

As superfícies planificáveis e as envolventes das faces do triedro móvel

por J. Ribeiro de Albuquerque

Apresentam-se neste artigo muitos assuntos, relacionados intimamente entre si, no estudo geométrico das curvas do espaço.

Dada uma família de curvas do espaço, com um só parâmetro, cujas equações são

$$\begin{cases} f_1(x, y, z, \alpha) = 0 \\ f_2(x, y, z, \alpha) = 0 \end{cases}$$

quando as funções f_1 e f_2 forem contínuas e admitirem derivadas relativamente ao parâmetro α , uniformemente em certa região do espaço, um raciocínio bem conhecido permite achar as equações da curva envolvente, com a eliminação de α , entre três das quatro equações :

$$f_1 = 0, \frac{\partial f_1}{\partial \alpha} = 0, f_2 = 0, \frac{\partial f_2}{\partial \alpha} = 0 \text{ quando uma}$$

destas equações for consequência das outras.

Do mesmo modo, dada uma família de superfícies com um só parâmetro

$$F(x, y, z, \alpha) = 0$$

determina-se a equação da superfície envolvente, eliminando o parâmetro no sistema :

$$F = 0, \frac{\partial F}{\partial \alpha} = 0.$$

Este último sistema representa uma família de curvas, ao longo de cada uma das quais a envolvente tem contacto com uma envolvida.

Tais curvas são as curvas características, e a envolvente das características é uma curva situada sobre a superfície envolvente das

superfícies, e que se chama a aresta de reversão.

Isto mesmo vai ser considerado num caso particular notável; é o caso da superfície envolvente duma família de planos do espaço.

Chamam-se superfícies planificáveis às envolventes dos planos duma família de planos com um só parâmetro.

Considere-se, no espaço, uma família de planos, que possa ser encarada como o conjunto contínuo e ordenado de todas as posições dum mesmo plano que tivesse executado um determinado movimento no espaço, durante um certo intervalo de tempo.

Tomando o tempo como parâmetro, uma variável t definida num intervalo finito ou infinito, a equação da família de planos será

$$A(t).X + B(t).Y + C(t).Z + D(t) = 0$$

com $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$, $D(t)$ funções contínuas e deriváveis de t . É possível tirar o valor de uma das variáveis, por exemplo Z , e mudar de parâmetro, de modo a ter

$$1) \quad Z = \alpha.X - \varphi(\alpha)Y - \psi(\alpha)$$

supondo φ e ψ funções de α , contínuas e com derivadas de primeira e segunda ordem, pelo menos numa vizinhança de certo ponto α .

É com estas condições que vamos abordar alguns conceitos geométricos importantes; quando as condições se não verificarem, é fácil de ver quais os conceitos que ficam sem sentido, ou quais as anormalidades, isto é, as singularidades que os afectarão, e que se põem à margem deste estudo.

Dada a família de planos 1), com um parâ-

metro α , as curvas características são as rectas $r(\alpha)$ definidas por

$$2) \quad \begin{cases} Z = \alpha X - \varphi(\alpha) Y - \psi(\alpha) \\ O = X - \varphi'(\alpha) Y - \psi'(\alpha) \end{cases}$$

e a planificável é o lugar geométrico destas rectas. É sempre possível resolver o sistema 2), obtendo o valor de duas variáveis, X e Z por exemplo, em função da outra e do parâmetro α ; teríamos uma representação paramétrica da planificável.

Se tomarmos para Y uma função arbitrária de α , teremos o sistema

$$3) \quad \begin{cases} X = \varphi' Y + \psi' \\ Y = \theta \\ Z = (\alpha \varphi' - \varphi) Y + (\alpha \psi' - \psi) \end{cases}$$

que representa uma curva arbitrária traçada sobre a planificável.

Resolvamos o seguinte problema: Quais as curvas traçadas sobre a planificável às quais as rectas $r(\alpha)$ são tangentes?

