Oz$ e $S')\ Ox', Oy', Oz'$, em que (a, b, c), (a', b', c') e

(a'', b'', c'') são os cosenos directores, respectivamente, de Ox', Oy' e Oz' em relação ao sistema S.

a) Provar que $L = \begin{bmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{bmatrix}$ é ortogonal.

b) Qual é o valor de $|L|$? Interpretar geomètricamente.

c) As fórmulas de transformação do sistema S no sistema S' são, como se sabe,

$$\begin{aligned} x' &= a\ x + b\ y + c\ z \\ y' &= a'\ x + b'\ y + c'\ z \\ z' &= a''\ x + b''\ y + c''\ z\,. \end{aligned}$$

Mostrar que a transformação é ortogonal e concluir daí que a distância de um ponto à origem é invariante com a transformação.

R: a) L *é ortogonal porque* $a^2+b^2+c^2=a'^2+b'^2+c'^2=a''^2+b''^2+c''^2=1$ e $aa'+bb'+cc'=aa''+bb''+cc''=a'a''+b'b''+c'c''=0$.

b) $|L|=\pm 1$. *Se* S *e* S' *coincidem* $|L|=1$; *Se* S *e* S' *têm os eixos na mesma posição relativa então* $|L|=1$ *e se não têm* $|L|=-1$.

c) *A transformação é ortogonal porque* L *é ortogonal. Uma das propriedades dessa transformação diz que* $x^2+y^2+z^2=x'^2+y'^2+z'^2$, *o que prova que a distância de um ponto à origem é invariante com a transformação.*

4193 — Provar que $\Delta \operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg} \dfrac{h}{1+xh+x^2}$ e $\Delta \log f(x) = \log\left[1+\dfrac{\Delta f(x)}{f(x)}\right]$.

b) Calcular $\Delta^n e^{ax+b}$ e $\Delta^n (a x^n + b x^{n-1})$.

c) Escrever o polinómio de menor grau que para os valores $0, 1, 2, 3$ toma, respectivamente, os valores $2, 5, 7, 8$.

R: a) $\Delta \operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg}(x+h) - \operatorname{arctg} x$ *e, fazendo* $y = \operatorname{arctg}(x+h)$ *e* $z = \operatorname{arctg} x$ *vem*

$$\Delta \operatorname{arctg} x = y - z$$

e

$$\operatorname{tg}(y-z) = \frac{\operatorname{tg} y - \operatorname{tg} z}{1+\operatorname{tg} y \cdot \operatorname{tg} z} = \frac{h}{1+xh+x^2}$$

Então

$$\Delta \operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg} \frac{h}{1+xh+x^2}$$

$$\Delta \log f(x) = \log f(x+h) - \log f(x) = \log \frac{f(x+h)}{f(x)} = \log\left[1+\frac{\Delta f(x)}{f(x)}\right].$$

b)
$$\Delta e^{ax+b} = e^{a(x+h)+b} - e^{ax+b} = e^{ax+b}(e^{ah}-1)$$
$$\Delta^n e^{ax+b} = e^{ax+b}(e^{ah}-1)^n$$
$$\Delta^n (a x^n + b x^{n-1}) = a \Delta^n x^n = a\, n!\, h^n$$

c) *Utilizando a fórmula de* Gregory-Newton *obtem-se o polinómio* $-\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{7x}{2} + 2$.

4194 — *a*) Aplicar a teoria dos máximos e mínimos para determinar o cilindro de volume máximo inscrito numa esfera dada.

b) Determinar os parâmetros α e β por forma que a equação $x^2 + \alpha x^2 y + \beta x y + 1 = 0$ defina na vizinhança de $P(1, -1)$ uma curva $y(x)$ cuja tangente nesse ponto é $3x - 2y - 5 = 0$.

R: a) *O volume do cilindro vem dado por* $V = \pi\left(R^2 - \dfrac{h^2}{4}\right)h$ *onde* R *é o raio da esfera e* h *a altura do cilindro. Como* $\dfrac{dV}{dh} = \pi\left(R^2 - \dfrac{3h^2}{4}\right)$, *o volume máximo oblem-se com* $h = \dfrac{2R}{\sqrt{3}}$.

b) *Os parâmetros são* $\alpha = 3$ *e* $\beta = -1$.

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — Exame final — Epoca de Outubro — 17-10-56.

