

**4305** — Determine uma equação cartesiana da superfície que é o lugar geométrico das perpendiculares à superfície de equação

$$a^2 y^2 = x^2 (b^2 - z^2)$$

conduzidas pelos pontos da geratriz de equações

$$z = c, \quad x \sqrt{b^2 - c^2} - a y = 0$$

sendo  $a, b$  e  $c$  constantes.

**I. S. T.** — CÁLCULO INFINITESIMAL — 1.º exame de frequência — 27-6-56.

**4306** — Calcule  $\Delta \frac{f(r)}{g(r)}$  sendo  $\vec{r}$  o vector da distância  $xI + yJ + zK$ . É dada em coordenadas polares a função  $V = \frac{r}{1 + \cos \theta}$ ; Quais as linhas equipotenciais correspondentes a  $V$ ? Calcule  $\text{grad } V$

**4307** — Determinar  $x, y, z$  tais que  $x + y + z = N$  e que tornem  $x^a y^b z^c$  máximo. ( $N, a, b, c$  números dados).

O conceito de superfície equipotencial e de gradiente poderá ajudar a classificar o ponto de estacionaridade? Aplique.

**4308** — Se uma curva plana é dada em coordenadas polares  $r = f(\theta)$  e se  $U = \frac{1}{r}$ , mostre que a curvatura da curva é dada por  $\left(\frac{d^2 U}{d\theta^2} + U\right) \sin^3 \psi$  sendo  $\psi$  o ângulo entre o raio vector e a tangente.

**4309** — Quando é que uma linha assintótica duma superfície pode ser também uma geodésica? Interprete neste caso o teorema de MEUSNIER.

**4310** — Sabendo que as linhas de curvatura duma superfície podem ser definidas como sendo as curvas em que as normais à superfície admitem envolvente, quando é que uma linha de curvatura poderá ser geodésica? Poderá justificar a definição de linhas de curvatura, dada anteriormente?

## BOLETIM BIBLIOGRÁFICO

Nesta secção, além de extractos de críticas aparecidas em revistas estrangeiras, serão publicadas críticas de livros e outras publicações de Matemática de que os Autores ou Editores enviarem dois exemplares à Redacção.

**117** — J. BASS — **Curso de Matemática** — Masson et C.<sup>ie</sup>, Éditeurs—916 pags. 8.500 frs.—Paris, 1956.

Este livro contém, com alguns complementos, a matéria dos cursos que o Autor professa na Escola Nacional Superior de Aeronautica e na Escola Nacional Superior de Minas de Paris.

Destina-se assim aos alunos das grandes escolas de engenharia mas prestará também óptimos serviços aos candidatos à licenciatura em ciências físicas. O leitor deverá já possuir determinados conhecimentos elementares de análise e geometria analítica e poderá aumentar notavelmente a sua cultura matemática com o objectivo de obter uma boa especialização técnica.

A obra não é um tratado de matemáticas aplicadas; não se utiliza a linguagem das aplicações e o leitor não tem necessidade de possuir previamente determinados conhecimentos técnicos. Pelo contrário é através das aquisições no campo matemático que poderá em seguida abordar a mecânica, a hidrodinâmica, a resistência de materiais, a física geral, a electricidade, etc.

O autor nunca perde a oportunidade de mostrar, sob forma de exemplos, como se aplicam as matemáticas. Mas estes exemplos que são particularmente orientados para a mecânica racional não constituem passagens essenciais na estruturação do curso e podem ser deixados de lado num primeiro estudo.

Se bem que o livro não seja escrito para futuros matemáticos, está apresentado sob forma precisa e o Autor nunca deixou de manter relativo rigor ao longo de toda a obra. Entretanto, para redigir em cerca de 900 páginas os elementos que constituem a cultura matemática de base dum engenheiro tornou-se necessário entrar em certos compromissos. Se se não hesitou em utilizar as teorias modernas quando estas poderiam simplificar a exposição, reduziu-se no entanto sensivelmente as passagens puramente abstractas que, sem inconvenientes de maior, são apresentados sob forma intuitiva.

Para que as teorias expostas se tornem proveitosas o Autor faz a respectiva aplicação sob a forma de exercícios. Muitos exemplos são assim apresentados no texto e por meio deles se indica como efectuar

um cálculo numérico, como utilizar a noção de convergência uniforme, o teorema dos resíduos, o cálculo simbólico, como integrar sistemas de equações diferenciais, obter soluções das equações às derivadas parciais de segunda ordem, etc. Este livro, destinado assim a futuros engenheiros, é apresentado ao público em prefácio por DARMOIS; são deste professor as seguintes palavras: L'ouvrage de M. BASS vise à la fois à donner effectivement les connaissances nécessaires, à permettre les sondages en profondeur, et à permettre la lecture d'ouvrages modernes, qui font progresser en direction des synthèses donc j'ai parlé.

