10 → 17	T 28	→ $C(Ac) = 0$
18	A 29	→ $C(Ac) = 1110000000000000$
19	A 30	→ $C(Ac) = 1110000100111011$
20	T 32	→ No compartimento 32 da memória ficou a ordem que se pretende
21	A 20	→ Tem por fim aumentar de uma unidade a direcção da ordem 20
22	A 27	
23	T 20	
24	F 2	→ Para começar a leitura da ordem seguinte
25		→ Neste compartimento está o número 10/16
26		→ Neste compartimento está o número 10×2^{-15}
27		→ Neste compartimento está o número 2^{-15}
28		→ Compartimentos auxiliares.
29		
30		
31		

Os números são colocados na memória utilizando um programa apropriado que é lá colocado como acabámos de indicar.

Para obter os resultados calculados pela máquina usa-se também um programa apropriado onde desempenha papel primordial a ordem

On — perfure na fita de saída uma fila de furos que corresponda posicionalmente aos *uns* das cinco posições digitais mais significativas do compartimento n da memória.

No que acabámos de referir suposemos que a entrada e saída de informação era feita através duma fita de papel perfurada. É também muito usual, para tal fim, o emprego de cartões perfurados e de fita magnética.

BIBLIOGRAFIA

[1] V Belevitch, *Langage des Machines et Langage Humain*, Office de Publicité, S. A., Editeurs, Bruxelles.

[2] *Faster Than Thought* (a symposium on digital computing machines), Sir Isaac Pitman & Sons Ltd, London.

[3] M. V. Wilkes, *Automatic Digital Computers*, Methuen & Co. Ltd, London.

[4] D. R. Hartree, *Calculating Instruments & Machines*, Cambridge University Press.

[5] R. K. Richards, *Arithmetic Operations in Digital Computers*, D. Von Nostrand Co. Inc.

[6] Wilkes, Wheeler, Gill, *Programs for an Electronic Digital Computer* (2d edition), Addison-Wesley Publishing Co. Inc.

[7] R. Higonnet, R. Gréa, *Étude Logique des Circuits Electriques et des Systèmes Binaires*, Editions Berger-Levrault, Paris.

MATEMÁTICAS SUPERIORES

PONTOS DE EXAMES DE FREQUÊNCIA E FINAIS

MATEMÁTICAS GERAIS

F. C. L. — Matemáticas Gerais — 2.º exame de frequência.

5124 — 1) Estudar a curva $y = x^2 e^x$

5125 — 2) Enunciar e demonstrar o teorema de Rolle. É o teorema aplicável à função $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x}{x + 2}$ no intervalo $[0, 4]$?

5126 — 3) Determinar $\lim\limits_{n \to 0} \dfrac{e^x + e^{-x} + x^2 - 2}{\operatorname{sen}^2 x - x}$

5127 — 4) Primitivar a) $(e^x + 1)^3 e^x$

b) $\dfrac{1}{x^2 + 10x + 30}$

c) $\dfrac{x^3 + x^2 - 5x + 1}{x^3 + x^2 - 6x}$

5128 — 5) Calcular a área compreendida entre a parábola $y = k x^2$ e a recta $y = k$

5129 — 6) Determinar um valor aproximado (com erro $< 0,01$) da área compreendida entre as curvas $y = e^{-x^2}, y = 0, x = 0$ e $x = 1$ usando o método de primitivação por séries.

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — 2.º exame de frequência ordinário — 30-6-1959.

I

5130 — 1) Considere as sucessões u_n e v_n, a primeira crescente e a segunda decrescente, e a sucessão $S)$ $u_1, v_1, u_2, v_2, \cdots u_n, v_n, \cdots$.

Responda às seguintes perguntas, apresentando as respectivas justificações:

a) A sucessão $S)$ pode ter limite infinito de sinal qualificado?

b) Na hipótese em que $S)$ admite sublimites finitos, quais são os limites máximo e mínimo?

c) Quais são os limites de Weierstrass do conjunto (u_n, v_n)?

Calcular $\lim\limits_{n=\infty} \left(\dfrac{2n-3}{2n+3}\right)^n$.

2) Estude a natureza da série $\sum \dfrac{1}{1+x^n}$; em que x representa um número positivo.

Demonstre que as séries $\sum a_n$ e $\sum b_n$ são da mesma natureza quando $\dfrac{a_n}{b_n} \to h \neq 0, \infty$. Aproveite esta proposição para mostrar que a série $\sum \dfrac{n^p + a\, n^{p-1} + \cdots}{n^q + a'\, n^{q-1} + \cdots}$ é convergente quando $q > p+2$.