4195 — Dado o polinómio $f(x) = x^3 + p x^2 + q x + r$ resolver os seguintes problemas

a) Provar que a condição para que as suas raízes estejam em progressão geométrica é $q^3 = p^3 \cdot r$.

b) Calcular $\Delta^3 f(x)$.

c) Atribuindo a x os valores x_0, x_1, x_2, x_3 e x_4, poderá existir um polinómio do 4.º grau que, para aqueles valores de x, tome, respectivamente, os valores $f(x_0)$, $f(x_1)$, $f(x_2)$, $f(x_3)$ e $f(x_4)$? Porquê? Mostrar que há uma infinidade de polinómios $g(x)$ tais que $g(x) - f(x)$ é divisível por $\psi(x) = \prod_{i=0}^{4} (x - x_i)$.

R: a) *Pelas fórmulas de* Girard $\begin{cases} a + a h + a h^2 = -p \\ a^2 h + a^2 h^2 + a^2 h^3 = q \\ a^3 h^3 = -r \end{cases}$

o que conduz imediatamente a $q^3 = p^3 r$.

b) $\Delta^3 f(x) = 3!\, h^3$

c) *Não, porque existe apenas um polinómio de grau inferior a* 5 *que para aqueles valores de* x *toma os correspondentes valores de* f(x). *Esse polinómio terá de ser necessàriamente* f(x). *Há evidentemente uma infinidade de polinómios* g(x) *(de grau maior ou igual a* 5) *que passam pelos mesmos pontos que* f(x) *e, por conseguinte,* $g(x) - f(x)$ *tem as raizes* x_0, x_1, x_2, x_3 *e* x_4, *o que o torna divisivel por* $\psi(x) = (x-x_0)(x-x_1)\cdot(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)$.

4196 — *a*) Estudar a independência das formas lineares

$$f_1 = x_1 - x_2 + x_3 - x_4$$
$$f_2 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$$
$$f_3 = a\,x_1 + b\,x_2 + c\,x_3 + d\,x_4$$

b) Dada a substituição linear $y_i = a_i^j\, x_j\ (i\,,j = 1\,,2\,,\cdots n)$ quantos valores de K satisfazem à relação $Y_i = K x_i$? Que são estes valores em relação à matriz $\|a_i^j\|$?

R: a) *As formas são independentes com qualquer das condições:* $c \neq a\,,\ b \neq c\,,\ b \neq d$.

4197 — *a*) Utilizar a relação $y'(1+x+x^2) = 1+2x$ para desenvover em série de potências inteiras de x a função $y = log\,(1+x+x^2)$.

b) Calcular $\varphi_y'\,(0{,}0)$ para a função

$$\varphi\,(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x+y)^2\,(x-y)}{x^2+y^2} & (x \neq 0\,, y \neq 0) \\ 0 \quad (x=y=0) \end{cases}$$

A equação $\varphi\,(x\,,y) = 0$ define uma função $y\,(x)$ na vizinhança do ponto $(0\,,0)$? Porquê?

Enunciados e soluções dos n.os 4185 a 4197 de Fernando de Jesus

I. S. T. — Matemáticas Gerais — Exame final — 8-10-56.

4198 — 1) Estude a correspondência $x \to e^{2\pi i x}$ em que x é um número real. Diga qual é o núcleo do homomorfismo.

4199 — 2) Na multiplicidade $\mathfrak{M}_n\ (n \to 3)$ considere o conjunto daqueles vectores para os quais $5\,x_1 - x_3 = 0$. Formam estes vectores uma sub-multiplicidade? No caso afirmativo diga porquê.

4200 — 3) Prove que se o vector y não pertence à submultiplicidade $\mathfrak{M}_k$ de $\mathfrak{M}_n$ mas pertence à gerada por $\mathfrak{M}_k$ e x, x pertence à gerada por $\mathfrak{M}_k$ e y

4201 — 1') R_1 e R_2 são duas rectas paralelas a ox e P_1 e P_2 são dois pontos respectivamente de R_1 e R_2; o ângulo $P_1\,o\,P_2$ supõe-se recto. Diga qual o lugar do ponto M quando se supõe $OM \perp P_1\,P_2$.

Nota: É necessário e basta para que M pertença ao lugar que a recta perpendicular a OM tirada por M encontre R_1 e R_2 em pontos P_1 e P_2 tais que $P_1\,O\,P_2$ seja recta.