Je pense que l'utilisateur de cet ouvrage éprouvera un sentiment de sécurité par l'ampleur des matières auxquelles il peut avoir accès, un sentiment de plaisir en résolvant les problèmes posés...

Je souhaite que le livre de M. BASS, qui est l'excellent aboutissement d'un long et nécessaire effort, donne ces sentiments à ceux qui l'étudieront...

Os diversos capítulos da obra são:

I — Álgebra linear, (101 págs.) — Espaços vectoriais, Matrizes, Espaço hermitico, Álgebra tensorial, Aplicações, Bibliografia, Exercícios.

II — Integrais simples, (124 págs.) — Conjuntos e funções, Integrais definidos, Cálculo dos integrais simples, Cálculo numérico dos integrais definidos, Séries numéricas e integrais generalizados, Bibliografia, Exercícios.

III — Funções definidas por séries ou integrais, (118 págs.) — Séries de funções, Funções definidas por integrais, Séries de FOURIER, Funções ortogonais, Integrais de FOURIER, Bibliografia, Exercícios.

IV — Curvas, Integrais curvilíneos, Aplicações, (54 págs.) — Teoria das curvas, Integrais curvilíneos, Planímetros e integradores, Bibliografia, Exercícios.

V — Superfícies, Integrais múltiplos, Aplicações, (168 págs.) — Integrais duplos, Teoria das superfícies, Integrais múltiplos, Integrais de superfícies, Fórmulas de análise vectorial, Integrais múltiplos generalizados, Funções eulerianas, Cálculo simbólico, Bibliografia, Exercícios.

VI — Funções analíticas, (110 págs.) — Derivada duma função de variável complexa, Noções sobre a representação conforme, Funções elementares, Integração de funções analíticas, Séries de funções analíticas, Teorema dos resíduos, Aplicações, Bibliografia, Exercícios.

VII — Equações e sistemas diferenciais, (76 págs.) — Generalidades, Sistemas lineares, Equações lineares de segunda ordem, Funções de BESSEL, Métodos numéricos, Bibliografia, Exercícios.

VIII — Equações às derivadas parciais, Potenciais, (92 págs.) — Equações lineares de primeira ordem,

Equações não lineares de primeira ordem, Equações lineares de segunda ordem, Estudo de alguns exemplos, Potenciais newtonianos, Bibliografia, Exercícios.

Anexo A — Cálculo das variações (26 págs. com exercícios).

Anexo B — Noções sobre ábacos (12 págs.).

Formulário — Índice dos matemáticos citados — Bibliografia geral — Índice alfabético, (35 págs.).

**118** — R. RISSER e C. E. TRAYNARD — **Les Principes de la Statistique Mathématique** — (Livre I: Séries Statistiques). — 2.<sup>a</sup> ed. rev. e aumentada. — XVI + 196 págs., 3500 fr. — Gauthier-Villars, Paris, 1957.

Trata-se de uma obra integrada no Tratado de Cálculo das Probabilidades de E. BOREL e cuja reedição revista é de assinalar perante a parca bibliografia francesa sobre a matéria. Vem assinada por autores de certa estatura mas, infelizmente, acha-se redigida segundo uma orientação que, na opinião do crítico, a tornam de utilidade duvidosa para qualquer dos diferentes tipos de clientela que se possam considerar. Para os recém-iniciados, pelo menos, não é certamente aconselhável, com a sua irregular exposição da metodologia, a falta de exemplos nalguns pontos cruciais que pedem melhor esclarecimento, a ausência quase completa de figuras e gráficos que auxiliem a intuição, o tosco indiciamento remissivo, a notação pouco feliz e discordante dos usos estabelecidos, a inexistência de exercícios. A própria linguagem é por vezes imprecisa; tal quando se aponta

$$y = \frac{N}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

como a «distribuição teórica de  $N$  objectos simetricamente em torno duma média tomada para origem» (pág. 20).

Este primeiro volume da obra consagra-se ao estudo das distribuições, aos problemas de amostragem e às aplicações às sondagens e ao controle da qualidade das manufacturas. Para um segundo volume anuncia-se distribuições a duas variáveis, correlação regressão e séries cronológicas.

Dois aspectos que surpreenderam o crítico foram o rateio do pouco espaço disponível pelos vários assuntos e a arrumação destes nos vários capítulos. Assim, por exemplo, dedicam-se 20 páginas aos sistemas de curvas de PEARSON, CHARLIER e ROMANOVSKY, em contraste com umas 12 páginas ao todo consagradas às distribuições oriundas da normal e respectivas aplicações; e situa-se uma discussão dos quadros rectangulares (*contingency tables*) ao lado de pormenores sobre levantamentos por amostragem. A distri-

buição de STUDENT mal se vislumbra num obscuro parágrafo, ao passo que se reserva um capítulo inteiro ao menos interessante problema da destrição de duas distribuições sobrepostas.

