que $\sum \log \omega_n(x)$ é uniformemente convergente em a.

De (8. 1) tira-se ainda

$$\prod_0^m \omega_n(x) \leqq \prod_0^m W_n .$$

Seja $K = \prod_0^\infty W_n$. Teremos

$$\prod_0^m \omega_n(x) < K \qquad \text{em } I(a, \varepsilon).$$

Pelo teorema 3 fica a demonstração concluida.

Notemos que, designando por $W_n^*(x)$ o maior dos valores $\omega_n(x)$ e $\dfrac{1}{\omega_n(x)}$, ainda se pode tirar de (8. 2)

$$\log W_n^*(x) \leqq \log W_n$$

logo $\sum \log W_n^*$ converge. Será portanto convergente e diferente de zero o produto $\prod W_n^*$. Podemos pois concluir que $\prod \omega_n(x)$ é absolutamente convergente em $I(a, \varepsilon)$ (1).

(1) Como demonstrámos no nosso artigo do último número da «Gazeta de Matemática».

As funções recursivas e os fundamentos da matemática (*)

por Mário Tourasse Teixeira
Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de Rio Claro — Brasil

Muitas vezes não estamos dispostos a aceitar (em algum sentido) de imediato uma certa sentença S. No entanto, se nos apresentam uma determinada sequência de sentenças

$$S_1, S_2, \cdots S_n = S$$

passamos a considerar aceitável a sentença S. Podemos dizer então que a sequência em questão é um argumento para S no sentido de aceitação considerado.

Uma maneira que parece natural de construir sistemàticamente argumentos é a seguinte. Damos um conjunto a de sentenças aceitáveis e um conjunto $R_1, R_2, \cdots, R_n$ de regras que nos convencemos levam sempre, quando aplicadas a sentenças aceitáveis, a sentenças aceitáveis.

Então, toda a sequência

$$S_1 \cdots S_n$$

onde cada S_i ou pertence a a ou é obtida de anteriores por uma das regras R_i, é um argumento.

Suponhamos, por exemplo, que estejamos interessados em gerar dessa maneira argumentos para a teoria elementar dos números. Para tornar mais explícitas as sentenças em que estamos interessados, vamos dar também um processo de geração para elas.

Primeiro especifiquemos os termos (substantivos), que serão obtidos a partir de variáveis (x, y, etc.) e constantes (0 é bastante) por meio de $+$, $\cdot$ e $'$ (soma, multiplicação e sucessor). Exemplos de termos serão então

$$x + 0$$
$$x \cdot y$$
$$x' + y$$

etc.

(*) Palestra realizada no Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, Brasil.

As sentenças serão então alcançadas a partir dos termos por meio de $=$ e depois pela aparelhagem lógica. Como

$$x + 0' = x'$$
$$x = y \supset y = x$$
$$\neg x = 0$$
$$(\exists x)(y + x = y)$$

onde, por exemplo, $\supset$ corresponde a se... então..., $\neg$ à negação e $(\exists x)$ a «existe x tal que...»

Uma vez precisadas as sentenças em que estamos interessados, vamos especificar agora um método de geração de argumentos para essas sentenças.

Começamos com o nosso conjunto a de sentenças aceitáveis. Entre essas, incluimos as que se referem ao mecanismo lógico, como

$$S \supset (T \supset S)$$

onde S e T são sentenças quaisquer de nosso domínio, e as que se referem mais particularmente ao nosso caso, como

$$x + 0 = x\,.$$

Depois especificamos as regras R_i, como

de S e $S \supset T$
obter T.

Se aceitamos as sentenças de a e nos convencemos de que as regras levam sempre de sentenças aceitáveis a sentenças aceitáveis, então toda a sequência

$$S_1 \cdots S_n$$

onde cada S_i é de a ou obtido de anteriores pelas regras, fornece um argumento para uma sentença da teoria dos números.