R: 1) *Como* $\lim\limits_{n=\infty} \log \left(\dfrac{2n-3}{2n+3}\right)^n =$

$$= \lim_{n=\infty} n \log\left(1 - \frac{6}{2n+3}\right) = \lim_{n=\infty} \xi \cdot \frac{-6n}{2n+3} =$$

$$= -3\ (\xi \to 1),\ \textit{será}\ \lim_{n=\infty}\left(\frac{2n-3}{2n+3}\right)^n = e^{-3}.$$

2) *Se* $x < 1$, $\lim\limits_{n=\infty} \dfrac{1}{1+x^n} = 1$ *e a série é divergente.*

Se $x > 1$, $\dfrac{1}{1+x^n} < \left(\dfrac{1}{x}\right)^n$ *e, como a série* $\sum \left(\dfrac{1}{x}\right)^n$ *é convergente, também a série proposta será.*

II

5131 — 1) Quando as funções contínuas $F(x)$ e $G(x)$ têm igual derivada em (a, b) e a sua diferença não é constante, que se pode dizer de $F'(x)$ e $G'(x)$? Razão da resposta.

Desenvolva $\dfrac{1}{(x-1)(x+1)(x-2)}$ em série de Mac Laurin. Calcule $P\, x \cdot \text{arc sen}\, x$.

2) Considere a tabela de valores $\begin{array}{c|cccc} x & x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ \hline y & y_0 & y_1 & y_2 & y_3 \end{array}$ e suponha que o polinómio interpolador $g(x)$ é do segundo grau. Se $h(x)$ é outro polinómio que assume em x_0, x_1, x_2 e x_3 os mesmos valores que $g(x)$, que sabe sobre o grau de $h(x)$? Porquê?

Admitindo que $g(x) = x^2 + x - 1$, indique os valores de y_0, δy_0, $\delta^2 y_0$ e $\delta^3 y_0$ e escreva a expressão geral dos polinómios $h(x)$.

R: 1) *Como* $\dfrac{1}{(x-1)(x+1)(x-2)} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{1-x} +$

$+ \dfrac{1}{6} \cdot \dfrac{1}{1+x} - \dfrac{1}{6} \cdot \dfrac{1}{1-\dfrac{x}{2}}$, *virá*

$$\frac{1}{(x-1)(x+1)(x-2)} = \frac{1}{2}\sum_0^\infty x^n + \frac{1}{6}\sum_0^\infty (-1)^n x^n -$$

$$-\frac{1}{6}\sum_0^\infty \left(\frac{x}{2}\right)^n = \sum_0^\infty \left[\frac{1}{2} + \frac{(-1)^n}{6} - \frac{1}{6 \cdot 2^n}\right] x^n.$$

$$P\, x \cdot \textit{arc sen}\, x = \frac{x^2}{2} \cdot \textit{arc sen}\, x + \frac{1}{2} P \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} \cdot x =$$

$$= \frac{x^2}{2} \cdot \textit{arc sen}\, x + \frac{1}{2} x \sqrt{1-x^2} - \frac{1}{2} P \sqrt{1-x^2} =$$

$$= \frac{x^2}{2} \textit{arc sen}\, x + \frac{1}{2} x \sqrt{1-x^2} -$$

$$- \frac{x}{4}\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{4} \textit{arc sen}\, x + C.$$

2)

$$\begin{array}{cccl}
 & 1 & 1 & 1 \\
x_0 & & x_0 & x_0 + x_0^2 \\
\hline
 & 1 & 1 + x_0 & \big|\ \underline{1 + x_0 + x_0^2} = y_0 \\
x_1 & & x_1 & \\
\hline
\delta^2 y_0 = 1 & & \big|\ \underline{1 + x_0 + x_1} = \delta y_0 &
\end{array}$$

Como o polinómio interpolador é do segundo grau, e evidente que $\delta^3 y_0 = 0$.

$$h(x) = x^2 + x + 1 +$$
$$+ (x - x_0)^\alpha (x - x_1)^\beta (x - x_2)^\gamma (x - x_3)^\omega f(x)$$

em que α, β *e* γ *são inteiros positivos arbitrários e* $f(x)$ *é um polinómio arbitrário.*

III

5132 — Deduza o teorema dos acréscimos finitos para as funções de duas variáveis.

Em que condições $f''_{xy}(a,b) = f''_{yx}(a,b)$? Em que condições $f'''_{xyx}(a,b) = f'''_{x^2y}(a,b) = f'''_{yx^2}(a,b)$?