Determina-se a função θ de modo que a tangente à curva 3) seja perpendicular aos eixos dos planos do sistema 2). As condições de perpendicularidade dão:

$$\theta = -\frac{\psi''}{\varphi''} \quad \text{ou} \quad Y = -\frac{\psi'}{\varphi'}$$

e vê-se que esta curva é a aresta de reversão da planificável, cujas equações serão obtidas do sistema 3) com a função determinada.

Para procurarmos o plano osculador da aresta de reversão, teremos que calcular os menores compreendidos na matriz seguinte:

$$\begin{vmatrix} \varphi'' Y + \varphi' \frac{dY}{d\alpha} + \psi'' & \frac{dY}{d\alpha} & \alpha \varphi'' Y + (\alpha \varphi' - \varphi) \frac{dY}{d\alpha} + \alpha \psi'' \\ \varphi'' \frac{dY}{d\alpha} + \varphi' \frac{d^2 Y}{d\alpha^2} & \frac{d^2 Y}{d\alpha^2} & \alpha \varphi'' \frac{dY}{d\alpha} + (\alpha \varphi' - \varphi) \frac{d^2 Y}{d\alpha^2} \end{vmatrix}$$

e com cálculos muito fáceis se obtém para equação do plano osculador

$$A(\xi - X) + B(\eta - Y) + C(\zeta - Z) = 0$$

onde

$$\begin{aligned} A &= \alpha \varphi'' \left(\frac{dY}{d\alpha} \right)^2 \\ B &= -\varphi \varphi'' \left(\frac{dY}{d\alpha} \right)^2 \\ C &= -\varphi'' \left(\frac{dY}{d\alpha} \right)^2. \end{aligned}$$

Isto conduz a:

$$\alpha(\xi - X) - \varphi(\eta - Y) - (\zeta - Z) = 0$$

mas, atendendo à terceira equação do sistema 3) ou à segunda do sistema 2), obtém-se finalmente

$$\zeta = \alpha \xi - \varphi \eta - \psi$$

Conclusão: o plano osculador num ponto da aresta de reversão é o plano da família de planos envolvidos, que passa por esse ponto.

Esta propriedade permite, evidentemente, achar as equações da planificável quando sejam dadas as equações da aresta de reversão.

Com efeito, suponhamos dadas as equações duma curva Γ ; suporemos que os pontos de Γ são obtidos com a coordenada curvilínea s , e as equações paramétricas são então

$$x = x(s) \quad y = y(s) \quad z = z(s).$$

O plano osculador é dado pela equação

$$4) \quad (X - x)\lambda + (Y - y)\mu + (Z - z)\nu = 0$$

onde λ, μ, ν representam os cosenos directores da binormal, \vec{B} .

Temos na equação 4) uma família de planos com um só parâmetro s ; deveremos achar a envolvente e provar que Γ é a aresta de reversão. Derivemos, em ordem a s , a equação 4)

$$\begin{aligned} (X - x) \frac{d\lambda}{ds} + (Y - y) \frac{d\mu}{ds} + (Z - z) \frac{d\nu}{ds} = \\ = \alpha \lambda + \beta \mu + \gamma \nu = 0 \end{aligned}$$

onde α, β, γ são os cosenos directores da

tangente, \vec{T} . Com os fórmulas de FRENET-SERRET

$$5) \begin{cases} \frac{d\alpha}{ds} = \xi & \frac{d\beta}{ds} = \eta & \frac{d\gamma}{ds} = \zeta \\ \frac{d\lambda}{ds} = \xi & \frac{d\mu}{ds} = \eta & \frac{d\nu}{ds} = \zeta \\ \frac{d\xi}{ds} = \frac{\alpha}{\rho} - \frac{\lambda}{\tau} \frac{d\eta}{ds} & \frac{d\eta}{ds} = \frac{\beta}{\rho} - \frac{\mu}{\tau} \frac{d\zeta}{ds} & \frac{d\zeta}{ds} = \frac{\gamma}{\rho} - \frac{\nu}{\tau} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{\vec{N}}{\rho} \\ \frac{d\vec{B}}{ds} = \frac{\vec{N}}{\tau} \\ \frac{d\vec{N}}{ds} = -\left(\frac{\vec{T}}{\rho} + \frac{\vec{B}}{\tau}\right) \end{cases}$$

