se elimina nas outras; vem o sistema

$$\begin{cases} -\dfrac{3}{2x-y} = \dfrac{4}{2y-x} \\ x^2 - xy + y^2 - 1 = 0 \end{cases} \quad ou \quad \begin{cases} y = -\dfrac{5}{2}x \\ x^2 - xy + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = -\dfrac{2}{\sqrt{39}} \\ y_1 = \dfrac{5}{\sqrt{39}} \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = \dfrac{2}{\sqrt{39}} \\ y_2 = -\dfrac{5}{\sqrt{39}} \end{cases}.$$

Estudam-se agora os extremos livres das funções

$$g_1(x,y) = (3x - 4g - 12)^2 + \frac{1}{3\sqrt{39}}(x^2 - xy + y^2 - 1)$$

$$\textit{no ponto} \left(-\frac{2}{\sqrt{39}}, \frac{5}{\sqrt{39}}\right)$$

$$g_2(x,y) = (3x - 4g - 12)^2 - \frac{1}{3\sqrt{39}}(x^2 - xy + y^2 - 1)$$

$$\textit{no ponto} \left(\frac{2}{\sqrt{39}}, -\frac{5}{\sqrt{39}}\right)$$

Tem-se

$$\frac{\partial^2 g}{d x^2} = 18 + 2\lambda = 9\left(2 \pm \frac{1}{3\sqrt{39}}\right);$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} = -24 - \lambda = -\left(2 \pm \frac{1}{3\sqrt{39}}\right);$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 32 + 2\lambda = 2\left(16 \pm \frac{1}{3\sqrt{39}}\right).$$

sendo os sinais superiores para a função $g_1(x,y)$ *e os inferiores para* $g_2(x,y)$. *Como se tem*

$$\left(24 \pm \frac{1}{3\sqrt{39}}\right)^2 - 18\left(2 \pm \frac{1}{3\sqrt{39}}\right)\left(16 \pm \frac{1}{3\sqrt{39}}\right) =$$

$$= \begin{cases} -\dfrac{17}{117} - \dfrac{276}{3\sqrt{39}} < 0 \\ -\dfrac{17}{117} + \dfrac{372}{3\sqrt{39}} > 0 \end{cases}$$

A função $(3x - 4y - 12)^2$ *tem extremos da mesma qualidade e nos mesmos pontos onde os têm as funções* $g_1(x,y)$ *e* $g_2(x,y)$; *vem então*

$$\textit{máximo em} \left(-\frac{2}{\sqrt{39}}, \frac{5}{\sqrt{39}}\right)$$

$$\textit{mínimo em} \left(\frac{2}{\sqrt{39}}, -\frac{5}{\sqrt{39}}\right).$$

Fernando de Jesus

MATEMÁTICAS ELEMENTARES

Exame de aptidão para frequência das licenciaturas em Ciências Matemáticas, em Ciências Fisico-Quimicas e em Ciências Geográficas, preparatórios das escolas militares e curso de engenheiro geografo — Ano de 1958 — (1.ª chamada). F. C. L.

4484 — Determinar todos os números naturais que divididos por 17 dão resto igual ao quadrado do cociente respectivo.

R. *Os números serão da forma* $17x + x^2$ *sendo* x *um inteiro maior que zero e tal que* $x^2 < 17$. *Conclue-se então que* x *só pode ser os valores* 1, 2, 3 *e* 4 *e os correspondentes números são* 18, 38, 60 *e* 84.

4485 — Determinar os valores de m para os quais a equação $x^2 - 3x + 6 = m(x - 6 - m)$ tem as raízes reais e desiguais.

R. *A equação proposta è equivalente a* $x^2 - (3 + m)x + 6 + 6m + m^2 = 0$. *Para que as raízes sejam reais e desiguais è necessário que o descriminante seja positivo. Será então* $(m + 3)^2 - 4(m^2 + 6m + 6) > a$ *desigualdade equivalente a* $m^2 + 6m + 5 < 0$; *esta como se reconhece fácilmente tem como soluções os valores de* m *tais que* $-5 < m < -1$, *visto* -5 *e* -1 *serem os zeros do trinómio primeiro membro da desigualdade.*

4486 — Derivar a função $y = x/(\sqrt{1-x^3})$ e simplificar o resultado.