Calcule a derivada da função composta de $f(x,y) = e^{x+y} \cdot \log(x^2+y^2)$ com $x = t^t$ e $y = \sqrt{1+t^2}$.

A equação $f(x,y) = 0$ pode definir uma função $y = \varphi(x)$ na vizinhança de $P(1,0)$? Porquê?

R: $$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} =$$

$$= e^{x+y}\left\{\left[\log(x^2+y^2) + \frac{2x}{x^2+y^2}\right] t^t(\log t + 1) + \right.$$

$$\left. + \left[\log(x^2+y^2) + \frac{2x}{x^2+y^2}\right]\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right\}$$

Basta notar que $f'_y(1,0) = 0$ *para se concluir que a equação* $f(x,y) = 0$ *não define uma função* $y = \varphi(x)$ *na vizinhança de* $P(1,0)$.

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — 2.º Exame de frequência extraordinário — 10-7-1959.

I

5133 — 1) Qual o limite de $\sqrt[n]{y_n}$ quando $\frac{y_{n+1}}{y_n} \to A\ (y_n > 0)$? Calcule $\lim_{n=\infty} \sqrt[n]{\frac{n \log n}{n^{\log n}}}$.

2) Enuncie e demonstre o teorema de Kummer. Deduza desse teorema algum critério de segunda espécie.

Por que é que a série $\sum \alpha_n x^n$ diverge fora do intervalo de convergência?

Estude a natureza da série $\sum \frac{2^n \cdot n!}{n^n}$.

R: 1) *Fazendo* $y_n = \frac{n \log n}{n^{\log n}}$, *vem* $\lim_{n=\infty} \frac{y_{n+1}}{y_n} =$

$$= \lim_{n=\infty} \frac{n^{\log n}}{(n+1)^{\log(n+1)}} = 1 \text{ e portanto } \lim_{n=\infty} \sqrt[n]{\frac{n \log n}{n^{\log n}}} = 1.$$

2) $$\lim_{n=\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n=\infty} \frac{2^{n+1} \cdot (n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{2^n\, n!} =$$

$$= 2 \lim_{n=\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{2}{e} < 1$$ *e por consequência a série é convergente.*

II

5134 — 1) Considere a função $f(x) = \begin{cases} e^x & (x>0) \\ 1+x & (x>0) \end{cases}$.

Calcule a oscilação de $f(x)$ em $x = 0$ e, em face do valor obtido, diga se $f(x)$ se pode tornar contínua em $x = 0$. Enuncie a proposição em que basear a resposta.

Utilize os desenvolvimentos em série para calcular $\lim_{x=0} \frac{1}{x}[\log(1+x^2) - \operatorname{arctg} x]$.

2) Dada a tabela

x	0	2	3	5
y	1	2	1	0

, determine o polinómio interpolador, utilizando a fórmula de Newton.

Enuncie e demonstre o teorema de Rolle. Aproveite a proposição para deduzir o termo resto das fórmulas interpoladoras.

R: 1) $$\lim_{x=0} \frac{1}{x}[\log(1+x^2) - \operatorname{arctg} x] = \lim_{x=0} \frac{1}{x}\left[x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} - \frac{x^8}{4} + \cdots - x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} - \cdots\right] =$$

$$= \lim_{x=0}\left[x - \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{3} - \frac{x^7}{4} + \cdots - 1 + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{5} + \cdots\right] = -1.$$

2)

x	y	δy	$\delta^2 y$	$\delta^3 y$
0	1			
		$-\frac{1}{2}$		
2	2		$-\frac{1}{2}$	
		-1		$\frac{2}{15}$
3	1		$\frac{1}{6}$	
		$-\frac{1}{2}$		
5	0			

$$f(x) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x(x-2) +$$

$$+ \frac{2}{15}x(x-2)(x-3) = \frac{2}{15}x^3 - \frac{7}{6}x^2 + \frac{23}{10}x + 1$$

III

5135 — Deduza a expressão da derivada de uma função composta de $f(x,y)$, com $x = \varphi(t)$ e $y = \psi(t)$.

Defina função homogénea de grau α e enuncie as suas propriedades. Exemplifique com $z = g\left(\frac{y}{x}\right)$.

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — Exame Final — Epoca de Julho — (1.ª chamada) — 15-7-1959.

I

5136 — Ache a equação das raízes comuns dos polinómios

$$x^4 + 7x^3 - 9x^2 - 12x + 3$$
$$\text{e} \quad x^4 + 8x^3 - 3x^2 - 27x + 6.$$

Utilize a sucessão de Rolle para separar estas raízes e calcule uma delas em primeira aproximação.