4202 — 2') Considere a elipse situada no plano xoy, de semi-eixos 2 e 1. Determine a equação do cilindro cuja directriz é a referida elipse e cujos parâmetros directores são $(1\,,1\,,1)$.

4203 — 1'') Determinar o triângulo de área máxima tal que $x+y=2$, sendo x a altura e y a base.

4204 — 2'') As equações $a\,z + \operatorname{sen}\,(x+y) = 0$ e $a\,z + \operatorname{sen}\,(x-y) = 0$ definem z e y como funções de x. Determine $\dfrac{\partial y}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ no ponto $(0\,,0\,,0)$.

ANÁLISE INFINITÉSIMAL

I. S. C. E. F. — Análise Matemática — Exame final escrito — 20-7-1955.

4215 — Enuncie o problema do desenvolvimento duma função periódica de período 2π em série trigonométrica.

Como se obtém a série de Fourier duma função $f\,(x)$ definida no intervalo $(-\pi\,,+\pi)$? Determine a série Fourier da função igual a $\left|\dfrac{x}{2}\right|$ quando x varia entre $-\pi$ e $+\pi$.

Prove que a série de Fourier duma função $\varphi\,(x)$ contínua no intervalo $(-\pi\,,+\pi)$ é uma série só de cosenos se $\varphi\,(x)$ é função par, e só de senos se $\varphi\,(x)$ é impar.

R: *A função* $f\,(x) = \left|\dfrac{x}{2}\right|$ *quando* x *varia entre* $-\pi$ *e* $+\pi$, *e a função*

$$f\,(x) = \begin{cases} -\dfrac{x}{2} \ \ \textit{para}\ -\pi \leq x \leq 0 \\ \dfrac{x}{2} \ \ \textit{para}\ 0 \leq x \leq +\pi \end{cases}$$

tem valores iguais nos extremos do intervalo e é função contínua.

Os coeficientes da série são dados por

$$\begin{cases} 2\pi\,a_0 = \displaystyle\int_{-\pi}^{+\pi} f\,(x)\,dx \\ \pi\,a_p = \displaystyle\int_{-\pi}^{+\pi} f\,(x)\cos px\,dx \\ \pi\,b_p = \displaystyle\int_{-\pi}^{+\pi} f\,(x)\operatorname{sen} px\,dx \end{cases}$$

$$2\pi\,a_0 = \int_{-\pi}^{+\pi}\left|\frac{x}{2}\right|dx = \int_{-\pi}^{0} -\frac{x}{2}\,dx + {}$$
$$+ \int_0^{+\pi}\frac{x}{2}\,dx = \frac{\pi^2}{2} \quad \textit{donde} \quad a_0 = \frac{\pi}{4}$$

$$\pi\,a_p = \int_{-\pi}^{+\pi}\left|\frac{x}{2}\right|\cos p\,x\,dx = -\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{0} x\cos px\,dx + {}$$
$$+ \frac{1}{2}\int_0^{+\pi} x\cos px\,dx$$

como se tem $\displaystyle\int x\cos px\,dx = \frac{x}{p}\operatorname{sen} px +$

$$\int -\frac{1}{p}\operatorname{sen} px\,dx = \frac{x}{p}\operatorname{sen} px + \frac{1}{p^2}\cos px + C$$

vem $\pi\, a_p = -\frac{1}{2p^2}\left[\cos p x\right]_{-\pi}^{0} + \frac{1}{2p^2}\left[\cos p x\right]_{0}^{\pi}$

resultando $\pi\, a_{2k} = 0$; $\pi\, a_{2k+1} = -\frac{2}{(2k+1)^2}$

Por outro lado $\pi\, b_p = \int_{-\pi}^{+\pi}\left|\frac{x}{2}\right| \mathrm{sen}\, px\, dx = 0$

Tem-se finalmente

$$\left|\frac{x}{2}\right| = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\left[\cos x + \frac{1}{3^2}\cos 3x + \frac{1}{5^2}\cos 5x + \cdots + \frac{1}{(2k+1)^2}\cos(2k+1)x + \cdots\right]$$

4216 — Defina integral duma função $f(x, y)$ num domínio Δ quadrável.

Como e em que condições se pode efectuar uma mudança de variáveis nesses integrais?

