é o número de subconjuntos de C_1 com $p-1$ elementos, isto é, $\binom{n-1}{p-1}$.

c) Obtêm-se fórmulas de recorrência nos índices, fazendo no parágrafo 19 $q=n-p$ e as transformações necessárias para obter um índice, à esquerda, igual à soma dos índices, à direita

1) $$\begin{aligned}\binom{n}{p} &= n\ P_{n-1\,|\,p\,,\,n-p}\\ &= n\cdot\frac{1}{n-p}\ P_{n-1\,|\,p\,,\,n-p-1}\\ &= \frac{n}{n-p}\ P_{n-1\,|\,p\,,\,n-p-1}\\ &= \frac{n}{n-p}\binom{n-1}{p}.\end{aligned}$$

Com a interpretação fácil: $\binom{n-1}{p}$ é o número de subconjuntos de p elementos em não entra o elemento x; $n\binom{n-1}{p}$ é o número de vezes em que os n elementos não figuram nos subconjuntos de p elementos. Para obter um subconjunto de p elementos é preciso que nele não figurem $n-p$ dos elementos dados. Será então $\frac{n}{n-p}\binom{n-1}{p}$ o número de subconjuntos de p elementos.

2) $$\begin{aligned}\binom{n}{p} &= \frac{1}{p}\ P_{n\,|\,p-1\,,\,n-p}\\ &= \frac{1}{p}\cdot n\cdot P_{n-1\,|\,p-1\,,\,n-p}\\ &= \frac{n}{p}\ P_{n-1\,|\,p-1\,,\,n-p}\\ &= \frac{n}{p}\cdot\binom{n-1}{p-1}\end{aligned}$$

Quer dizer: $n\cdot\binom{n-1}{p-1}$ dá o número de vezes que os n elementos figuram nos subconjuntos de p elementos. Para obter um subconjunto de p elementos é preciso utilizar p dessas figurações e será $\frac{n}{p}\binom{n-1}{p-1}$ o número de subconjuntos de p elementos.

(Continua)

Two classroom notes on algebra

by J. J. Dionísio

1. The computation of the Vandermonde determinant.

Let

$$\Delta_n(x_1,\cdots,x_n)=\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n\\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2\\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot\\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1}\end{vmatrix}.$$

We have

(1) $$\Delta_2(x_1,x_2)=x_2-x_1.$$

The computation of $\Delta_n(x_1,\cdots,x_n)$ along the last column by the LAPLACE rule shows that it is a polynomial in x_n of degree $n-1$. Its roots are $x_1,x_2,\cdots,x_{n-1}$. Hence

(2) $$\Delta_n(x_1,\ldots,x_n)=\Delta_{n-1}(x_1,\cdots,x_{n-1})\prod_{j=1}^{n-1}(x_n-x_j).$$

If we suppose that

$$\Delta_{n-1}(x_1,\cdots,x_{n-1})=\prod_{i>j}(x_i-x_j)$$

then from (1) and (2) we infer that

$$\Delta_n(x_1,\cdots,x_n)=\prod_{i>j}(x_i-x_j).$$

2. A rule for solving systems of linear equations.

The following result is easily proved.

THEOREM. *Let*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

be an $m \times n$ *matrix with elements in a field* $\mathcal{F}$. *By elementary row operations and interchange of columns it can be reduced to the matrix (over* $\mathcal{F}$*)*

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & b_{1,r+1} & b_{1,r+2} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & b_{2,r+1} & b_{2,r+2} & \cdots & b_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & b_{r,r+1} & b_{r,r+2} & \cdots & b_{rn} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

where $r \leqq \min \{m, n\}$ *is the rank of* A.