a última equação transforma-se em

$$(X-x)\xi + (Y-y)\eta + (Z-z)\zeta = 0$$

que é a equação do plano rectificante. As rectas características são definidas pela equação 4) e esta última, e são as tangentes à curva Γ .

Isto prova-nos, já, que a curva Γ é a aresta de reversão da envolvente dos planos osculadores da curva dada. E com efeito, derivando mais uma vez, obtemos

$$\begin{aligned} (X-x)\frac{d\xi}{ds} + (Y-y)\frac{d\eta}{ds} + (Z-z)\frac{d\zeta}{ds} = \\ = \alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta = 0 \end{aligned}$$

e de novo com as fórmulas de FRENET-SERRET e com as equações já obtidas, vem

$$(X-x)\alpha + (Y-y)\beta + (Z-z)\gamma = 0.$$

As três equações obtidas dão a aresta de reversão. Ora no sistema,

$$\begin{cases} (X-x)\lambda + (Y-y)\mu + (Z-z)\nu = 0 \\ (X-x)\xi + (Y-y)\eta + (Z-z)\zeta = 0 \\ (X-x)\alpha + (Y-y)\beta + (Z-z)\gamma = 0 \end{cases}$$

de equações homogêneas nas incógnitas $(X-x)$ $(Y-y)$ $(Z-z)$ tem-se, como é bem

sabido

$$6) \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \xi & \eta & \zeta \\ \lambda & \mu & \nu \end{vmatrix} = 1$$

o que implica uma solução nula, a única solução: $X = x(s)$, $Y = y(s)$, $Z = z(s)$.

A aresta de reversão da planificável envolvente dos planos osculadores duma curva dada, é a própria curva.

Chegamos ao mesmo resultado com um terço do esforço, utilizando os vectores. A equação do plano osculador é o produto interno nulo

$$(M-P)/\vec{B} = 0$$

onde $P(s)$ é o ponto de Γ , e M o ponto genérico do plano. Derivando, vem

$$\begin{aligned} (M-P) \left/ \frac{d\vec{B}}{ds} - \frac{dP}{ds} \right/ \vec{B} = (M-P) \left/ \frac{d\vec{B}}{ds} - \right. \\ \left. - \vec{T} \right/ \vec{B} = (M-P) \left/ \frac{d\vec{B}}{ds} = 0 \right. \end{aligned}$$

e com as fórmulas 5) tem-se

$$(M-P)/\vec{N} = 0$$

que é a equação do plano rectificante. Derivando, ainda uma vez

$$(M-P) \left/ \frac{d\vec{N}}{ds} - \vec{T} \right/ \vec{N} = (M-P) \left/ \frac{d\vec{N}}{ds} = 0 \right.$$

ou, com as fórmulas 5) e atendendo ao já obtido

$$(M-P)/\vec{T} = 0$$

que é a equação do plano normal. A aresta de reversão é dada por

$$(M-P)/\vec{T} = 0; (M-P)/\vec{N} = 0; (M-P)/\vec{B} = 0$$

e o vector $M-P$ tem componentes nulas no triedro móvel, donde: $M = P$.