R. *Será* $y' = (1 - x^3)^{-\frac{1}{2}} + x \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (1 - x^3)^{-\frac{1}{2}-1} \cdot (-3x^2) = (2 + x^3) : 2\sqrt{(1-x^3)^3}$.

4487 — Sem usar tábuas, resolver o triângulo rectângulo em que a hipotenusa mede 14 metros e um dos catetos 7 metros. (usar $\sqrt{3} = 1{,}732$).

R. *Como a hipotenusa é o dobro de um dos catetos, então o ângulo oposto a esse cateto mede* $\frac{\pi}{6}$ *radianos e o outro ângulo agudo* $\frac{\pi}{3}$. *Seja* $b = 7$ *e* $a = 14$; *como sabemos é sen* $\widehat{C} = c/a$ *e como* $\widehat{C} = \frac{\pi}{3}$ *temos* *a sen* $\frac{\pi}{3}=c$ *ou seja* $14\times\frac{\sqrt{3}}{2}=c$; *isto é* $c=7\times\sqrt{3}=$ $=12{,}124$ m .

4488 — Resolver a equação

$$sen\, x + sen\, 2\,x = cos\,\frac{x}{2}$$

R. *Como* $\operatorname{sen} 2\,x + \operatorname{sen} x = 2 \operatorname{sen}\frac{3\,x}{2}\cos\frac{x}{2}$ *vem* $\left(2\operatorname{sen}\frac{3\,x}{2}-1\right)\cos\frac{x}{2}=0$. *Daqui resulta que é: ou* $\cos\frac{x}{2}=0$ *isto é* $\frac{x}{2}=(2\,n+1)\,\frac{\pi}{2}$ (n *inteiro*) *e portanto* $x=(2\,n+1)\,\pi$; *ou então é* $2\operatorname{sen}\frac{3\,x}{2}-1=0$, *ou* $\operatorname{sen}\frac{3\,x}{2}=\frac{1}{2}$ *ou ainda* $\operatorname{sen}\frac{3\,x}{2}=\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}$ *e daqui resulta* $\frac{3\,x}{2}=n\pi+(-1)^n.\frac{\pi}{6}$ *e finalmente* $x=\frac{2\,n\,\pi}{3}+$ $+(-1)^n\frac{\pi}{9}$ (n *inteiro*).

4489 — Os vertices dum triângulo são $(2,3)$, $(-3,1)$ e $(3,-1)$. Verificar que a recta definida pelos pontos médios dos lados do triângulo é paralela ao terceiro lado.

R. *Sejam* $A\,(2,3)$, $B\,(-3,1)$ *e* $c\,(3,-1)$ *os vèrtices do triângulo*; M_a, M_b *e* M_c *os pontos médios dos lados* a (*oposta a A*), b (*oposto a B*) *e* c (*oposto a C*). *As coordenadas dos pontos médios são* $M_a\left(\frac{-3+3}{2},\frac{1-1}{2}\right)$, $M_b\left(\frac{2+3}{2},\frac{3-1}{2}\right)$ *e* $M_c\left(\frac{2-3}{2},\frac{3+1}{2}\right)$ *ou* $M_a\,(0,0)$, $M_b\,(5/2,1)$ *e* $M_c\,(-1/2,2)$. *As equações dos lados são: do lado* a, $(x-3):(3+3)=(y+1):(-1-1)$ *ou o que é o mesmo* $6\,y+2\,x=0$; *ao lado* b, $(x-2):(2-3)=(y-3):(3+1)$ *ou seja* $4\,x+y=11$ *e do lado* c $(x-2):(2+3)=(y+3):(3+1)$ *ou* $2\,x-5\,y=-11$. *As equações das rectas que unem os pontos médios são: de* $M_a\,M_c$, $(x+1/2):(-1/2-0)=(y-2):(2-0)$ *ou seja* $4x+y=0$ *paralela a* $4x+y=11$, *equação do lado* b ; *de* $M_a\,M_b$, $(x-0):(0-5/2)=(y-0):(0-1)$ *ou* $2\,x-5\,y=0$ *paralela a* $2\,x-5\,y=-11$, *equação do lado* c; *e de* $M_b\,M_c$, $(x+1/2):(-1/2-5/2)=(y-2):(2-1)$ *ou* $x+3\,y=6$, *paralela à recta* $6\,y+2\,x=0$ *equação do lado* a .