Todavia, a deficiência realmente importante que se encontra no livro é a falta de generalidade com que são enunciados e resolvidos os problemas. A despeito de, como os autores afirmam, pretenderem «sistemizar as doutrinas da Estatística Matemática», nunca chegam a expôr metódicamente os fundamentos de dois dos principais capítulos dessa ciência — ensaios de hipóteses e estima de parâmetros — não afluando sequer o terceiro — delineamento de experiências. Os ensaios de hipóteses, por exemplo, aparecem disseminados ao longo do livro da forma menos sistemática possível, escorados em vagas referências ao «nível de probabilidade» e à «verosimilhança» da «hipótese nula».

Mas há ainda lugar para fazer vários outros reparos importantes, entre os quais avultam os seguintes.

O capítulo II, intitulado «médias e momentos», enferma de um fraco realce perante o leitor incauto da distinção que é necessário fazer entre os conceitos de distribuição de probabilidades e distribuição de frequências: veja-se o § 9 a respeito da função característica logo a seguir a dois parágrafos acerca de momentos das distribuições de frequências e correcções de SHEPPARD.

No capítulo III faz-se a discussão clássica do sistema de curvas de PEARSON, com longo e tedioso pormenor; mas não se enuncia com generalidade o problema do ajustamento de curvas, nem se referem os objectivos desse ajustamento, nem tampouco se explicita claramente o método dos momentos, embora o mesmo seja aplicado às curvas de PEARSON e a outras (1).

Mais adiante, ao considerar o «test of goodness of fit» de K. PEARSON, os autores não frizam que só *aproximadamente* segue  $\sum \frac{(n_i - n p_i)^2}{n p_i}$  a lei do  $\chi^2$ . Também não explicitam as aplicações do resultado, o que este crítico considera uma omissão inexplicável. De resto, todo o tratamento da versátil distribuição do  $\chi^2$  fornece outro exemplo da má sistematização de que padece a obra: veja-se o que acontece na pág. 124,

(1) V. «The calculation of marriage and maternity rates; their graduation by frequency curves» in *Boletim do Instituto dos Actuários Portugueses*, N.º 7, e «On the graduation of discrete frequency distributions», *ibid.*, N.º 8. No primeiro destes artigos damos um processo simplificando e extremamente potente de ajustamento tanto de curvas de PEARSON como de outras mais gerais pelo método dos momentos. No segundo expomos um método análogo de ajustamento duma classe muito geral de distribuições discretas, das quais se consideram neste livro três casos particulares (binomial, POISSON e PASCAL).

em que se aproveita a aditividade do  $\chi^2$  sem prévia justificação.

É também lamentável que na exposição do problema da comparação das médias de dois universos normais com diferentes variâncias se tenha omitido a solução exacta de WELCH-ASPIN (2), quando afinal se gastam quase duas páginas a descrever uma solução aproximada e já ultrapassada.

Resumindo, para não alongar mais: estamos em presença duma obra demasiado afastada das concepções estatísticas modernas, a despeito da sua recente data de publicação. Os autores justificam o seu pendor decididamente teórico dirigindo-a aos leitores «providos não só duma larga cultura matemática como também de conhecimentos precisos na matéria de Cálculo das Probabilidades». No entanto, duvidamos que alguém, mesmo com generosa dose de tais conhecimentos, possa através deste livro aprender qualquer coisa de Estatística — essa ciência esquivada cujos estudantes tanta dificuldade têm em descobrir textos de qualidade no meio da avalanche que o mercado lhes vem oferecendo.

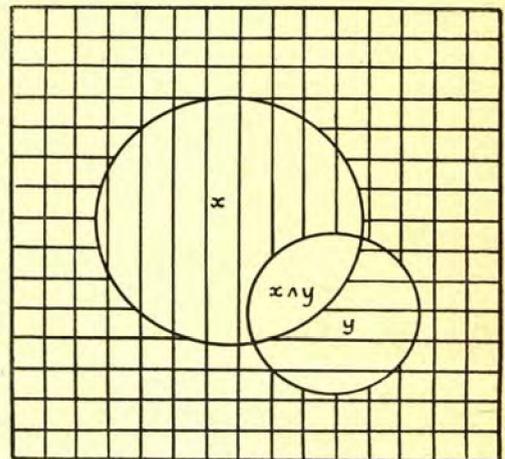
M. A. Fernandes Costa

(2) V. *Gazeta de Matemática*, N.º 63-64.

#### Corrigenda ao artigo

#### Introdução às Álgebras de Boole

- 1 — Por lapso não se incluiu a figura que segue, citada na página 3, coluna 1, linha 7 a contar do fim.



- 2 — O nome do autor é J. C. VINHA NOVAIS.  
3 — Na bibliografia deve ler-se: ... parte de um trabalho do Dr. JOSÉ MORGADO de que se acaba de publicar o 1.º fascículo.