*

Seja dado um plano π cuja equação tomaremos com a forma

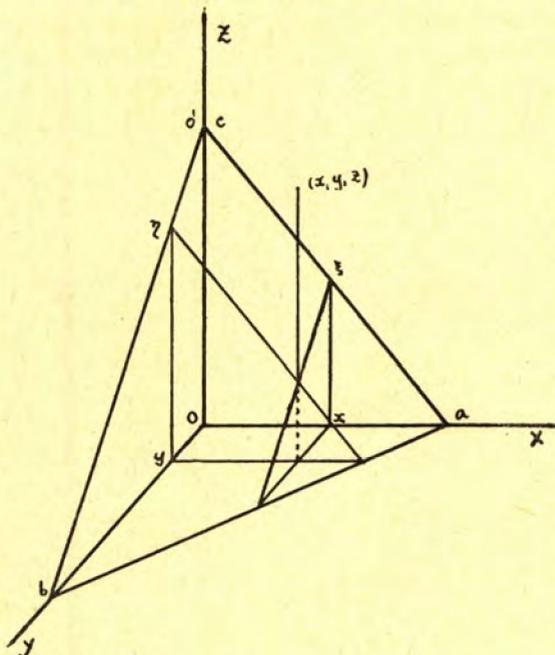
$$7) \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

e procuremos estudar a secção feita por π na planificável.

As equações da secção serão as equações 3) com uma função $\theta(\alpha)$ que se determina com a equação 7). A função θ é dada por

$$8) \quad \frac{\varphi' \theta + \psi'}{a} + \frac{\theta}{b} + \frac{(\alpha \varphi' - \varphi)\theta + (\alpha \psi' - \psi)}{c} = 1$$

Façamos uma mudança de coordenadas: mudemos o plano XOY para o plano $\xi O' \eta$ coincidente com π e conservando os outros planos coordenados. Na figura 1, estão re-



presentadas secções feitas pelos planos $X=x$ e $Y=y$ no tetraedro formado pelos antigos planos coordenados e o plano π .

Por semelhança de triângulos, tira-se

$$\begin{cases} \xi = \frac{\sqrt{a^2 + c^2}}{a} x = K_1 x \\ \eta = \frac{\sqrt{b^2 + c^2}}{b} y = K_2 y \\ \zeta - z = c \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 \right). \end{cases}$$

As equações da curva secção, transformam-se em

$$\begin{cases} \xi = K_1 X & X = \varphi' \theta + \psi' \\ \eta = K_2 Y = K_2 \theta \\ \zeta = O \end{cases}$$

onde θ é determinada pela equação 8).

Derivando esta equação 8), vem

$$\frac{\varphi'' \theta + \varphi' \theta' + \psi''}{a} + \frac{\theta'}{b} + \frac{\alpha \varphi'' \theta + \alpha \psi'' + (\alpha \varphi' - \varphi) \theta'}{c} = 0$$

o que nos mostra o seguinte: os valores α_0 que anulam θ' , fazem

$$\frac{\varphi'' \theta + \psi''}{a} + \frac{\alpha(\varphi'' \theta + \psi'')}{c} = 0$$

ou

$$\theta(\alpha_0) = - \frac{\psi''(\alpha_0)}{\varphi''(\alpha_0)} = Y(\alpha_0)$$

e inversamente. A função $Y(\alpha)$ é da aresta de reversão, ao passo que $\theta(\alpha)$ é da secção.

Achemos as derivadas de ξ e η , para estudo da tangente.

$$\frac{d\xi}{d\alpha} = K_1 (\varphi'' \theta + \varphi' \theta' + \psi'') \quad \frac{d\eta}{d\alpha} = K_2 \theta'$$

Vê-se, agora, que: se α_0 é valor que conduz a um ponto comum à secção e à aresta de reversão, isto é, $\theta(\alpha_0) = Y(\alpha_0)$, vem:

$$\frac{d\xi}{d\alpha} = \frac{d\eta}{d\alpha} = 0.$$

Há singularidade nos pontos de encontro.