Ano de 1958 — (2.ª chamada)

4490 — Determinar os números naturais que divididos por 7 dão resto inferior ao cociente em três unidades.

R. *Os números pedidos são da forma* $x=7\,n+n-3$ *onde,* $0<n-3<7$, *sendo* n *um número natural. Segue-se que* $3<n<10$, *e portanto* n *pode tomar os valores* 4, 5, 6, 7, 8 *e* 9. *Os valores correspondentes de* x *são*: 29, 37, 45, 53, 61 *e* 69.

4491 — Determinar n de modo que $x^2-(m+1)x-$ $-m+7$ seja positivo para todos os valores reais de x.

R. *O facto dá-se sempre que o descriminante for menor que zero, isto é, quando for* $(m+1)^2+4(m-7)<0$, *desigualdade equivalente a* $m^2+6\,m-27<0$. *Como as raízes do trinómio, primeiro membro da desigualdade são* -9 *e* 3, *os valores de* n *que satisfazem ao problema são aqueles para os quais se verifica a dupla desigualdade* $-9<m<3$.

4492 — Derivar a função $y=(2+x):\left(\sqrt{1-x^2}\right)$ e simplificar o resultado.

R. *É* $y'=\left(\sqrt{1-x^2}\right)^{-1}+\left(-\frac{1}{2}\right)(1-x^2)^{-\frac{1}{2}-1}.$ $.(-2\,x).(2+x)$ *ou* $y'=(1+2\,x):\left(\sqrt{1-x^2}\right)^3$.

4493 — Determinar, com denominador racional, o valor de $tg\,(60°+\alpha)$ sendo α o ângulo do 4° quadrante cujo seno é $-3/5$.

R. $\operatorname{tg}(60°+\alpha)=(\operatorname{tg} 60°+\operatorname{tg}\alpha):(1-\operatorname{tg} 60°\operatorname{tg}\alpha)$ *e como* $\operatorname{tg}\alpha=(\operatorname{sen}\alpha):\left(\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha}\right)=(-3/5):$ $:\left(\sqrt{1-9/25}\right)=-3/4$ *vem* $\operatorname{tg}(60°+\alpha)=(\sqrt{3}-3/4):$ $:(1+3\sqrt{3}/4)=(36-25\sqrt{3}):11$.

4494 — Resolver a equação $sec^2\,x=1-tg\,x$.

R. *como* $\sec^2 x=1+\operatorname{tg}^2 x$ *vem* $1+\operatorname{tg}^2 x=1-\operatorname{tg} x$ *ou* $\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{tg} x=0$ *e* $\operatorname{tg} x\,(\operatorname{tg} x+1)=0$. *Então deve ser* $\operatorname{tg} x=0$ *o que dá* $x=n\,\pi$ (n *inteiro*); *ou* $\operatorname{tg} x+1=0$ *donde* $\operatorname{tg} x=-1$ *e* $\operatorname{tg} x=\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$. *Então deve ser, neste último caso,* $x+\frac{\pi}{4}=n\,\pi$ *ou seja* $x=-\frac{\pi}{4}+n\,\pi$.

4495 — Determinar a equação da recta que passa pelo ponto $(1,3)$ e é perpendicular à recta $x-2\,y=1$.

