

**4332** — Diz-se que o módulo  $\mathfrak{M}$  é ligado a  $\mathfrak{S}_n$  (grupo simétrico) se para:

- $m \in \mathfrak{M}$  e  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$  se tem  $m^\sigma \in \mathfrak{M}$ .
- $(m\sigma)\tau = m \cdot \sigma\tau$  com  $\tau \in \mathfrak{S}_n$  (associativa).
- $(m + m')\sigma = m\sigma + m'\sigma$  (distributiva).
- $m\varepsilon = m$ ,  $\varepsilon$  elemento unidade de  $\mathfrak{S}_n$ .
- Se os elementos de  $\mathfrak{S}_n$  são automorfismos de  $\mathfrak{M}$ .
- $z \in \mathfrak{M}$  é simétrico se  $z\sigma = z$ .
- $z \in \mathfrak{M}$  é anti-simétrico se  $z\sigma = \pm z$  consoante  $\sigma$  é permutação par ou impar.

Provar:

- $z$  é simétrico se e só se  $z\tau = z$  para qualquer transformação  $\tau$ .
- $z$  é anti-simétrico se  $z\tau = -z$  para qualquer  $\tau$ .
- o elemento  $\sum \pm z\sigma$  com  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$  é anti-simétrico.

**4333** — Dividir a matriz  $\begin{bmatrix} x^2 + 3 & x & 1 \\ x^3 & 2 & x^2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

pela matriz  $\begin{bmatrix} x - 2 & 0 & 0 \\ 0 & x - 2 & 0 \\ 0 & 0 & x - 2 \end{bmatrix}$ .

**4334** — Partindo do conhecimento da noção de elementos associados mostrar que:

- se  $(a, b)$  e  $(a, c)$  são associados da unidade,  $(b, a)$  também o é.
- $(a, b)$  e  $(a, c)$  sendo associados também o é  $(a, bc)$ .
- $(a, b)$  e  $(c, d)$  são associados desde que o seja  $(ac, bd)$ .

## GEOMETRIA SUPERIOR

F. G. P. — GEOMETRIA SUPERIOR — Exame final — 7-957.

**4335** — Seja  $E$  um conjunto arbitrário, e designem  $X$  e  $Y$  partes de  $E^2$ . Representemos por  $X \circ Y$  a totalidade dos elementos  $(a, b)$  de  $E^2$  tais que existe em elemento  $c \in E$  para o qual  $(a, c) \in X$  e  $(c, b) \in Y$ . Mostrar que é associativa a lei de composição assim definida sobre  $P(E^2)$ .

**4336** — Seja  $E$  um espaço vectorial de dimensão finita. Mostrar que, sendo  $f$  e  $g$  dois endomorfismos

de  $E$  tais que  $g \circ f = I$  ( $I$ , identidade), então  $g$  e  $f$  possuem inversas.

**4337** — Mostrar que, se uma parte  $X$  de um espaço vectorial  $E$  é uma variedade linear afim, toda a recta que contem dois pontos distintos de  $X$  está contida em  $X$ .

**4338** — Num espaço vectorial real  $E$  chama-se cone de vértice  $x_0$  toda a parte  $X$  de  $E$  que é reunião de semi-rectas, abertas ou fechadas, de origem  $x_0$ . Mostrar que, para que um cone  $C$  de vértice  $O$  seja convexo, é necessário e suficiente que, quaisquer que sejam  $x$  e  $y$  em  $C$ , se tenha  $x + y \in C$ .

## BOLETIM BIBLIOGRÁFICO

Nesta secção, além de extractos de críticas aparecidas em revistas estrangeiras, serão publicadas críticas de livros e outras publicações de Matemática de que os Autores ou Editores enviarem dois exemplares à Redacção.

**119** — FRANKLIN GUERRA — Análise Matricial das Redes e Máquinas Eléctricas. — 50 págs. Edição do Autor, Braga, 1956.

O presente livro, dedicado a estudantes e engenheiros electrotécnicos, pretende chamar a atenção para a simbiose da electrotécnica e das matemáticas e foi escrito como contributo para atulhar, um pouco que

seja, o fosso bem largo que em Portugal separa a teoria da prática — diz o Autor.

A seriedade com que se tenta realizar o objectivo exposto, obriga-nos, só por si, a considerar mais uma vez o problema do ensino das matemáticas (o mesmo se pode dizer a respeito da física) aos futuros técnicos e a reconhecer que a política seguida na resolução de tal problema tem contribuído, fundamentalmente,

essencialmente, para o descrédito, junto da gente nova, das possibilidades e *necessidades* das aplicações das matemáticas (e igualmente da física) aos problemas de ordem técnica.

Passa-se isto em pleno 1957!