R:

1		-1	-1	1	-1
7	1	1	-1	1	-1
-9	8	6	-6	6	-6
-12	-3	-15	15	-15	15
3	-27	3	-3	3	-3
	6				

Tanto o resultante como o primeiro e o segundo sub-resultantes são nulos. O terceiro sub-resultante é $R_3 = 1$ *e do quadro imediatamente se conclui que:*

$$R_3^1 = 6 \, , \, R_3^2 = -15 \, , \, R_3^3 = 3 \, .$$

A equação das raízes comuns é pois $x^3 + 6x^2 - 15x + 3 = 0$. *Os limites excedente e deficiente das raízes desta equação são respectivamente* $L = 2$ *e* $l = -8$, *calculados pelo método de Newton.*

Os zeros da primeira derivada são -5 *e* 1 *e a sucessão de Rolle* $f(-8)\, f(-5)\, f(1)\, f(2)$ *apresenta os sinais* $-+-+$, *o que significa que existem três zeros reais, um em cada um dos intervalos* $(-8, -5)$, $(-5, 1)$ *e* $(1, 2)$. *Aplicando o método de Newton para o cálculo aproximado do zero situado em* $(1, 2)$, *obtém-se, em primeira aproximação,* $a_1 = 2 - \dfrac{f(2)}{f'(2)} = 1{,}7619\cdots$

II

5137 — **Faça o estudo da função $f(x) = e^x \cdot \cos x$. Calcule $Pf(x)$ e apresente caso seja legítimo, o seu desenvolvimento em série de Mac Laurin.**

R: *O domínio é* $(-\infty, +\infty)$. *Como* $f'(x) = \sqrt{2}\, e^x \cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$, *a função é crescente nos intervalos* $\left(-\dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi, \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi\right)$ *e decrescente nos intervalos* $\left(\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi, \dfrac{5\pi}{4} + 2k\pi\right)$, *apresentando máximos nos pontos* $\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$ *e mínimos nos pontos* $\dfrac{5\pi}{4} + 2k\pi$. *Analisando* $f''(x) = 2e^x \cos\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$ *verifica-se que a concavidade está voltada para cima nos intervalos* $((2k-1)\pi, 2k\pi)$ *e para baixo em* $(2k\pi, (2k+1)\pi)$.

$Pf(x) = e^x \cos x + P e^x \operatorname{sen} x = e^x \cos x + e^x \operatorname{sen} x - P e^x \cos x$, *donde se conclui que* $Pf(x) = \dfrac{1}{2} e^x (\cos x + \operatorname{sen} x)$.

Como $f^{(n)}(x) = (\sqrt{2})^n e^x \cos\left(x + n\dfrac{\pi}{4}\right)$, *vem* $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (\sqrt{2})^n \cos n\frac{\pi}{4} \cdot \frac{x^n}{n!}$ *em* $(-\infty, +\infty)$.

III

5138 — **Verifique se $f(x, y) = x^2y^2 + x^3y - 2 = 0$ define uma função $y = \varphi(x)$ em torno de $P(1, 1)$. Na hipótese afirmativa, escreva a equação da tangente à curva $y = \varphi(x)$ nesse ponto.**

Prove que $x f'_x + y f'_y \equiv 8$, utilizando o conhecimento das funções homogéneas.

R: *Como* $f(1,1) = 0$ *e* f'_x *e* f'_y *são contínuas, com* $f'_y(1,1) = 3 \neq 0$ *a equação define* $y = \varphi(x)$ *na vizinhança de* $P(1,1)$. *A equação da tangente a* $y = \varphi(x)$ *nesse ponto é* $f'_x(1,1)(X-1) + f'_y(1,1)(Y-1) = 0$, *ou seja* $5X + 3Y - 8 = 0$.

Fazendo $\Psi(x, y) = x^2y^2 + x^3y$, *como* $\Psi'_x = f'_x$ *e* $\Psi'_y = f'_y$, *vem* $x f'_x + y f'_y = 4\Psi(x, y) \equiv 8$.