Os argumentos assim obtidos podem ser testados de uma maneira particularmente simples. Seja, por exemplo, a sequência

$$S_1 \cdots S_n$$

que queremos testar a fim de verificar se é ou não um dos argumentos em questão. Para cada S_i podemos verificar se é ou não uma sentença de nosso sistema, de acordo com o método de geração, por um número determinado e finito de passos. Para verificar se S_i é elemento de a ou pode ser considerado como proveniente de sentenças anteriores da sequência por uma das regras, também nós o podemos fazer de acordo com um número finito e efectivo de passos. Ainda uma pessoa que não entendesse as sentenças de nosso sistema, mas entendesse as regras de geração dele, poderia testar uma sequência $S_1 \cdots S_n$ e verificar se ela é ou não um argumento do sistema. Poderíamos mesmo pensar na possibilidade, em princípio, de construir uma máquina que realizasse tais testes.

Podemos também nos convencer de que os argumentos usualmente encontrados na teoria dos números elementar podem ser convenientemente transportados em argumentos do tipo considerado.

Obtemos assim um sistema poderoso de argumentos para a teoria dos números, que admite um teste efectivo de verificação.

A maneira «construtiva» de gerar o nosso sistema assemelha-se, por sua vez, à própria teoria dos números. As sentenças, por exemplo, são obtidas a partir de um material inicial (variáveis e 0) por meio de um número finito e definido de operações. Os números naturais são obtidos a partir de zero por meio de uma operação definida (sucessão). a é um conjunto de sentenças para o qual temos um processo efectivo de determinar se uma sentença está ou não nele. Anàlogamente poderíamos tomar um sub-conjunto A dos números naturais tal que possamos sempre determinar efectivamente se um número natural está ou não em A. R_i são regras tais que sempre é possível determinar efectivamente se sentenças são ou não relacionadas por elas. Na analogia, serão substituídas por funções f_i de números naturais em $\{0,1\}$ que são efectivamente calculáveis (isto é, que existe um método efectivo de calcular seu valor para objectos quaisquer de seu campo de aplicação). Quando, por exemplo, $f_i(x_1, x_2, x_3) = 0$ é que x_3 provém de x_1 e x_2 pela «regra» f_i e quando $f_i(x_1, x_2, x_3) = 1$ isso não se verifica. Assim sendo, a noção análoga de argumento seria uma sequência

$$a_1 \cdots a_n$$

de números naturais tal que, para cada a_i, ou $a_i \varepsilon A$ ou existe j tal que f_j aplicado a certos membros anteriores e a a_i dá como resultado 0.

Nessa analogia do sistema, usamos a noção de sub-conjunto efectivo de números naturais e a noção de função efectivamente calculável. Examinemos primeiro esta última. Não seria possível dar um processo de geração para essas funções? Isto é, a partir de um certo conjunto de funções iniciais, aplicando um certo número finito de vezes certas operações definidas, obter todas e apenas as funções efectivamente calculáveis dos números naturais neles mesmos.

Como funções iniciais podemos tomar, por exemplo, funções como

$$f(x) = x'$$
$$f(x_1, \cdots, x_n) = 0$$

e, como operações, por exemplo, à que leva da função φ à função f dada por

$$f(0) = q \quad \text{(onde } q \text{ é um certo número natural)}$$
$$f(x') = \varphi(x, f(x)).$$

É possível definir assim uma classe de funções dos números naturais nos números naturais, chamada classe das funções recursivas e dar argumentos convincentes a favor da tese de que essa classe coincide com a classe das funções efectivamente calculáveis, (dos números naturais neles mesmos).

Admitindo essa tese e, chamando de função característica de um conjunto a função que aplicada a um elemento do conjunto dá 0 e dá 1 quando aplicada aos outros elementos, temos que um conjunto é efectivo se e só se sua função característica fôr recursiva.

Por extensão natural podemos falar de relações efectivamente calculáveis, como $x < y$, que o serão quando e sòmente quando a função associada $f(x, y)$ (igual a zero se a relação se verifica e igual a um se não) fôr recursiva.