Temos, ainda, com facilidade

$$\frac{d^2 \xi}{d\alpha^2} = K_1 (\varphi''' \theta + 2\varphi'' \theta' + \varphi' \theta'' + \psi''')$$

$$\frac{d^2 \eta}{d\alpha^2} = K_2 \theta''$$

e portanto

$$\Delta \eta = (\alpha - \alpha_0) \frac{d\eta}{d\alpha_0} + \frac{(\alpha - \alpha_0)^2}{2} \frac{d^2 \eta}{d\alpha_0^2} + \dots$$

$$\Delta \xi = (\alpha - \alpha_0) \frac{d\xi}{d\alpha_0} + \frac{(\alpha - \alpha_0)^2}{2} \frac{d^2 \xi}{d\alpha_0^2} + \dots$$

donde vem

$$\lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} \frac{\Delta \eta}{\Delta \xi} = \frac{K_2 \theta''}{K_1 \left[\varphi''' \left(-\frac{\psi''}{\varphi''} \right) + \varphi' \theta'' + \frac{\psi''' \varphi''}{\varphi''} \right]} = \frac{K_2 \theta''}{K_1 [\varphi' \theta'' - \varphi'' Y']}$$

Estes valores estão calculados para $\alpha = \alpha_0$ e Y' representa o valor da derivada de

$$Y(\alpha) = -\frac{\psi''(\alpha)}{\varphi''(\alpha)} \text{ para } \alpha = \alpha_0$$

Quando $Y'(\alpha_0) \neq \theta'(\alpha_0) = 0$ este limite é perfeitamente determinado; no caso contrário haverá contacto entre a secção e a aresta de reversão no ponto em comum.

Afastada a hipótese de contacto, quando α cresce ou decresce para α_0 , em ambos os casos a partir de certa altura, o cociente

$\frac{\Delta \eta}{\Delta \xi}$ tem o mesmo sinal e existem duas semi-

-tangentes à secção, coincidentes, e não no prolongamento uma da outra; o ponto singular é um ponto de reversão, uma cúspide.

Em resumo: *todo o plano que não tenha contacto com a aresta de reversão, mas que a corte, determina na planificável uma secção com um ponto de reversão, naquele ponto em que encontra a aresta.*

São superfícies planificáveis, as superfícies cónicas e cilíndricas. Consideremos uma família de planos, todos eles com o ponto fixo $(0, 0, c)$ e cuja equação se pode pôr com a forma

$$\frac{x}{a(t)} + \frac{y}{b(t)} + \frac{z}{c} = 1$$

onde $a(t)$, $b(t)$ são funções dum mesmo parâmetro t , o parâmetro da família. Tirando o valor de Z , vem:

$$Z = -\frac{c}{a(t)} X - \frac{c}{b(t)} Y + c$$

e, pondo $\alpha = -\frac{c}{a(t)}$, uma mudança de parâmetro, temos a equação

$$Z = \alpha X + \varphi(\alpha) Y + c.$$

As rectas características são dadas por

$$r(\alpha) \begin{cases} Z = \alpha X + \varphi(\alpha) Y + c \\ 0 = X + \varphi'(\alpha) Y \end{cases}$$

e, como o segundo plano passa por \vec{OZ} , todas as rectas características passam pelo ponto $(0, 0, c)$.

A aresta de reversão obtém-se derivando mais uma vez: $\varphi''(\alpha) Y = 0$ ou $Y = 0$. As equações da aresta de reversão, reduzem-se a

$$\begin{cases} X = 0 \\ Y = 0 \\ Z = c. \end{cases}$$

A planificável é uma superfície cónica, com o vértice em $V(0, 0, c)$ e com a directriz situada no plano XOY , dada por:

$$\begin{cases} \alpha X + \varphi(\alpha) Y + c = 0 \\ X + \varphi'(\alpha) Y = 0 \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} X = -\frac{c \varphi'}{\alpha \varphi' - \varphi} \\ Y = \frac{c}{\alpha \varphi' - \varphi} \end{cases} \quad \text{ou} \quad X + \varphi' Y = 0.$$

Consideremos agora uma família de planos π todos paralelos a uma direcção fixa. Para fixar um sistema de eixos coordenados conveniente, tomemos um dos planos da família para plano XOZ , e todos os outros cortarão este, segundo rectas paralelas. A equação da família de planos pode então pôr-se sob a forma

$$\frac{X}{a \cdot k(t)} + \frac{Y}{b(t)} + \frac{Z}{c \cdot k(t)} = 1$$

onde $b(t)$ e $k(t)$ são duas funções do parâmetro t , da família.