Enunciados e soluções de Fernando de Jesus

ANÁLISE SUPERIOR

F. C. L. — Análise Superior — 2.º exame de frequência — 29-5-59.

Teoria

5139 — **1) Integração de diferenciais algébricas: equivalência dum caminho aberto a um caminho fechado seguido de um caminho aberto conveniente. Defina lacete e indique como tal conceito é aplicável ao cálculo de integrais de diferenciais algébricas. Dê um exemplo de tal aplicação.**

5140 — **2) Enuncie o teorema de Cauchy sobre a existência e unicidade do sistema de integrais gerais dum sistema canónico de equações diferenciais. Indique uma condição suficiente para tal existência.**

5141 — 3) Defina equação diferencial de ordem n; considere o caso da equação de Fuchs, defina a sua equação determinante em relação à origem, indique a forma dos integrais daquela equação correspondentes a raízes simples da equação determinante e justifique o facto de raízes desta equação que difiram por números inteiros não conduzirem a integrais particulares independentes.

Prática

5142 — 1) Equação às derivadas parciais das superfícies de equação finita

$$z = e^{ny}\,\varphi(x-y)\,.$$

Confirme o resultado por integração.

Determine um integral completo da equação por recurso:

a) à substituição
$$x + \lambda y = X$$

b) $z_1 = \log z$.

5143 — 2) Considere a equação

$$\frac{p}{x} = \frac{y}{q}\,.$$

Verifique que

$$(z+\alpha)^2 = y^2(x^2-\beta)$$

é um integral completo da equação

a) por derivação deste

b) por integração da equação dada.

5144 — 3) $\varphi\left(\frac{z}{x}, \frac{y}{x}\right) = 0$ é integral geral de certa equação às derivadas parciais. Determine essa equação. Verifique que $p = c^{te}$ é um integral particular do sistema diferencial das características e determine por seu intermédio um integral completo da equação. Solução da equação que se reduz a

$$z = y^2 \text{ para } x = 1\,.$$

a) recurso às características

b) partindo do integral completo.

Nota: O n.º 3 é obrigatório. Fazer *um* dos problemas 1 e 2.

GEOMETRIA SUPERIOR

F. C. L. — Geometria Superior — Exame de Frequência 1958-59.

I

5145 — Supondo que a relação de equivalência ρ arrasta as relações de equivalência σ_1 e σ_2, mostre que vale a igualdade

$$\frac{\sigma_1 \cap \sigma_2}{\rho} = \frac{\sigma_1}{\rho} \cap \frac{\sigma_2}{\rho}\,.$$

Exemplifique.

II

5146 — $\mathfrak{M}$ é um módulo livre de base $\{v_\alpha\}_{\alpha \in A}$ sobre um anel $\mathfrak{A}$.

O conjunto A é suposto bem ordenado.

Designe por $\mathfrak{M}_\alpha$ o submódulo de $\mathfrak{M}$ construído sobre a base $\{v_\beta\}_{\beta < \alpha}$ e por $\overline{\mathfrak{M}_\alpha}$ o submódulo de $\mathfrak{M}$ construído com $\{v_\beta\}_{\beta \leqq \alpha}$.

Então, dado um submódulo $\mathfrak{N}$, de $\mathfrak{M}$, suposto admissível — $\mathfrak{A}$:

1) Mostre que o elemento $a \in \mathfrak{N} \cup \mathfrak{M}_\alpha$ tem a forma $a = b + \lambda v_\alpha$, com $b \in \mathfrak{N} \cap \mathfrak{M}_\alpha$ e $\lambda \in \mathfrak{A}$;

2) estude o homomorfismo $a \to \lambda$. Em particular dê a expressão do núcleo.

III

5147 — Seja E um conjunto infinito. Mostre que o subconjunto vazio, o subconjunto impróprio e os subconjuntos com complemento finito são os conjuntos abertos de uma topologia τ.

Quais são os conjuntos fechados dessa topologia? Esclareça as relações entre subconjuntos abertos, fechados, finitos e infinitos.

Este espaço topológico é separável?

IV

5148 — Seja E um espaço de Lindelöff. Prove que, se todo o conjunto infinito de E tem um ponto de acumulação — ω, é sempre possível extrair duma cobertura aberta do espaço uma sub-cobertura finita.

MECÂNICA RACIONAL

F. C. L. – Mecânica Racional — 1.º exame de frequência – (2.ª chamada) — 15-4-59.

5149 — *a*) Relações entre as velocidades e as acelerações dos movimentos de um ponto material em relação a dois sistemas de referência.

b) Considera-se o movimento de um ponto P em relação a três sistemas de referência móveis em relação uns aos outros. Neste caso há a considerar três movimentos de transporte de P; indique, justificando, as relações que existem entre as velocidades e acelerações de P nestes três movimentos de transporte e verifique estas relações, considerando os movimentos de P em relação a cada par de sistemas de referência.

