$$\sum_0^\infty f_k = \int_0^\infty f(x)\,dx + \frac{1}{2} f_0 - \frac{1}{12} f_0' + \frac{1}{720} f_0''' - \frac{1}{30240} f_0^{\mathrm{v}} + \cdots$$

EXEMPLO

Para a série que serviu de exemplo no § 2 tem-se

$$R_7 = \sum_0^\infty \frac{1}{(m+8)^2}.$$

Como $f(x) = 1/(8+x)^2$, é aqui

$$f'(0) = -\frac{2}{8^3},\ f'''(0) = -\frac{24}{8^5},$$

$$f^{\mathrm{v}}(0) = -\frac{720}{8^7}, \cdots \int_0^\infty f(x)\,dx = \frac{1}{8},$$

e portanto

$$\begin{aligned} R_7 &= \frac{1}{8} + \frac{1}{2}\frac{1}{64} + \frac{1}{12}\frac{1}{8^3} - \frac{1}{720}\frac{24}{8^5} + \cdots \\ &= 0{,}125 + 0{,}0078125 + 0{,}0003255 \\ &\quad - 0{,}0000010 + \cdots = 0{,}1331370, \\ S &= S_7 + R_7 = 1{,}9956349 + 0{,}1331370 \\ &= 2{,}128772. \end{aligned}$$

Verificar-se-á recalculando S a partir de $S_{10} + R_{10}$, por exemplo.

5. Outros métodos.

Caso $y = \sum a_j x^j$ convirja lentamente para $x = x'$, pode procurar-se uma equação diferencial (linear) que y satisfaça e obter, por métodos numéricos, o valor $y(x')$ da sua solução particular que obedeça às condições iniciais

$$y(0) = a_0,\ y'(0) = a_1,\ y''(0) = 2a_2, \cdots$$

Por exemplo,

$$y = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots$$

é a solução de

$$(1+x)\frac{dy}{dx} = 1$$

para a qual $y(0) = 0$.

Outros métodos de cálculo de soma de séries encontram-se nas referências [3] a [6].

REFERÊNCIAS

[1] Gaz. Matemática, n.º 11, págs. 4-7.
[2] K. S. Hunz, «Numerical Analysis», McGraw, 1957.
[3] Proc. Camb. Phil. Soc., **46** (1950), p. 436.
[4] Phil. Mag., **22** (1936), p. 754; **40** (1949), p. 188.
[5] Jour. Math. Physics, **28** (1950), p. 272.
[6] Nat. Bur. Stand. Jour. Res., **46** (1951), p. 56.

Um adendo a «uma demonstração por indução finita»

por Ruy Madsen Barbosa

Lemos no n.º 53, um interessante artigo do senhor H. Silva Lobo, onde prova pela indução finita as fórmulas:

1) $$\sum_{p=0}^{n} p\binom{n}{p} = n \cdot 2^{n-1}$$

e

2) $$\sum_{p=0}^{n} p^2\binom{n}{p} = n(n+1)\cdot 2^{n-2}$$

Acreditando fornecer um adendo positivo ao trabalho citado, ouso acrescentar a demonstração de $\sum \binom{n}{p} = 2^n$, também por indução finita, e efectuar uma modificação na demonstração da primeira fórmula, tornando-a mais rápida com o uso do símbolo somatório.

Vejamos:

Admitamos, por hipótese, que seja verdadeira a fórmula para n: $\sum\limits_{p=0}^{n} \binom{n}{p} = 2^n$.

Verifiquemos a validade para $n+1$:

$$\sum_{p=0}^{n+1} \binom{n+1}{p} = \sum_{p=1}^{n+1} \binom{n+1}{p} + 1 .$$

Apliquemos a fórmula de STIFEL:

$$\sum_{0}^{n+1} \binom{n+1}{p} = \sum_{1}^{n+1} \left[\binom{n}{p} + \binom{n}{p-1} \right] + 1$$

ou

$$= \sum_{1}^{n+1} \binom{n}{p} + \sum_{1}^{n+1} \binom{n}{p-1} + 1$$

ou

$$= \sum_{1}^{n} \binom{n}{p} + \sum_{1}^{n+1} \binom{n}{p-1} + 1$$

Tomando $p-1=k$ no segundo somatório temos:

$$\sum_{0}^{n+1} \binom{n+1}{p} = \sum_{1}^{n} \binom{n}{p} + \sum_{0}^{n} \binom{n}{k} + 1$$

ou

$$\sum_{0}^{n+1} \binom{n+1}{p} = \sum_{0}^{n} \binom{n}{p} + \sum_{0}^{n} \binom{n}{p} = 2 \sum_{0}^{n} \binom{n}{p}$$

e lembrando a hipótese podemos escrever:

$$\sum_{0}^{n+1} \binom{n+1}{p} = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1} \qquad \text{c. q. d.}$$

Basta, portanto, verificar a veracidade da fórmula para $n=1$, o que de facto se verifica, pois:

$$\sum_{0}^{1} \binom{n}{p} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} = 1 + 1 = 2$$

que confere com resultado obtido pela fórmula:

$$\sum_{0}^{1} \binom{n}{p} = 2^1 = 2 .$$

Vejamos a modificação para $\sum\limits_{0}^{n} p \binom{n}{p}$:

Admitamos que $\sum\limits_{0}^{n} p \binom{n}{p} = n\, 2^{n-1}$, por hipótese, válida para o número n, provemos que desta hipótese resulta válida para $n+1$:

$$\sum_{0}^{n+1} p \binom{n+1}{p} = \sum_{1}^{n+1} p \binom{n+1}{p} .$$

Aplicando a fórmula de STIFEL

$$\sum_{0}^{n+1} p \binom{n+1}{p} = \sum_{1}^{n+1} p \left[\binom{n}{p} + \binom{n}{p-1} \right]$$

ou

$$= \sum_{1}^{n} p \binom{n}{p} + (n+1) \binom{n}{n+1} + \sum_{1}^{n+1} p \binom{n}{p-1}$$

Trocando no segundo somatório $p-1$ por k teremos:

$$\sum_{0}^{n+1} p \binom{n+1}{p} = \sum_{1}^{n} p \binom{n}{p} + \sum_{0}^{n} (k+1) \binom{n}{k}$$

ou

$$= \sum_{0}^{n} p \binom{n}{p} + \sum_{0}^{n} k \binom{n}{p} + \sum_{0}^{n} \binom{n}{k}$$

ou

$$= 2 \cdot \sum_{0}^{n} p \binom{n}{p} + 2^n ,$$

e considerando a hipótese temos

$$\sum_{0}^{n+1} p \binom{n+1}{p} = 2 \cdot n \cdot 2^{n-1} + 2^n$$

ou finalmente:

$$\sum_{0}^{n+1} p \binom{n+1}{p} = 2^n (n+1) \qquad \text{c. q. d.}$$

Completa-se a demonstração verificando-se a validade da fórmula para $n=1$.