Pode tirar-se o valor de X e temos:

$$X = -a \frac{k(t)}{b(t)} Y - \frac{a}{c} Z + a k(t)$$

e, pondo $\alpha = -a \frac{k(t)}{b(t)}$, mudança de parâmetro, temos a equação:

$$X = \alpha Y - \frac{a}{c} Z - a \psi(\alpha).$$

As rectas características são dadas por

$$r(\alpha) \begin{cases} X = \alpha Y - \frac{a}{c} Z - a \psi(\alpha) \\ O = Y - a \psi'(\alpha) \end{cases}$$

e são todas paralelas à direcção fixa, pois estes dois planos são paralelos a essa direcção. A aresta de reversão está portanto no infinito.

A envolvente é um cilindro de geratrizes paralelas à direcção dada, e, com directriz situada em XOY dada pelas equações paramétricas

$$9) \quad \begin{cases} X = a[\alpha \psi' - \psi] \\ Y = a \psi' \end{cases}$$

Se tivéssemos tomado o eixo \vec{OZ} com a direcção dada, os resultados eram ainda os mesmos, bastando supor $c = +\infty$.

As equações duma curva traçada sobre o cilindro, são, como já dissemos no caso geral,

$$10) \quad \begin{cases} X = a(\alpha \psi' - \psi) \\ Y = a \psi' \\ Z = \theta \end{cases}$$

onde θ é uma função arbitrária de α .

Procuremos as curvas cujas tangentes fazem ângulo constante V com o eixo \vec{OZ} . Orientamos a tangente de modo que $0 < V <$

$< \frac{\pi}{2}$ e orientamos a curva de modo concordante. As equações da tangente são

$$\frac{\xi - X}{a \alpha \psi''} = \frac{\eta - Y}{a \psi''} = \frac{\zeta - Z}{\theta'}$$

e então vem

$$\cos V = \frac{\theta'}{\sqrt{a^2 \psi''^2 (\alpha^2 + 1) + \theta'^2}}$$

$$e \quad \theta' = \cotg V \cdot a \psi'' \sqrt{\alpha^2 + 1}.$$

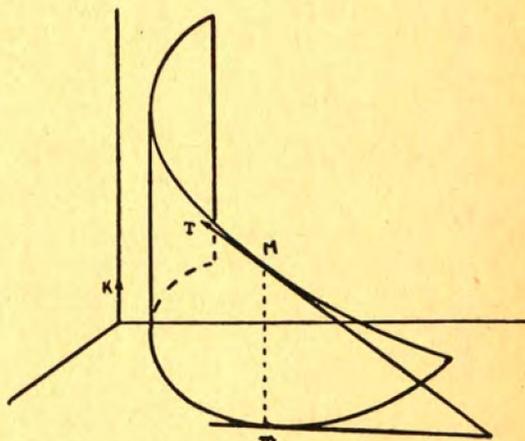
As curvas procuradas foram chamadas *hélices* e as suas equações são as 10), com uma das funções θ , dadas por

$$\theta = a \cdot \cotg V \int_{\alpha_0}^{\alpha} \psi'' \sqrt{\alpha^2 + 1} d\alpha + c^{te}.$$

Orientando a directriz 9) do cilindro de modo concordante com a hélice fornecida por θ que se anula para $\alpha = \alpha_0$; tomando para origem da coordenada curvilínea s sobre a directriz 9) o ponto em que a hélice a encontra, virá como medida do arco s da directriz, desde essa origem até à projecção m do ponto M da hélice

$$s = \int_{\alpha_0}^{\alpha} \psi'' \sqrt{\alpha^2 + 1} d\alpha.$$

A cota Z do ponto M da hélice é proporcional ao comprimento S do arco, da



directriz do cilindro, descrito, pela projecção m de M , desde o ponto de encontro.