5150 – *a*) Descreva o modo de representar o movimento de um sólido invariável em relação a um sistema de referência; vectores característicos deste movimento; sua determinação a partir do conhecimento do movimento e sua aplicação à determinação da natureza do movimento instantâneo do sólido em cada instante.

b) Considere o movimento de um referencial S_1 em relação a outro referencial S e o movimento recíproco deste, isto é, o movimento de S em relação a S_1. Determine, por aplicação da teoria do movimento relativo, a relação que existe entre os vectores característicos destes dois movimentos; mostre que, em cada instante, a natureza dos correspondentes movimentos instantâneos é a mesma e que os eixos instantâneos de rotação dos dois movimentos coincidem.

5151 — Um ponto está animado de movimento definido pelas equações

$$x = 2t^2 - t + 4$$
$$y = t^2 - 2t.$$

Determinar as componentes tangencial e centrípeta da sua aceleração, o instante em que esta é normal à trajectória e o raio de curvatura desta neste instante.

5152 – 4) Uma placa rectangular $ABCD$ move-se no seu plano com velocidade angular ω. Num dado instante o vértice A tem uma velocidade $\mathbf{v}$ dirigida segundo a diagonal AC. Achar as velocidades dos vértices B e C em função de $\mathbf{v}, \omega$ e das dimensões do rectângulo.

5153 – 5) Seja a hélice cilíndrica

$$\xi = R\cos\varphi$$
$$\eta = R\,\text{sen}\,\varphi$$
$$\zeta = a\,\varphi\,.$$

Considera-se um triedro móvel $Oxyz$ que se move de forma que a origem O percorre esta hélice segundo a lei $\varphi = t$, o eixo Ox sempre dirigido segundo a tangente à hélice e Oy sempre dirigido segundo a normal principal.

Determine os vectores característicos do movimento do triedro.

F. C. L. — Mecânica Racional — Exame Final — 2.º turno — (1.ª chamada) — 10-7-59.

5154 – 1) Escreva, justificando-as, as equações de equilíbrio de um sistema articulado isostático plano. Particularize estas equações no caso de um sistema isostático formado por três lados e mostre, directamente, que estas equações implicam que o vector resultante e o momento resultante do sistema formado pelas três forças exteriores aplicadas nos nodos sejam nulos; será este anulamento uma condição suficiente para que aquelas equações sejam verificadas? Justifique a resposta. Mostre como se pode saber o estado tenso ou comprimido de um qualquer dos lados de um sistema pela orientação que tem relativamente ao triângulo a força exterior aplicada num qualquer dos nodos em que se articula esse lado.

2 — *a*) Estabeleça as equações do movimento de um sólido com um eixo fixo. Indique de entre estas equações aquelas que servem efectivamente para definir o movimento e aquelas que dão as reacções dos pontos fixos; reacções estáticas e dinâmicas. Condição necessária e suficiente para que estas últimas sejam nulas.

b) Calcule a expressão do trabalho efectuado pelas forças exteriores aplicadas ao referido sólido num deslocamento infinitamente pequeno deste; estabeleça as equacões que determinam efectivamente o seu movimento por aplicação do theorema da força viva.

3) Um fio de peso total *1* está suspenso pelos seus dois extremos A e B em dois pontos fixos. A figura de equilíbrio do fio é um arco da elipse

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$$

com a concavidade voltada para cima e os pontos A e B tem abcissas $+1$ e -1.

Determine a densidade e a tensão do fio e as forças que os pontos de suspensão exercem no fio.

4) Um ponto P de massa *1* move-se sem atrito sobre a cardióide de equação

$$r = 1 + \cos\theta$$

sujeito à acção duma força atractiva para o polo de módulo $3/r^4$; no instante $t = OP$ encontra-se no ponto mais afastado do polo com velocidade de módulo $1/2$.

Estude o movimento do ponto.

5) Um volume homogéneo com a forma de um cilindro de revolução está animado de um movimento de rotação de velocidade angular ω em torno de uma das suas geratrizes.

Calcule a sua energia cinética directamente e por aplicação do teorema de Koenig.

ASTRONOMIA

F. C. L. — Astronomia — 2.° exame de frequência — 1.ª chamada — 18-5-59.

Teoria

5155— 1) A Terra utiliza-se para unidade fundamental da medição do tempo? Porquê?

2) O valor da obliquidade da eclíptica é uma quantidade constante? Porquê?

3) Conhecidas as coordenadas equatoriais do Sol α e δ num certo instante, pode-se determinar o valor da longitude celeste do Sol? Justifique.