Estas são questões, porém, que apenas pela sua considerável importância nos afloram necessariamente ao pensamento quando tratamos de simples crítica dum livro.

O Autor dá-nos as noções de matriz e operações algébricas sobre matrizes (4 págs.), aplicando-as imediatamente em seguida à resolução dos sistemas lineares sob a forma matricial. No capítulo II trata do estudo de Topologia das redes e sua análise matricial com várias aplicações sob a forma de exemplos; no último capítulo (III) aplica as noções apresentadas anteriormente, fazendo a análise das máquinas rotativas.

Julgamos que no parágrafo 2. 8 o Autor exagerou, talvez influenciado por KRON, a aplicação do formalismo matemático, sem ter tido a preocupação de apresentar o significado preciso, se bem que elementar, dos seres que utiliza: os tensores.

De KRON apenas conhecemos *Tensor Analysis of Networks*; a este livro, porém, opomos vivamente a admirável obra de ZURMÜLLER, citada na bibliografia, *Matrizen. Eine Darstellung für Ingenieure*, profundamente honesta sob o ponto de vista teórico e exemplo flagrante da preparação matemática exigida aos técnicos dos países que, como a Alemanha, caminham à frente no campo das realizações industriais.

Ao terminar, desejamos exprimir ao Autor o nosso desejo de que na sua vida de engenheiro prossiga corajosamente na via em que já obteve resultados bem positivos: a via duma boa compreensão e melhor colaboração entre os «matemáticos» e os «físicos» por um lado, e entre entre os «teóricos» e os «práticos», por outro.

J. G. T.

**120 — RENÉ GARNIER — Cours de Cinématique — Tome II 342 pág. — Gauthier-Villars, — Paris.**

Não conhecemos o vol. I desta obra, composta de 3 tomos, e que contém o curso da Faculdade de Ciências de Paris regido, supomos, em 1956.

A avaliar por crítica lida, nesse Vol. I apresenta o Autor as noções fundamentais da cinemática, tratando-as por uma combinação entre a análise vectorial e o método do triedro móvel.

Mantendo no Vol. II a mesma orientação, o Autor utiliza ainda em certos casos a teoria das transforma-

ções de contacto, a teoria do movimento do plano ou do complexo tangentes-características. A teoria do movimento esférico é apresentada de forma própria e não a partir do movimento plano.

Uma grande parte, talvez a maior, dos resultados apresentados não são vulgares num livro com objectivos de ordem didáctica; são no entanto perfeitamente acessíveis a leitores com a preparação correspondente ao curso de Matemáticas Gerais.

Entre tais resultados, alguns dos quais são já clássicos, (como os trabalhos de RESAL sobre rolamento), encontram-se outros, como as fórmulas de GAUTERO, que regra geral exigem longos cálculos para o seu estabelecimento, ou ainda os notáveis trabalhos de KOENIGS sobre a curvatura das curvas associadas e superfícies regradas associadas. Apesar, porém, da diversidade dos assuntos tratados, o Autor consegue dar-lhe unidade de conjunto, apresentando, além do mais, resultados próprios como a extensão ao espaço da fórmula de SAVARY, extensão essa considerada impossível por KOENIGS.

A presente edição difere da anterior pela inclusão de vários aditamentos (4 notas que se estendem por 27 págs.) e modificações que põem mais em destaque ainda os métodos geométricos característicos da exposição do Autor.

O conteúdo e profusão dos assuntos tratados dão à Cinemática amplidão e relevo que não conhecemos em qualquer outra obra similar.

J. G. T.

**121 — MAURICE D'OCAGNE — Histoire des Sciences Mathématiques — 406 págs. — Librairie Vuibert — Paris, 1955.**

Trata-se da última obra do ilustre autor dos «Hommes et choses de Science»: os seus manuscritos foram cuidadosamente recolhidos pela família, organizados em livro por RENÉ DUGAS e a obra quase inteiramente revista pelo Autor.

O primeiro capítulo (40 págs.) é inteiramente dedicado à matemática e aos matemáticos do período helénico; ao papel dos árabes e dos indianos destina o Autor o mesmo espaço que aos romanos (2 págs. a cada). O período final da Idade Média, importante para a compreensão da penetração da ciência grega na Europa Ocidental, é estudado com mais pormenor, entrando-se em seguida com relativo desenvolvimento nos predecessores de DESCARTES e iniciadores da Álgebra (cerca de 30 págs.). Daqui em diante a História da Matemática é dividida em séculos e subdividida em matemáticos e respectivas biografias!