Inversamente, sejam $x = x(s)$, $y = y(s)$ as equações duma curva Γ situada em XOY e,

$$X = x(s) \quad Y = y(s) \quad Z = ks$$

as equações duma curva no espaço; esta curva está evidentemente no cilindro de directriz Γ , e o terceiro coseno director da tangente é K

Se \vec{T} é o vector unitário sobre a tangente à hélice, e se \vec{K} é o vector unitário sobre \vec{OZ} , será:

$$\vec{T} / \vec{K} = 0$$

Derivando em ordem a S , coordenada curvilínea sobre a hélice, temos

$$\frac{d\vec{T}}{dS} / \vec{K} = 0$$

e com as fórmulas 5) de FRENET-SERRET, vem

$$\frac{\vec{N}}{\rho} / \vec{K} = 0$$

afastando a hipótese da curva rectilínea, $\rho \neq \infty$, será: $\vec{N} / \vec{K} = 0$

Nas hélices a normal principal é perpendicular a \vec{OZ} e, inversamente, pois o raciocínio se deixa inverter.

Derivando $\vec{N} / \vec{K} = 0$, de novo, em ordem

a S , vem: $\frac{d\vec{N}}{dS} / \vec{K} = 0$ e com as fórmulas 5), temos:

$$\left(-\frac{\vec{B}}{\tau} - \frac{\vec{T}}{\rho} \right) / \vec{K} = 0$$

Ora, da figura, tira-se com facilidade que, $\vec{B} / \vec{K} = \pm \text{sen } V$, logo

$$\mp \frac{\text{sen } V}{\tau} = \pm \frac{\cos V}{\rho}$$

e finalmente

$$\frac{\tau}{\rho} = -\text{tg } V$$

Nas hélices é, portanto, constante o cociente das duas curvaturas.

Inversamente: se $\tau = k\rho$, com as fórmulas de FRENET-SERRET, vem $d\vec{B} = k d\vec{T}$ e $\vec{B} = k \cdot \vec{T} + \vec{k}'$ onde \vec{k}' não é nulo. Multiplicando internamente por \vec{N} vem: $\vec{k}' / \vec{N} = 0$ e, como já se viu, a curva é uma hélice.

Nas hélices, é constante o cociente das duas curvaturas, e inversamente.

(Continua no próximo número)

Duas fórmulas de Análise Combinatória

por Austregésilo Gomes Spíndola

A dedução apresentada foi-me sugerida pelo artigo *Nota a «Uma demonstração por indução finita»* do Dr. GUSTAVO DE CASTRO, Gaz. de Mat. 54, Abril de 1953, que fui encarregado, pelo Prof. M. ZALUAR, de expôr em 1956 numa das sessões do Seminário do Cálculo das Probabilidades do Instituto de Física e Matemática da Universidade do Recife.

Problema

Uma urna contém n esferas negras e a esferas azuis. Retiram-se simultaneamente b esferas. Qual a probabilidade de saída de i esferas azuis?

O número N de casos igualmente possíveis é $N = \binom{n+a}{b}$ e o número F_i dos ca-

sos favoráveis ao acontecimento A_i , de que pretendemos calcular a probabilidade, é

$$F_i = \binom{n}{b-i} \binom{a}{i}$$

Temos então

$$p(A_i) = \frac{\binom{n}{b-i} \binom{a}{i}}{\binom{n+a}{b}}$$