4) A declinação do Sol apresenta pontos de estacionaridade? Porquê?

5) Na definição de ano trópico interessa considerar o fenómeno de nutação? Justifique a resposta.

6) Defina dia sideral. Quantas espécies de dia sideral se podem considerar? Justifique a resposta.

7) Indique, justificando, quais as condições necessárias para que o ano anomalístico seja idêntico ao ano sideral.

8) Mostre que o movimento médio do Sol é constante.

9) Conhecidas as coordenadas equatoriais α e δ do Sol médio e do Sol verdadeiro, mostre como se poderiam tabular os valores da equação do tempo.

10) Justifique a necessidade da introdução do tempo das efemérides nos cálculos astronómicos.

11) Pode-se determinar, por observação, a magnitude absoluta do Sol? Porquê?

12) Existem estrelas com magnitudes aparentes negativas? Justifique a resposta.

13) Indique as condições necessárias para que um instrumento possa ser utilizado na determinação das magnitudes bolométricas.

14) Para que serve a fórmula de Pogson?

15) Sabendo-se que o índice de cor de uma estrela é -0.58 pode saber-se qual a sua cor e composição? Justifique a resposta.

Prática

5156 — Num local de coordenadas

$$\varphi = 51^\circ\ 13'\ 50''.55$$
$$\lambda = -9^h\ 22^m\ 36^s.086$$

observou-se no dia 1931 Set. 2 a estrela θ Arietis de coordenadas

$$\alpha = 2^h\ 14^m\ 19^s.757$$
$$\delta = 19^\circ\ 34'\ 77''.06$$

tendo-se determinado para distância zenital $49^\circ\ 24'\ 10''.3$.

Pretende-se determinar:

a) O tempo verdadeiro no momento da observação

b) O ângulo horário e a hora legal num lugar de coordenadas

$$\varphi = -66^\circ\ 15'\ 31''.12$$
$$\lambda = +1^h\ 52^m\ 53^s.781.$$

F. C. L. — Astronomia — 2.° exame de frequência — 2.ª chamada — 6-6-59.

Teoria

5157 — 1) O valor de ρ que figura na fórmula de Pogson poderá ser igual a 3.0? Porquê?

2) Pode-se determinar a magnitude absoluta de Saturno? Justifique a resposta.

3) O período de rotação da Terra é igual ao dia sideral? Porquê?

4) Tem significado considerar a luminosidade absoluta de Júpiter? Justifique a resposta.

5) A nutação em ascensão recta pode ter valores sempre crescentes com o tempo? Porquê?

6) A correcção bolométrica pode ser positiva? Justifique a resposta.

7) A longitude celeste do Sol varia uniformemente? Porquê?

8) Defina equação do centro. Esta equação poderá ter valores nulos? Justifique a resposta.

9) A distribuição das estrelas pelas várias cores é uniforme? Porquê?

10) Existindo um erro $\Delta\lambda$ no valor da longitude média do sol poderá determinar-se o erro que existirá no valor da ascensão recta do sol médio? Porquê?

11) Indique como se poderá determinar a paralaxe espectroscópica de uma estrela.

12) Mostre as vantagens e inconvenientes dos calendários lunares em relação aos calendários solares.

13) O tempo das efemérides poderá ser igual ao tempo universal? Justifique a resposta.

14) Duas estrelas a temperaturas muito diferentes apresentarão o mesmo tipo de espectro? Porquê?

15) A equação do tempo terá valores nulos? Porquê?

Prática

5158 — 1) Calcular a luminosidade e a distância (em anos-luz) de uma estrela cuja magnitude aparente é $+0{,}22$ e cuja magnitude absoluta é $+0{,}51$.

5159 — 2) Num local de coordenadas

$$\varphi = 31^\circ\ 29'\ 25''.7$$
$$\lambda = -10^h\ 25^m\ 38^s.25$$

pretende-se observar o Sol na data 1959 Junho 6, a Oeste do meridiano, a uma altura

$$h = 39^\circ\ 51'\ 47''.2\,.$$

Sabendo-se que a ascensão recta do Sol nesse instante em Greenwich é

$$\alpha_{\odot} = 4^h\ 53^m\ 16^s.33$$

pretende-se calcular o tempo médio e o azimute do Sol ($A_{\odot}$) nesse local.