Now consider the system of linear equations over $\mathcal{F}$

$$(3) \qquad \begin{cases} a_{11}\, x_1 + \cdots + a_{1n}\, x_n = d_1 \\ \qquad \cdots \\ a_{m1}\, x_1 + \cdots + a_{mn}\, x_n = d_m \end{cases}$$

or, in matrix notation,

$$AX = D$$

where

$$A = [a_{ij}], \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_m \end{bmatrix}.$$

Write the matrix

$$A' = [A \mid D],$$

reduce A to the above form B, allowing, however, the elementary row operations act on D as well. (The interchange of columns 1 to r must be accompanied by corresponding interchange of variables). Let the result be the matrix

$$B' = [B \mid D']$$

where

$$D' = \begin{bmatrix} d'_1 \\ \vdots \\ d'_m \end{bmatrix}.$$

The system (3) is solvable if and only if $r = m$ or, if $r < m$,

$$d'_{r+1} = \cdots = d'_m = 0.$$

A solution of the system (3) is then

$$X_0 = \begin{bmatrix} d'_1 \\ \vdots \\ d'_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

It is easily seen that the homogeneous linear system associated to (3), that is, in matrix notation, $AX = 0$, has the $v = n - r$ linearly independent solutions

$$X_1 = \begin{bmatrix} -b_{1,r+1} \\ \vdots \\ -b_{r,r+1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad X_2 = \begin{bmatrix} -b_{1,r+2} \\ \vdots \\ -b_{r,r+2} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \cdots,$$

$$X_v = \begin{bmatrix} -b_{1n} \\ \vdots \\ -b_{rn} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Moreover, any solution of $AX = 0$

$$X' = \begin{bmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix}$$

is a linear combination of $X_1, \cdots, X_v$ with coefficients

$$k_1 = x'_{r+1}, \cdots, k_v = x'_n .$$

Hence, the general solution of (3) is

$$X = X_0 + k_1 X_1 + \cdots + k_v X_v$$

where $k_1, \cdots, k_v$ are arbitrary elements of $\mathcal{F}$.

Of course, the method allows as well the construction of the null space of a linear transformation of nullity v.

For comparison with other methods, see [1].

REFERENCE

[1] Kurt Bing, *A construction of the null space of a linear transformation,* The Amer. Math. Monthly, 67 (1960).

MOVIMENTO MATEMÁTICO

SEMINÁRIO DE CÁLCULO NUMÉRICO E MÁQUINAS MATEMÁTICAS DO INSTITUTO DE ALTA CULTURA

Este seminário, dirigido pelo Doutor A. César de Freitas, no intuito de colaborar activamente no esforço necessário, no domínio científico e técnico-industrial, para equiparar o País a outros mais adiantados, organizou um programa de publicações e pequenos cursos, feitos por especialistas, com o fim de tratar de assuntos de aplicação imediata e que não sejam correntemente estudados nas cadeiras das nossas Universidades. A primeira publicação da autoria do Doutor A. César de Freitas intitula-se *Cálculos com números aproximados*, e é uma exposição de iniciação ao assunto.

Dos cursos projectados o primeiro, que se realizará nos fins do corrente ano, tratará de *Métodos de resolução de equações com derivadas parciais (com especial referência aos métodos numéricos)* e as lições serão feita pelos Doutores A. César de Freitas e F. R. Dias Agudo.

As lições que interessam a matemáticos, físicos e engenheiros podem ser seguidos por quem conheça a matéria versada em qualquer curso de cálculo infinitesimal das Universidades portuguesas.

Os interessados devem fazer a sua inscrição (gratuita) por meio de carta dirigida ao Seminário, para a Faculdade de Ciências de Lisboa. Os incritos até meados de Outubro serão informados directamente sobre o programa e horários das lições.

NOTICIÁRIO BRASILEIRO DE MATEMÁTICA

Conselho Nacional de Pesquizas — O Prof. Leopoldo Nachbin, do IMPA, Rio de Janeiro, foi nomeado membro do Conselho Deliberativo do Conselho Nacional de Pesquizas, de que é director o Dr. Lélio I. Gama.

J. C. Morgado Jor. — A Universidade do Recife contratou, em 1960, o matemático português Prof. José Cardoso Morgado Júnior.

Escola Politécnica da Paraiba, Campina Grande — Nos dias 16 e 17 de Dezembro de 1959, o Prof. Manuel Zaluar Nunes, da Universidade do Recife, realizou duas conferências intituladas «O Ensino do Cálculo Numérico nas Escolas de Engenharia».

Cursos — *Instituto de Física e Matemática, Universidade do Recife* — Estão sendo ministrados os seguintes cursos:

1) «Álgebra Moderna», pelo Prof. José C. Morgado: grupos, aneis e polinómios.

2) «Teoria Espectral das Álgebras Normadas», pelo Prof. A. Pereira Gomes: representação de Gelfand e aplicação à teoria espectral.