Aqui e ali há uma excepção: pequeno parágrafo intitulado «Fundação da Academia das Ciências» (em que na realidade quase exclusivamente se faz a biografia do P. MÉRSENNE) ou «Adversários e partidários do Cálculo Infinitesimal», ou ainda «Progresso do Cálculo das Probabilidades», mas onde há sempre observações como esta: ABRAÃO DE MOIVRE nasceu em 1667... morreu em 1754... e era hugenote francês... Assim se faz descrição convencional de cerca de 120 matemáticos e suas obras, (muitas vezes das vidas particulares), a maior parte dos quais franceses. Ao período contemporâneo dedica o Autor apenas 12,5 págs. (!) em que em algumas linhas fala da criação e desenvolvimento da teoria das funções analíticas (2 págs.) teoria das funções de variável real (1,5 pág.), álgebra e teoria dos números (11 linhas), equações diferenciais (1 pág.), equações às derivadas (12 linhas), etc.

Na realidade, não estamos de acordo com este «método» de encarar a história. Supomos de interesse reduzido o facto de a... MARQUISE DU CHÂTELET, née à Paris le 17 décembre 1706, morte à Lunéville le 10 septembre 1749, dont la célébrité a tenu surtout à sa liaison publiquement affichée avec VOLTAIRE... ter sido aluna de MAUPERTUIS e CLAIRAUT; principalmente quando se diz apenas que a topologia «est une étude des propriétés qualitatives des figures...» e «A l'époque contemporaine il faut mentionner les travaux de LEBESGUE, ANTOINE, MARCHAUD, ZORETTI, HILBERT, BROUWER, ALEXANDER e ERRERA (ao todo 9,5 linhas).

De Álgebra: MONTEL reprend les propriétés de LUCAS-GAUSS et LANDAU et précise la grandeur des racines d'une équation d'après la densité des termes de celle-ci; il étudie les rapports entre les racines des équations et des dérivées, et les fonctions rationnelles entrelacées. De ce point de vue sont issus des travaux de FAVARD, DIEUDONNÉ, BIERNACHI, TCHAKALOFF.

De facto, receamos que o leitor desprevenido adquira uma ideia totalmente deturpada do que são a matemática e a sua evolução, principalmente no período contemporâneo, época de realizações extraordinárias cujo alcance nem de longe podemos antever.

J. G. T.

122 -- W. BLASCHKE — *Kreis und Kugel* — 166 págs. — Walter de Gruyter & C., — Berlin, 1956.

Esta segunda edição da obra do prof. BLASCHKE mantém as mesmas características fundamentais da primeira publicada há precisamente 40 anos, que marcou uma posição de destaque no estudo dos problemas de extremo em domínios convexos. Desde

há 40 anos pois que esta obra vem agitando, na formação dos jovens géometras, velhos problemas que remontam a ARQUIMEDES.

Como diz o Autor, no prefácio, vários matemáticos, STEINER, BRUNN, MINKOWSKI, SCHWARZ contribuíram poderosamente para o desenvolvimento do estudo de tais problemas, criando métodos específicos; por outro lado a nova edição beneficia ainda de resultados de HILBERT, ALEXANDROW, HADWIGER.

Trata-se portanto de obra, considerada prima, necessária aos iniciantes nos referidos problemas isoperimétricos e afins.

O livro divide-se em quatro partes: nas duas primeiras estudam-se as propriedades de mínimo do círculo e da esfera com base no método de STEINER (Viergelenkverfahren); a terceira expõe os resultados de SCHWARZ, BRUNN e MINKOWSKI sobre os corpos convexos; a quarta apresenta novos resultados da mesma teoria obtidos por intermédio da geometria diferencial «im grossen». Termina com um capítulo onde se dá uma visão de conjunto dos assuntos tratados e suas relações com a Geometria Projectiva e Topologia. A obra está recheada de utilíssimas notas históricas e bibliográficas.

J. G. T.

No próximo número da Gazeta serão criticadas as obras seguintes:

WILHELM SPECHT — *Elementare Beweise der Prinzahlsätze* — 78 págs. — Deutsche Verlag der Wissenschaften — Berlin, 1956.

CARL B. BOYER — *History of Analytic Geometry* — 292 págs. — The Scripta Mathematica Studies — New York, 1956.

A. J. CHINSTSCHIN — *Mathematisch Grundlagen der Quantenstatistik* — 200 págs. — Akademie-Verlag — Berlin, 1956.

IWANENKO-SOKOLOW — *Klassische Feldtheorie* — 348 págs. — Akademie Verlag — Berlin, 1953.

Corrigenda ao artigo

#### Aspectos da Actualidade Matemática

- 1 — Trata-se da Aula Inaugural na Faculdade de Filosofia da Universidade do Recife e não da Aula Inaugural na Universidade do Recife, que foi outra sessão diferente!
- 2 — Na 1.ª pág., 1.ª coluna, 4.ª linha a contar do fim, deve ler-se: ... e transmiti-lo às...
- 3 — Na 2.ª pág., 1.ª coluna, 28.ª linha, deve ler-se: ..., como uma condição...