Enunciados de Dr. Raimundo Vicente

CÁLCULO NUMÉRICO

F. C. L. — Cálculo numérico, mecânico e gráfico — Exame final — Prova prática — (Junho 1959).

5160 — 1) Calcular $f'(x)$ e $f''(x)$ nos pontos $x = 3{,}5$ e $x = 3{,}55$, usando a tabela

x	$f(x)$
3,0	0,17727
3,1	0,31588
3,2	0,43747
3,3	0,53481
3,4	0,60167
3,5	0,63325
3,6	0,62663
3,7	0,58111
3,8	0,49849
3,9	0,38313
4,0	0,24189

Verificar que os resultados obtidos satisfazem à equação diferencial

$$y'' + \left(\frac{1}{4}x^2 + 3\right) y = 0$$

5161 — 2) Calcular

$$\int_0^{0{,}84} \frac{t}{1+t^3}\,dt$$

a) Pela regra de Simpson;
b) Pela regra de Weddle.

Discutir em cada caso, a precisão do resultado obtido.

5162 — 3) A equação

$$x^4 - 16x^3 + 72x^2 - 96x + 24 = 0$$

tem todas as raízes reais.

Separe as raízes e determine o valor de uma delas com erro (em valor absoluto) não superior a 5×10^{-4}.

RECTIFICAÇÃO

Os enunciados 5087 e 5091 dos pontos de exame de frequência, publicados nos números 74-75 da Gazeta, devem ser substituídos pelos seguintes:

5087 — Existindo um erro dt no valor do ângulo horário de Sirius, mostre em que posições da estrela esse erro afecta menos a determinação do tempo sideral.

5091 — Num lugar cujas coordenadas são

$$\begin{cases} \varphi = 40^\circ \;\; 32' \;\; 12'',45 \\ \lambda = \;\; 2^h \;\; 15^m \;\; 25^s,65 \end{cases}$$

pretende-se determinar o azimute no momento do ocaso e o ângulo horário no instante do nascimento de uma estrela de coordenadas

$$\begin{cases} \alpha = \;\; 7^h \;\; 45^m \;\; 47^s,60 \\ \beta = 15^\circ \;\; 34' \;\; 52'',4 \end{cases}$$

BOLETIM BIBLIOGRÁFICO

Nesta secção, além de extractos de críticas aparecidas em revistas estrangeiras, serão publicadas críticas de livros e outras publicações de Matemática de que os Autores ou Editores enviarem dois exemplares à Redacção

134 — E. J. Gumbel — **Statistics of Extremes** — Columbia University Press, 347 pag., 1958, $ 15 00

O livro de que vamos aqui dar uma notícia crítica é escrito pelo maior especialista da teoria dos valores extremos, que tem dedicado toda a sua vida ao estudo deste problema e das suas aplicações técnicas Muito esquemàticamente, a teoria dos valores extremos tem por objectivo obter as distribuições assintóticas dos extremos e, conhecidos os extremos (máximo ou mínimo) de uma amostra, tirar conclusões sobre os parâmetros da variável aleatória inicial ou extrema.

Conquanto escrito por um matemático, «Statisties of Extremes» tem sempre em vista as inúmeras aplicações da teoria aos mais diversos domínios. Embora não seja a leitura fácil, pode bem ser estudado por quem tenha conhecimentos mínimos de Cálculo e de Estatística. Os numerosos exercícios inseridos no texto permitem controlar a compreensão efectiva de teoria e são, muitas vezes, sugestões de aplicações concretas.

Algumas falhas são de notar, inevitáveis, de resto, neste primeiro e único tratado sobre os extremos: ligeiras incorrecções, em certos pontos pouca clareza e citações falhadas no índice.

No capítulo I, inicia-se uma curta história da teoria, descrevendo-se depois um grande número das suas aplicações que vão da astronomia, metereologia, engenharia naval, oceanografia, controle de qualidade, fractura de materiais, segurança de construções, demografia, economia, aeronáutica, hidrologia, etc. Segue-se ainda um estudo geral dos instrumentos estatísticos mais usados, entre os quais convém salientar a função de intensidade (oriunda da demografia) e o período do retorno (usado em engenharia). São ainda tratadas distribuições ligadas com anormal.

O capítulo seguinte trata das estatísticas ordinais e de problemas não-paramétricos ligados à teoria dos extremos, como o problema dos excessos. A lei de Poisson surge ligada aos acontecimentos raros.

No Capítulo III tratam-se as distribuições finitas dos extremos, do meio, da amplitude e as distribuições que extremam (variacionalmente) certas estatísticas dos extremos.

O Capítulo IV trata de certas distribuições específicas como as distribuições exponencial, logistica, normal, gama que dão (assintòticamente) o tipo da exponencial dupla e as de Cauchy e Pareto.