Vendo a analogia no outro sentido, podemos aplicar essa elaboração das funções recursivas ao nosso sistema. Chamemos de F o conjunto formado pelos elementos constituintes do nosso sistema, ou seja, variáveis, $0, +, \supset, \neg$, etc., sequências finitas desses elementos, como

$$(0, +, x)$$

ou sequências finitas dessas sequências, como

$$((x, +, 0), (0, \supset, x), (0, ', +, 0))$$

Assim sendo, é possível estabelecer uma correspondência efectiva biunívoca entre F e uma parte infinita dos números naturais. Por consequência, uma parte dos números naturais vai corresponder às sentenças e outra parte aos argumentos.

Devido a essa correspondência, surge a possibilidade de que as sentenças do nosso sistema se refiram ao próprio sistema. Ademais, como as noções de sentença e de argumento são efectivas, essas noções vão corresponder, via correspondência, a funções recursivas que, por sua vez, podem ser expressas no sistema.

As sentenças, por exemplo, vão corresponder a um sub-conjunto B dos números naturais. A função f que a cada $x \varepsilon B$ associa 0 e a cada $x \notin B$ associa 1 é recursiva. Com o material de nosso sistema podemos construir uma família de sentenças $S(x)$, uma sentença para cada número natural x, tal que, se x é o número correspondente a uma sentença então existe um argumento do sistema para $S(x)$ e se x não é o número correspondente a uma sentença então existe um argumento do sistema para $\neg S(x)$.

Assim sendo, podemos estudar o nosso sistema no próprio sistema e podemos formular e tentar responder perguntas relativas ao sistema usando o próprio sistema.

Uma pergunta que naturalmente se impõe é se será o nosso sistema suficientemente poderoso. Numa forma extrema, poderemos indagar se para toda sentença S, sem variáveis livres, existirá sempre no nosso sistema um argumento ou para S ou para $\neg S$. Uma construção engenhosa, devida a GÖDEL, nos permite determinar uma sentença T do nosso sistema, sem variáveis livres, tal que, se o sistema fôr compatível como esperamos (isto é para nenhuma sentença S existe no sistema argumentos tanto para S como para $\neg S$), nem para T nem para $\neg T$ existem argumentos no sistema. A ideia norteadora para determinar T é descobrir uma sentença do sistema que exprima, de acordo com a correspondência, que para ela própria não existe argumento no sistema.

A natureza da argumentação acima é tão geral que nos convencemos que se aplica a todos os sistemas com as características de efectividade descritas acima e capazes de expressar uma certa parte da classe das funções recursivas.

Outra pergunta que naturalmente ocorre é se podemos esperar determinar um argumento do sistema para uma sentença que, de acordo com a correspondência, exprime a compatibilidade do sistema. Baseados no resultado anterior, poderemos então nos convencer de que tal coisa não é de se esperar. E as mesmas considerações anteriores se aplicam à respeito do poder deste resultado.

Vimos então que as funções recursivas estão intimamente ligadas aos processos efectivos. Poderíamos indagar se é possível dar para o nosso sistema um método efectivo que, aplicado a qualquer sentença do sistema, diga se existe ou não um argumento do sistema para essa sentença. Se, por assim dizer, retirarmos do sistema a parte que lida com a multiplicação $(\cdot)$ poderemos então dar uma resposta afirmativa à tal indagação. Isto é, podemos exibir um procedimento efectivo tal que nos convencemos que aplicado a qualquer sentença desse sub-sistema nos diz se existe ou não um argumento desse sub-sistema para ela. E para isso não necessitamos das funções recursivas, basta que nos convençamos de que o procedimento é realmente efectivo e faz o que pretende. No entanto, se, por exemplo, queremos argumentar que não devemos esperar determinar um tal procedimento efectivo para o sistema inteiro, necessitamos antes ter precisado o que entendemos pelo conjunto de procedimentos efectivos e é aí que a teoria das funções recursivas nos ajuda, nos fornecendo uma maneira manejável de trabalhar com essa noção. E é assim, trabalhando com as funções recursivas, que chegamos a nos convencer de que não podemos obter para o nosso sistema um método efectivo de determinar, para cada sentença, se existe ou não um argumento do sistema para ela.