Calcule

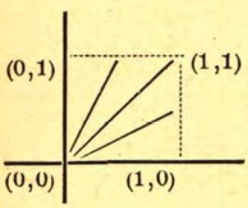
$$\int_0^1\int_0^1 \frac{dx\, dy}{(4 + x^2 + y^2)^{3/2}}$$

depois de mudar as coordenadas cartesianas em coordenadas polares.

R: *O domínio Δ ao qual se estende o integral é o quadrado de vértices*

$$(0,0) \quad (1,0) \quad (1,1) \quad (0,1)$$

Tem-se, pois:



$$\int_0^1\int_0^1 \frac{dx\, dy}{(4 + x^2 + y^2)^{3/2}} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{\frac{1}{\cos\theta}} \frac{\rho\, d\rho}{(4+\rho^2)^{3/2}} + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{1}{\mathrm{sen}\,\theta}} \frac{\rho\, d\rho}{(4+\rho^2)^{3/2}}$$

como é $\int \frac{\rho\, d\rho}{(4+\rho^2)^{3/2}} = -\frac{1}{\sqrt{4+\rho^2}} + C$

virá

$$\int_0^1\int_0^1 \frac{dx\, dy}{(4 + x^2 + y^2)^{3/2}} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta\left[\frac{1}{2} - \frac{\cos\theta}{\sqrt{1+4\cos^2\theta}}\right] + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta\left[\frac{1}{2} - \frac{\mathrm{sen}\,\theta}{\sqrt{1+4\,\mathrm{sen}^2\theta}}\right] =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta\left[\frac{1}{2} - \frac{\cos\theta}{\sqrt{5-4\,\mathrm{sen}^2\theta}}\right] + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta\left[\frac{1}{2} - \frac{\mathrm{sen}\,\theta}{\sqrt{5-4\cos^2\theta}}\right]$$

mas, como é

$$\frac{\cos\theta}{\sqrt{5-4\,\mathrm{sen}^2\theta}} = \frac{1}{2}\,\frac{\frac{2\cos\theta}{\sqrt{5}}}{\sqrt{1-\left(\frac{2\,\mathrm{sen}\,\theta}{\sqrt{5}}\right)^2}}$$

$$\frac{\mathrm{sen}\,\theta}{\sqrt{5-4\cos^2\theta}} = -\frac{1}{2}\,\frac{-\frac{2\,\mathrm{sen}\,\theta}{\sqrt{5}}}{\sqrt{1-\left(\frac{2\cos\theta}{\sqrt{5}}\right)^2}}$$

vem finalmente

$$\int_0^1\int_0^1 \frac{dx\, dy}{(4 + x^2 + y^2)^{3/2}} = \frac{\pi}{8} - \left[\mathrm{arc\ sen}\,\frac{2\,\mathrm{sen}\,\theta}{\sqrt{5}}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right] + \frac{1}{2}\left[\mathrm{arc\ sen}\,\frac{2\cos\theta}{\sqrt{5}}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4} - 2\,\mathrm{arc\ sen}\sqrt{\frac{2}{5}}$$

4217 — A equação diferencial $\frac{y'^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ é incompleta e o seu primeiro membro pode visìvelmente exprimir-se paramètricamente; determine o integral geral e os integrais singulares.

R: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ *é a equação duma elipse cujas equações paramétricas são:* $x = a\cos t \quad y = b\,\mathrm{sen}\, t$

Pondo então

$$y = b\,\mathrm{sen}\, t \qquad y' = a\cos t$$

vem

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = b\cos t\,\frac{dt}{dx} = a\cos t$$

e portanto $\frac{dx}{dt} = \frac{b}{a} \qquad x = \frac{b}{a}t + c$

As curvas integrais têm as equações paramétricas

$$x = \frac{b}{a}t + c \qquad y = b\,\mathrm{sen}\, t$$

O integral geral é $y - b\cdot\mathrm{sen}\,\frac{a(x-c)}{b} = 0$

Derivando em ordem à constante, e anulando: $\cos\frac{a(x-c)}{b} = 0$ *quadrando e somando, vem* $\frac{y^2}{b^2} = 1$ *ou* $y = \pm b$ *integrais singulares que se podiam visìvelmente obter, logo, da equação proposta.*

4218 — Demonstre que as funções dum sistema ortogonal são linearmente independentes.

Indique a condição necessária e suficiente de dependência linear, válida para funções de quadrado integrável, e prove a necessidade e suficiência.