R. *A equação geral das rectas que passam por* $(1,3)$ *é* $y-3=m\,(x-1)$ *ou* $y=m\,x-m+3$, *e como a recta deve ser perpendicular a* $y=1/2\,x-1/2$, *terá que ser* $1+m\,.\,1/2=0$, *donde* $m=-2$. *Finalmente será* $y=$ $=-2\,x+5$ *a equação aa recta pedida.*

PROBLEMAS PROPOSTOS

No n.º 51 da G. M., em 1952, iniciou-se a secção de Problemas sob a forma de concurso entre os leitores da Gazeta. O concurso e a secção terminaram no n.º 58 de 1954, em virtude do reduzido número de concorrentes. A G. M. concluiu, então, que não tinha sabido despertar o interesse entre os seus leitores e daí a sua resolução. Faltaram-nos indicações da parte dos leitores que nos permitisse modificar a orientação que seguiamos. Apesar disso recomeçamos agora e procuraremos, de novo, o interesse dos leitores de quem solicitamos o envio de soluções dos problemas e indicações sobre a natureza dos problemas que gostariam fossem tratados, assim como quaisquer outras que possam melhorar esta secção. As críticas que nos forem feitas serão recebidas com toda a nossa bôa vontade e atenção, no sentido de fazer da secção um elemento de trabalho que interesse e seja últil ao leitor. Das soluções que nos forem enviadas escolheremas as melhores que serão publicadas.

4496 — Determinar todas as soluções do sistema:
$$x(x+y)(x+y+z)=y(x+y)(x+y+1)=$$
$$=(x+y+z)^2(y+z)+y(x+y+z)=z$$

4497 — Determine os inteiros a e n para os quais a^n+1 é divisível por 10.

4498 — Mostre que, se n é múltiplo de 6, tem-se:
$$\sum_{m=0}^{n/2}\binom{n}{2m}(-3)^m=2^n$$

4499 — Mostre que, se a, b e c são os comprimentos dos lados de um triângulo, então:

$A)$ $a^3+b^3+c^3+2abc<ab(a+b)+bc(b+c)+$ $+ca(c+a)$

$B)$ $a^4+b^4+c^4<(2a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$.

5000 — Considere-se o segmento $\overline{A_1A_2}$ de medida 1. Tomemos sucessivamente os pontos A_3 meio de $\overline{A_1A_2}$; A_4 meio de $\overline{A_2A_3}$; A_5 meio de $\overline{A_3A_4}$ e assim por deante.

Determine o limite da sucessão cujos termos são as abscissas, contadas a partir de A_1, dos pontos A_2, A_3, $A_4\cdots$.

5001 — Mostre que se for p o semi-perímetro do triângulo $[ABC]$ e r o raio da circunferência inscrita no triângulo, se tem
$$r=p\,tg\frac{A}{2}\cdot tg\frac{B}{2}\cdot tg\frac{C}{2}.$$

5002 — Demonstre que um polígono de n lados é regular se e sòmente se
$$r=R\cos\frac{\pi}{n}$$
sendo r o raio da circunferência inscrita no polígono e R o raio da circunferência circunscrita ao mesmo polígono.

5003 — Seja $[ABCD]$ um tetraedro e P um ponto qualquer. Considerem-se os segmentos PA', PB' e PC', perpendiculares, respectivamente, às faces $[BCD]$, $[ACD]$ e $[ABD]$ e de comprimentos iguais aos produtos de uma constante b pelas áreas das respectivas faces. Supõe-se ainda que os segmentos são dirigidas para o lado em que ficam os vértices opostos.

Considere o paralelipípedo que tem para arestas PA', PB' e PC'. Mostre que a diagonal do paralelipípedo que parte de P é perpendicular à face $[ABC]$ e que o seu comprimento é igual ao produto de b pela área de $[ABC]$.

Rectificação:

Os enunciados dos pontos n.ºˢ 4360 a 4379, publicados no número 70/71 da Gazeta de Matemática, são da autoria do Dr. A. Almeida e Costa e do Dr. F. Almeida e Sá e não, como por lapso se escreveu, exclusivamente de F. Almeida e Sá. Do lapso pedimos desculpa aos nossos colaboradores.