Muito se tem feito, no sentido de obter resultados como o acima, mostrando que não devemos esperar obter procedimentos efectivos para sistemas. Para muitas teorias matemáticas simples nos convencemos de que isso se verifica, como também para a aparelhagem lógica fundamental usada, por exemplo, no sistema acima.

O sistema que exemplificamos se restringe a métodos construtivos e podemos pensar que o sentido de aceitação associado a ele está estreitamente relacionado à essa restrição. Mas que dizer de outras partes da matemática? Em vez de construir um sistema para a teoria dos números, podemos construir um sistema para a teoria dos conjuntos e nos convencermos de que esse sistema engloba grande parte da matemática. Mas agora o nosso conjunto inicial de sentenças a é aceitável em outro sentido, ou pelo menos nem todos estão dispostos a aceitá-lo da mesma maneira que o anterior. Por outro lado, podemos construir este novo sistema com as mesmas características de efectividade do anterior. Em particular, existe um critério efectivo para saber se uma sequência $S_1 \cdots S_n$ é ou não um argumento desse novo sistema. Vimos que essas características de efectividade estão intimamente relacionadas ao sistema inicial, que então poderia, sob um certo ponto de vista, ser considerado como o sistema matemático básico.

Espaços de Banach uniformemente convexos (*)

por *Luiz Adauto da Justa Medeiros*
Professor da Universidade do Brasil e do Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas.
Rio de Janeiro — Brasil

§ 1. Introdução. Nosso objectivo nesta exposição é apresentar, sob forma didáctica, um resultado sobre espaços de BANACH, descoberto por D. MILMAN e publicado em «Comptes Rendus de l'Acad. des Sc. de l'U. R. S. S.», vol. 20 (1938). O resultado a que nos referimos consiste do teorema 1, do parágrafo 3, cuja demonstração que faremos, não é o original de MILMAN, mas sim uma devida a B. J. PETTIS, publicada em «Duke Mathematical Journal», vol. 5 (1939) 249-253. Convem salientar, que fizemos, oralmente, esta exposição, como complemento ao curso sobre Espaços de HILBERT ministrado no IMPA pelo professor LEOPOLDO NACHBIN, em 1960.

A demonstração do teorema 1 do § 3 se baseia na representação das formas lineares φ, do segundo dual $\mathfrak{X}^{**}$ do espaço de BANACH $\mathfrak{X}$, através de uma integral. Vamos nos limitar a espaços de BANACH reais o que não é restritivo como veremos no parágrafo 3.

§ 2. Representação de formas lineares. Neste parágrafo, demonstraremos um teorema de representação das formas lineares sobre o espaço de BANACH $M(E)$, das funções limitadas em um conjunto E, já provado por BANACH no caso particular em que E é o conjunto dos inteiros naturais e generalizado por T. H. HILDEBRANDT, consulte Trans. Amer. Math. Soc. vol. 36 (1934) p. p. 868-875. Antes de iniciarmos a demonstração, faremos um apanhado rápido de alguns resultados sobre a teoria da integral.

Seja E um conjunto e representemos por $\mathscr{P}(E)$ a família de todas as partes de E incluindo E e a parte vazia.

Denomina-se decomposição de E a um conjunto finito $E_1, E_2, \cdots, E_n$ de elementos de $\mathscr{P}(E)$ tais que $E_i \cap E_j$ é a parte vazia para $i \neq j$ e $E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_n = E$.

Se D_1 e D_2 forem duas decomposições de E, diremos que D_1 precede D_2, quando toda parte de D_1 estiver contida em alguma parte de D_2 e escreveremos $D_1 \leqq D_2$. É fácil verificar que a relação $\leqq$ assim definida é uma relação de ordem parcial na família Π das decomposições de E. Dada duas decomposições D_1 e D_2 de E, a decomposição obtida de D_1 e D_2 interseptando os seus elementos, a qual representaremos por $D_1 \cap D_2$ é tal que precede D_1 e D_2. Como

(*) Exposição em seminário de Análise Funcional no Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro.