La Inducción Matemática

por Eduardo H. del Busto (1)

A los profesores de matemática secundaria que han sido mis alumnos.

INTRODUCCION

De acuerdo con recomendaciones didácticas recientes, el método de la inducción matemática *pronto ha de ser tema de explicación en la segunda enseñanza.*

Los textos corrientes entre los profesores no son ricos en motivaciones adecuadas a la exposición y a la comprensión del razonamiento por recurrencia. Por fortuna, el excelente y ampliamente difundido How to solve it, *de George Polya, llena un notorio vacío en cuanto a la enseñanza del* mecanismo inductivo, *pues aporta inteligentes detalles cuyo conocimiento todo professor agradece.*

A nuestro juicio, falta, sin embargo, un enfoque histórico *de la cuestión, destinado a rastrearla desde los remotos y oscuros orígenes hasta los días presentes, cuando se manifiesta plena de sugerencias y posibilidades de* integración cultural. *El especialista en Historia de la Matemática cuenta, sin duda, con la información bibliográfica y, acaso, con los testimonios necesarios para reconstruir las etapas sucesivas de la argumentación inductiva; pero, en realidad, no tratamos aquí la historia de este interesante tema de la matemática sino en la medida parcial requerida por nuestro intento — repetimos — de ofrecer un enfoque histórico que satisfaga algunas exigencias didácticas. Queremos, pues, suministrar una serie de motivaciones más para el logro de una mayor comprensión de un modo de razonamiento cuya naturaleza misma aparece con nuevos relieves si se la trata según su línea evolutiva a través de los tiempos.*

La relación de las principales conexiones históricas del problema de la inducción matemática, que tantas implicaciones tiene, ha de servir — así lo esperamos — para provocar el interés de los alumnos secundarios, cuya fuerte apetencia cultural *no siempre es aprovechada al máximo en los cursos científicos de segunda enseñanza.*

A pesar de lo dicho, el presente trabajo está dedicado a los professores y no a los discípulos; por lo menos, en principio. Mas estamos seguros que los enseñantes harán llegar a los jóvenes, en oportunas dosis bien acondicionadas, algunos elementos de los muchos y variados que en esta reseña ofrecemos. La experiencia personal les ha de dar la pauta que mejor convenga a los alumnos.

La finalidad didáctica *de nuestra exposición y el* círculo de lectores *en quienes se ha pensado al redactarla, determinan el nivel y la extensión de los comentarios que siguen. No se requieren conocimientos especiales para abordar el contenido de este folleto; pero cierta madurez intelectual y alguna somera información acerca de los fundamentos de la matemática, se necessitan para interpretar cabalmente el alcance de las palabras de los últimos capítulos, donde la dificultad de los pro-*

---

(1) Doctor en Matemática. Profesor de la Universidad Nacional del Sur — Bahía Blanca.

blemas tan sólo enunciados brevemente en la mayoría de los casos, nos ha obligado a cortar y poner punto, so pena de salirnos de los límites que nos habíamos fijado antes.

Procurando ser sencillos y parcos, cuando los temas se tornan complejos o demasiado polémicos hemos preferido remitirnos a alguna obra especializada y de fácil acceso, donde podría satisfacerse la legítima avidez del presunto lector.

Bahía Blanca, Noviembre de 1963.

EL AUTOR

DEMOSTRACIONES POR INDUCCION MATEMATICA

1. 1. Empezamos por hacer una advertencia respecto de la denominación «inducción matemática».

La palabra «inducción» es capaz de producir equivocaciones y, para no caer en ellas, se emplea el aditamento calificativo de «matemática». Algunos autores la llaman, en cambio, «inducción completa» y otros aún, prefieren evitar lisamente la voz «inducción», causante de interpretaciones erróneas, y aconsejan decir «recurrencia» por todo nombre.

La última denominación nos parece la más oportuna y práctica, porque no favorece como aquellas a mantener una confusión bastante común entre los principiantes. En efecto, el método de la demostración por recurrencia difiere completamente de esa inferencia inductiva, de la cual nos valemos en la vida diaria y en la ciencia de la naturaleza, para aprender a partir de la experiencia reiterada.

La *inferencia inductiva* nos hace extraer consecuencias generales mediante la observación de un número finito y tal vez pequeño de casos particulares, en los cuales se reitera una característica común a todos. Pero la conclusión obtenida es cierta sólo cuando hemos podido verificar uno a uno, sin excepción, los casos que constituyen el objeto de observación; es decir, cuando han sido observados todos, sin dejar ninguno. De otro modo, *la conclusión obtenida por inferencia inductiva es* cierta *cuando hemos procedido por enumeración completa.*

Si no hubiésemos tenido a nuestro alcance la enumeración completa (sea porque no la hayamos efectuado voluntariamente, sea porque resulte infinita o sencillamente impracticable), la inferencia inductiva todavía nos brindará una conclusión (no cierta sino) *probable* en relación a alguna característica de los casos observados, *siempre que no hayan aparecido ejemplos contraproducentes.* Este tipo de conclusiones se obtienen por *enumeración incompleta* y son los más corrientes en las ciencias.

Vamos a ilustrar la inferencia inductiva por enumeración completa y por enumeración incompleta.

Si revisamos uno a uno los libros de una biblioteca y observamos, sin excepción, que tratan temas literarios, llegamos a la conclusión *cierta* de que la biblioteca es de literatura (Enumeración completa).

Si nos limitamos a revisar un conjunto de libros de esa biblioteca, pero no la totalidad de ella, estaremos constreñidos a extraer la conclusión *probable* de que la biblioteca es literaria, siempre que no hubiésemos hallado ningún volumen no literario (Enumeración incompleta). La conclución es tanto más probable cuanto mayor sea el número de las reiteradas observaciones.

Las conclusiones surgidas de la inferencia inductiva (completa o incompleta) no son proposiciones *demostradas,* en el sentido lógico del término. Podemos decir de ellas que han sido *verificadas* (en forma total o parcial, respectivamente).

En cambio, la *recurrencia (inducción matemática* o *inducción completa)* es, en primer lugar, un método de demostración al cual la matemática echa mano a fin de *deducir* proposiciones estrictamente válidas en una infinidad numerable de casos, sin requerir, no obstante, una infinidad de pruebas.

Conviene insistir en este punto: la recurrencia es un método de demostración, no de verificación. Es, por ende, esencialmente diversa de la inferencia inductiva.

Es verdad, empero, que muchas innovaciones en matemática se conjeturan antes de demostrarse; y es verdad también que, en el proceso de conjeturar, la mente humana procede muchas veces inductivamente, como lo atestiguan trabajos de psicología de la invención. Pero la incorporación de una proposición al dominio matemático exige, en absoluto, el cumplimiento de los requisitos de la ciencia demostrativa. La recurrencia sirve los propósitos de ésta; no debe ser confundida, pues, con la inducción de las ciencias naturales.

Para comprender mejor lo que acabamos de expressar, veremos algunos ejemplos matemáticos, donde hacemos uso correcto o incorrecto del método de recurrencia.

1. 2. Leamos con atención los enunciados y demostraciones que siguen:

a) *Demostrar que* $1 + 2 + 3 \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$, *para cualquier* n *natural.*

Muchos alumnos están tentados de razonar como si se tratase de una proposición que se somete a prueba experimental. Dirían, poco más o menos: «La fórmula es cierta porque se cumple si n = 1, 2, 3, 4, 5, *etc.* Inferimos, pues, que es verdadera».

En matemática un razonamiento tal es inadmisible, aunque sea del tipo que emplean la física, la química, la biología, para verificar una hipótesis probable.

El método de recurrencia, como veremos luego, trasciende la conjetura y afirma la proposición deductivamente.

b) *Demostrar que todo número naturat de la forma* $n^2 + n + 41$ *es primo.* (?)

Esta famosa expresión propuesta por Leonhard Euler (1707 a 1783) «parece» cierta porque se verifica para $n = 0, 1, 2, 3, \cdots, 39$; es decir, se verifica en los primeros cuarenta (!) casos... Sin embargo, para $n = 40$, resulta un número compuesto: $40^2 + 40 + 41 = 1681 = 41^2$.

¿Para qué nos sirve este hermoso ejemplo? Para precavernos de las conjeturas inferenciales no demostradas y para distinguir, de una vez por todas, una demostración matemática de una inducción natural.

c) n *planos dividen al espacio en* 2^n *partes.* (?)

Otra vez la misma historia. Si $n = 1$, la proposición se verifica; si $n = 2$, también; si $n = 3$, también. Sin embargo, cuatro planos dividen al espacio en catorce partes, y cinco planos lo dividen en veintidós.

O sea, la proposición anterior no se verifica para $n = 4$ ni para $n = 5$; el teorema no es cierto *en general*, a pesar de que una conjetura apresurada permitía suponerlo.

(En general, lo cierto es que n planos dividen al espacio en $n(n-1) + 2$ partes).

En matemática (y en ciencia natural) basta que un solo caso contradiga a una fórmula conjeturada como válida en general, para que tal fórmula quede negada en general (En matemática, definitivamente; en ciencia natural, transitoriamente).

La proposición general b) quedó invalidada al verificar que $n = 40$ no la satisface, o sea que $40^2 + 40 + 41$ no es primo; la proposición c) quedó invalidada al verificar que $n = 4$ (ó $n = 5$) no la satisfacen.

¿Será necesario recurrir a una *infinidad* de verificaciones para asegurar la *validez general* de una fórmula como la a), por ejemplo? Si así fuese, nunca estaríamos en condiciones de afirmar que una proposición como la a) es cierta en general, porque existe imposibilidad de realizar infinitas verificaciones. Afortunadamente, el método de demostración por recurrencia nos proporciona la clave para razonar correctamente en estos casos del quehacer matemático.

El esquema es notable por su sencillez. Ante una proposición general en donde intervienen los números naturales $1, 2, \cdots, n, \cdots$ (o, acaso, $0, 1, 2, \cdots, n, \cdots$) y cuya verdad debemos demostrar, procedemos en tres etapas:

1.° *Demostramos* que la proposición es cierta para un primer elemento (para $n=1$ ó para $n=0$, por ejemplo). Como éste constituye un solo caso, basta una verificación de la fórmula; verificación que es válida por enumeración completa.

2.° *Demostramos* que la proposición es cierta para $n=k+1$ *si* la hemos supuesto cierta para $n=k$, siendo k un número natural *cualquiera*.

3.° «Cumplidas las etapas 1.° y 2.°, *afirmamos* que la proposición es cierta en general». La afirmación es trascendental, en el sentido de que traspasa los límites de cualquier posible experiencia. Reparemos bien: se apoya en que, para un primer elemento se verifica (o se demuestra) la proposición, y que *supuesta* válida para un elemento *cualquiera*, se *demuestra* válida para el *siguiente* elemento.

La tercera etapa constituye el principio de recurrencia (o de inducción completa) cuya esencia e implicaciones culturales intentaremos dilucidar históricamente, a partir del Cap. II. Por ahora contentémonos con parangonarlo con la sucesión de una herencia dejada por un primer magnate con orden de transmitirla inalterada indefinidamente, sin que ninguna vicisitud la modifique nunca. Condiciones muy fuertes; condiciones ideales, sólo exigibles en el dominio de la razón.

Para conceder vigencia al principio de recurrencia es condición esencial que las etapas 1.° y 2.° sean demostradas. De otra manera, decimos que el principio de recurrencia se apoya en la demostración de dos teoremas previos: uno se refiere al primer elemento y otro concluye la validez de la proposición para un elemento cualquiera si se la *supone* para el elemento anterior. La segunda condición significa que la fórmula sometida a prueba constituye una *propiedad hereditaria* e inalterable, transmitida del caso k-ésimo al siguiente, cualquiera sea k.

El principio se halla condicionado, pues, a dos teoremas. A dos teoremas y no a uno de los dos. El profesor debe insistir sobre este particular...

Pasemos ahora a ejemplos concretos para mostrar la aplicación correcta del principio de recurrencia y para mostrar, también, los efectos que produce una aplicación incorrecta.

d) Demostramos por recurrencia la conjetura planteada en *a*)

TEOREMA. $1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$, *para cualquier* n *natural.*

Primera etapa (Teorema d · 1): *La fórmula es cierta para* $n=1$.

En efecto, tomando $n=1$, la fórmula se verifica, pues resulta

$$1=\frac{1\cdot(2)}{2}.$$

Esta verificación directa basta; lógicamente.

Segunda etapa (Teorema d · 2): *Si la fórmula se supone válida para* $n=k$ (siendo k, cualquiera), *es también válida para* $n=k+1$.

Partimos de la hipótesis de d · 2, que consiste en suponer cierto que

$$1+2+3+\cdots+k=\frac{k(k+1)}{2}.$$

Sumando $k+1$ a ambos miembros de la igualdad y operando de acuerdo con las reglas de la aritmética, se obtiene:

$$1+2+3+\cdots+k+(k+1)=$$
$$=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)=$$
$$=\frac{(k+1)(k+2)}{2},$$

que es lo que procurábamos demostrar, porque la última expresión es la misma que resultaría de la fórmula *d*) si se reemplazase en ella n por $k+1$.

Como acaba de verse, ya se han cumplido las etapas primera y segunda, y, por tanto, es aplicable la tercera etapa, la cual equivale a afirmar que la fórmula *d*) es válida en general por haberse demostrado d · 1) y d · 2).

Ha quedado demostrado por recurrencia o inducción completa el teorema

Es $1+2+3+\cdots+\mathrm{n}=\frac{\mathrm{n}(\mathrm{n}+1)}{2}$, *cualquiera sea* n *natural.*

Si el lector se sirve cotejar el razonamiento que hemos efectuado a lo largo del párrafo correspondiente al ejemplo *d*), con el que habíamos presentado en *a*), recibirá una patente aclaración de la diferencia que existe entre una demostración y una simple conjetura inductiva.

¿Es imprescindible cumplir las tres etapas para la correcta aplicación del método demostrativo por recurrencia? La respuesta es afirmativa, como los ejemplos que vienen a continuación lo evidencian.

e) Es imprescindible demostrar la etapa primera. De lo contrario llegaríamos a conclusiones erróneas como la omisión de esta etapa permite extraer. Así, el falso teorema:

Todo número natural iguala al siguiente, se fundamenta en haber «demostrado» que $n=n+1$, para todo natural (!). En efecto, pensaríamos luego de haber omitido la verificación que impone la etapa primera, *si suponemos que* $k=k+1$ (etapa segunda, sola), *se deduce que* $k+1=k+2$, pues esta última igualdad (!) se obtiene de la anterior sumando 1 a ambos miembros.

Si, en virtud de cumplirse la etapa segunda (y no cuidando que debe cumplirse, además, la primera) aplicamos (mal) ahora la etapa tercera, concluiríamos afirmando que $n=n+1$, para todo n natural. Esto implicaría afirmar también que todos los números naturales son iguales entre sí; lo cual no es cierto.

A tan grave error hemos sido conducidos por no haber respetado la etapa primera; aquella que nos habría exigido verificar que $n=n+1$ se cumple si $n=1$, y, como esto no es verdad, pues 1 no es igual a 2, no tenemos derecho a aplicar la etapa tercera; es decir, el principio de recurrencia no cabe en este caso.

f) Es imprescindible demostrar también la etapa segunda. Sobre este particular nos basta con recalcar algunas observaciones que ya tenemos hechas.

Las conclusiones erróneas *b*) y *c*) verifican, no obstante ser falsas, la etapa primera: ambas se cumplen para un primer elemento natural.

Sin embargo *no son ciertas* en la segunda etapa, pues no valen para el siguiente de cualquier k, como lo hemos notado a través de casos particulares en los ejemplos *b*) y *c*).

Del mismo modo como reclama la verificación para el primer elemento, el principio de recurrencia exige el cabal cumplimiento de la segunda etapa, donde se pone de relieve el carácter hereditario, inalterable, de una propiedad que se trasmite desde ese primer elemento indefinidamente.

En *Induction and Analogy in Mathematics* (volumen I de *Mathematics and Plausible Reasoning*) de Georg Polya, se plantea un problema paradojal muy ilustrativo de lo que importa la elección de un elemento *cualquier* en la segunda etapa de la demostración por recurrencia. Helo a continuación:

Considerando que las paralelas son rectas del plano que se cortan en el infinito, demostraremos(!) que «n rectas cualesquiera del plano tienen un punto en común».

La proposición es obvia para $n=1$ y para $n=2$ (aún tratándose de paralelas, como hemos dicho). Supongamos ahora que la proposición es cierta para $n=k$. Entonces, para «probar» que es cierta para $n=k+1$ razonamos así:

De las $k+1$ rectas elegimos k. Estas pasan por un punto, según hemos supuesto. Una de ellas y la $(k+1)$-ésima recta pasan, entonces, por un punto, pues así lo hemos verificado para $n=2$. Luego, las $k+1$ rectas pasan por un punto del plano (!).

La conclusión es falsa, sin embargo, porque tres rectas distintas *no pasan necesariamente* por el mismo punto del plano. Por consiguiente, al tomar en consideración k rectas del plano, bastará suponer que por lo menos *dos* son distintas para no poder inferir necesariamente que dichas k rectas y la $(k+1)$-ésima se cortan en un solo punto.

Esta paradoja nos enseña que para aplicar correctamente el principio de recurrencia, es esencial que las condiciones de la herencia estén precisamente enunciadas y valgan para cualquier n. No basta que valgan para algunos n (como aquí, para $n=1$, ó $n=2$, nada más).

1. 3. Para familiarizar al alumno con las tres etapas del método de recurrencia, el profesor debe encomendar varios ejercicios de demostración. Una colección muy útil es la de los capítulos I y II de I. S. Sominskii, *The method of mathematical induction,* Blaisdell, N. York y Londres, 1961.

La práctica del método facilita la correcta interpretación y torna comprensible al alumno el enunciado del principio de recurrencia, que los textos corrientes presentan ya como axioma ya como teorema.

Algunos de esos enunciados se transcriben a continuación:

(1.3.1) «Supongamos haber demostrado: *a*) que el número 1 (o el cero) tiene la propiedad P; *b*) que, en la hipótesis de que el número natural k tiene la propiedad P, se demuestra que el número natural $k+1$ también la tiene. Entonces todo número natural tiene necesariamente la propiedad P».

(1.3.2) «Para demostrar que una propiedad P de los números naturales es general para todos los números mayores o iguales que uno de ellos llamado m, basta verificar: *a*) que P se verifica para m; *b*) que supuesto que P se verifica para $n \geqq m$, se prueba que P se verifica para $n+1$».

En este enunciado, m oficia de primer elemento.

(1.3.3) «Sea N el conjunto de los números naturales y se trata de verificar cierta propiedad. Entonces

$$\left.\begin{bmatrix} (1) & \text{La propiedad es verdadera para } a=1\,; \\ (2) & [\forall p \in \mathrm{N}:\ \text{verdadera para } a=p] \\ & \Rightarrow [\text{verdadera para } a=p+1] \end{bmatrix}\right\} \Rightarrow [\text{verdadera } \forall a \in \mathrm{N}]\text{»}.$$

La precedente enunciación reviste una forma aceptable para un enfoque moderno de la matemática elemental. Es particularmente interesante porque pone de manifiesto la vinculación de las implicaciones. Se deberá cuidar que los alumnos sepan traducir al lenguaje corriente lo expresado por los símbolos.

(1.3.4) «Si a un conjunto pertenece un primer número natural, y con cada elemento su sucesor, entonces a ese conjunto pertenecen todos los números naturales».

Como hemos tomado aquí el amplio concepto de «conjunto» como equivalente al de «clase de fórmulas que verifican cierta propiedad», la manera de expresar el principio de recurrencia que acabamos de dar, ofrece la particularidad de usar las breves nociones que sobre la teoría de los conjuntos se enseñan en los colegios secundarios.

1. 4 Aunque no las utilizaremos a menudo, merecen párrafo aparte las llamadas *definiciones por recurrencia* (o *definiciones por inducción*) que el alumno encarará en estudios posteriores. Las caracterizaremos por medio de un ejemplo.

Imaginemos haber construído la tabla de multiplicar correspondiente al número natural a, basándonos en la noción previa de suma de naturales. La tabla sería de la forma:

$$a \times 1 = a$$
$$a \times 2 = 2a$$
$$a \times 3 = 3a\text{; etc.;}$$

otorgando a a diversos valores se consiguen diversas tablas de multiplicación. ¿Cómo ascender, de esas tablas *particulares*, a una definición de la multiplicación de los números naturales?

La *definición por recurrencia* nos suministra la respuesta satisfactoria. Para el caso del producto de números naturales, hela aquí:

(1.4.1) «Sean a, n, números naturales cualesquiera, y sea $n+1$ el sucesor de n; entonces la multiplicación de números naturales queda expresada por:

$$\begin{cases} a \times 1 = a \\ a \times (n+1) = a \times n + a\,. \text{»} \end{cases}$$

Nótense los dos pasos seguidos: la definición del producto de a por el primer natural, y la definición del producto de a por el siguiente de n. Evidentemente, este paso unido al primero significa reconocer la presencia de un ingrediente hereditario, inalterable, a lo largo de todos los números naturales. Sobre la base de ambos pasos está cimentada, pues, la definición por recurrencia (o por inducción).

(1.4.2) Es posible comprobar que *cualquier justificación de una definición por recurrencia* implica *una justificación de la* demostración *por recurrencia*, y *recíprocamente*. Excede al nivel impuesto a este folleto, considerar el detalle de tan interesante cuestión; pero es indispensable tener en cuenta el resultado anotado, pues en virtud de él nos eximiremos de mayores comentarios acerca de las definiciones por recurrencia.

Por otra parte, quien desee ahondar el tema podrá recurrir al capítulo 6 de Evert W. Beth, *The foundations of mathematics*, 1959.

(1.4.3) Para finalizar, vamos a señalar las notas típicas del método de recurrencia. Primero, la existencia de un *ingrediente hereditario*, inalterable; segundo, la presencia de una sucesión que tiene un primer elemento, y que no termina.

El método se aplica, entonces, si existe una propiedad que transita a lo largo de todos los elementos de un conjunto numerable, sin excepción alguna y sin manifestar modificación alguna.

Con esta noción general y un tanto imprecisa por el momento, vamos a rastrear los oscuros orígenes históricos del método de la inducción completa. Con el ánimo de iluminar mejor su significación y alcances hemos de indagar antes las diversas modalidades de algunas antiquísimas argumentaciones donde se evidenciaba algún tipo de ingrediente hereditario, inalterable a lo largo de muchas (aunque no necesariamente infinitas) etapas de un proceso. Después hemos de estudiar más específicamente las primeras demostraciones donde el método se aplica con el suficiente rigor como para no confundirlo con otro ninguno.

EL «INGREDIENTE HEREDITARIO» EN ARGUMENTACIONES ANTIGUAS

2. 1. Aunque impreciso y todavía oscuro, uno de los primeros testimonios donde atisbamos el empleo de una especie de «ingrediente hereditario» en argumentaciones demostrativas, se remonta a varios siglos antes de Cristo. Por lo menos en Europa, pues del Oriente nada sabemos en estos aspectos.

Acaso el sofista Brisón de Heraclea (siglo V a. C.) y, seguramente Políxenes, a quien le ha sido atribuída la paternidad del argumento, emplearon en actitud polémica, un tipo de razonamiento que fue llamado *argumento del Tercer hombre* y que reviste la forma de un proceso deductivo donde es patente la intervención de características hereditarias inalterables.

De Políxenes se sabe que vivió en Siracusa entre los años 367 y 344 a. C. Por este pequeño lapso de su vida, colegimos que fue contemporáneo de Platón, quien circunstancialmente estuvo también en Sicilia en diversas oportunidades.

Platón alude a Políxenes en el *Parménides*, con ocasión de criticar aquella argumentación del Tercer hombre, atribuíble como hemos dicho a Políxenes, y cuya finalidad era invalidar la teoría platónica de las Ideas, poniendo de manifiesto dificultades de orden lógico o filosófico que los miembros de la Academia discutían mucho. Por eso Aristóteles (*Metafísica*, A. 9) alude al argumento del Tercer hombre cuando revista las críticas suscitadas por la concepción platónica, y, en *El-Soph.* lo cita como sofisma. Ubiquémoslo históricamente.

Platón no presta atención a lo peculiar de las cosas visibles y tangibles, sino a lo que ellas tienen de común, o sea, a lo general, que es de naturaleza puramente inteligible. No lo particular de cada cosa por separado es lo esencial y permanente, sino aquello que tienen en común con otras cosas de la misma clase. A esta cualidad común, que desde Aristóteles denominamos «concepto», Platón la llama «Idea».

En la *República* (X, 596 A) dice Platón: «Suponemos que una Idea existe cuando damos el mismo nombre a muchas cosas separadas.»

Las Ideas forman el mundo existente por sí mismo, eterno, invariable y sólo accesible por el pensamiento. Los seres sensibles, en cambio, no son sino las sombras o imágenes del superior mundo ideal, como lo enseña el muy conocido símil de la caverna (*Rep.*, libro 17).

Las Ideas platónicas son además los modelos *perfectos e inmutables* de los cuales las efímeras cosas sensibles toman la razón de su aparente existencia.

Hay Ideas de cuanto sea posible; no únicamente de las cosas naturales, sino también de los productos artísticos, de las relaciones, de las actividades, de las cosas valiosas y de las indignas, etc. En una palabra, una verdadera *duplicación* del mundo: el sensible y el inteligible. Y tal duplicación es la consecuencia necesaria de postularse en el *Parménides* (130, B-D) que todo cuanto existe como sensible tiene su razón de ser en una Idea.

Pues bien, el argumento del Tercer hombre asume formas diversas para rebatir al platonismo. Una reviste carácter de sofisma (Si decimos, «el hombre pasea», no estamos hablando de la Idea de hombre — que es inmóvil — ni de un hombre particular; debemos concluir que nos hallamos refiriéndonos a una tercera especie de hombre); pero nos interesa destacar aquellas enunciaciones donde aparece un ingrediente hereditario que se reitera, inalterado, muchas veces.

Así, se atribuye precisamente a Políxenes este razonamiento: «Si el hombre existe por participar de la Idea de hombre, existe asimismo la razón entre hombre particular e Idea de hombre, y tal razón no es ya ni

Idea de hombre ni hombre particular; es una tercera especie. Y así siguiendo, indefinidamente.»

No cabe duda alguna que la argumentación puede explayarse para objetar la existencia de los dos mundos platónicos. Políxenes podía argüir como se dice a continuación.

Dos cosas particulares semejantes deben su *semejanza* a la Idea general de tales cosas, pues la Idea otorga la razón de ser de la semejanza entre las dos cosas particulares. Pero ¿a quién ha de atribuirse la razón de ser de la semejanza que existe, a su vez, entre la antedicha Idea y cada una de las dos cosas particulares? Por ejemplo, si la Idea de hombre está constituída por las notas comunes de los hombres particulares, la semejanza, ahora entre un hombre particular y la Idea misma de hombre, ¿qué razón de ser posee?

La semejanza entre la Idea general de hombre y el hombre particular, no puede fundamentarse ni en la Idea ni en el hombre; porque en aquella está la razón de la semejanza de seres particulares y no la razón de la semejanza entre un ser particular y una Idea. Por consiguiente, la razón de ser de la semejanza entre la Idea y el hombre particular ha de residir aparte de uno y otra, es decir, en un Tercer Hombre, en una nueva entidad.

Mas, análogamente, la razón de ser de la semejanza entre el Tercer hombre y la Idea de hombre es imposible hallarla en una u otro de éstos; entonces, se infiere que ha de residir en una nueva entidad aún, que llamaremos el Cuarto Hombre. Y, así, proseguiremos hasta el infinito. He aquí un *regressus in infinitum*, que para los griegos significaba una gravísima dificultad y que, lógicamente hablando, contradice el postulado de la duplicación del mundo, admitido por Platón en el *Parménides*.

No nos compete discutir los alcances filosóficos del argumento del Tercer hombre. Pero los esquemas del razonamiento de Políxenes nos resultan de sumo interés, porque en ellos vemos cómo cierto ingrediente pasa de etapa a etapa discursiva con el mismo grado de vigor, repitiendo los mismos efectos sucesivamente, y, cual una herencia perfecta e inalterable a través de las infinitas instancias que recorre, los elementos de la sucesión admiten igual aporte lógico; con lo que se asegura una consecuencia final válida para la totalidad de los elementos que reciben la herencia.

El argumento del Tercer hombre termina siendo un razonamiento basado en el ingrediente hereditario inalterable, tan característico del método de la inducción matemática. No es que sea en estricta verdad una demostración por recurrencia en el sentido que corresponde otorgar hoy al método demostrativo que nos ocupa, pero en el argumento del Tercer hombre se observa el tránsito de la propiedad hereditaria de una etapa a la siguiente, todo a lo largo de una sucesión que comienza en las efímeras cosas sensibles de Platón y se remonta hacia el infinito, provocando desazón en la mente lógica de los griegos.

Este primer testimonio, vago, nebuloso, informe, del razonamiento por recurrencia, nos ubica dentro de una problemática general que sale del ámbito filosófico puro e invade nuevos dominios del pensamiento discursivo.

2. 2. En el dominio matemático los griegos también han empleado razonamientos donde se utilizan ingredientes hereditarios. También un siciliano (¡sugestiva coincidencia!), el genial Arquímedes de Siracusa (287 a 212 a. C.) nos ha legado varios testimonios geométricos del método recurrente, al cual otorga una forma muy precisa, casi inobjetable.

En verdad, Arquímedes proporciona testimonios directos e indirectos. Estos vinculan su nombre a los de Eudoxo de Cnido, Euclides y, otra vez, Platón, como hemos de mostrar a continuación. De los testimonios directos hablaremos con amplitud en el Capítulo III.

El primer *testimonio indirecto* es el postulado, hoy llamado de Eudoxo, que Arquímedes enuncia en tres de sus obras. Así, el postulado V del primer libro de *Sobre la esfera y el cilindro* dice textualmente:

«5. Además, de líneas desiguales, de superficies desiguales, de cuerpos desiguales, lo mayor excede a lo menor en una magnitud tal que si se la suma a sí misma (reiteradamente), llegará a exceder a cualquier magnitud dada de entre las que son comparables consigo y con otra».

En la introducción de *La cuadratura de la parábola*, también Arquímedes declara admitir como lema:

«... el exceso por el cual la mayor de dos áreas desiguales excede a la menor, al ser sumado a sí mismo (reiteradamente), puede hacerse exceder a cualquier área finita dada».

Y dice que dicho lema era conocido por geómetras *anteriores a él.*

En la introducción al tratado *Sobre las espirales* y con el fin de demostrar diversas proposiciones que allí trata, explica Arquímedes que,

«... previas a ellas y como es usual en otras obras geométricas, se hallan las proposiciones que permiten probar aquellas. Y aquí también, como en los libros previamente publicados, admito el siguiente lema:
que si hubiera dos líneas desiguales, o dos áreas desiguales, el exceso por el cual la mayor excede a la menor, al ser continuamente agregado a sí mismo, llega a exceder a cualquier magnitud dada entre aquellas que son comparables con ella o con otra».

Todos estos enunciados de Arquímedes involucran procesos reiterativos con intervención de un elemento hereditario muy simple, en verdad. Arquímedes recoge, en esta materia, el pensamiento de hombres como Eudoxo de Cnido (Cnido era una ciudad de Caria, en Asia Menor, sobre el Mar Egeo). El nombre de Eudoxo (406 a 355 ? a. C.) se enlaza corrientemente con el de Euclides, pues la materia del libro V de los *Elementos* es adjudicable al propio Eudoxo, quien pasa como el primer sistematizador de la teoría de las proporciones.

Si fuera así, como parece, la definición cuarta del libro V de los *Elementos* euclídeos se debe, acaso, a Eudoxo de Cnido (o a algún geómetra anterior a él, que nadie cita). La definición cuarta expresa:

«Se dice que las magnitudes están entre sí en razón, cuando al ser multiplicadas son capaces de excederse una a otra».

De otra manera: La magnitudes se dicen tener una razón entre ellas cuando al ser multiplicadas pueden sobrepasarse unas a otras.

La definición es indispensable en la teoría de las proporciones y, atendiendo a la presunta paternidad de su enunciado, ha pasado a llamarse *postulado de Eudoxo,* o bien, debido al reconocimiento que de él ha efectuado Arquímedes en los textos antes citados, donde se lo proclama presupuesto necesario de importantes proposiciones geométricas. se lo cita hoy con el nombre de *postulado de Eudoxo-Arquímedes* y se lo expresa con estas palabras:

Dadas dos cantidades homogéneas diferentes, existe siempre un múltiplo de la menor que supera a la mayor.

El postulado no presupone que las magnitudes sean conmensurables o no lo sean, y, justamente en esto radica su notable mérito histórico, pues al valerse de él para fundamentar la teoría de las proporciones quedaba bien soslayado el problema de la inconmensurabilidad, que tanto escándalo había provocado entre los mismos pitagóricos, que la descubrieron a su pesar.

Ello aparte, como el postulado de Eudoxo-

-Arquímedes no veda la posibilidad de aplicarlo a cantidades tan grandes o tan pequeñas como se quiera, y al establecer la razón entre las magnitudes, si el denominador es muy chico respecto del numerador, está como predisponiéndose a la aceptación de un proceso infinito; aunque, bien es cierto, los griegos, en particular después de Zenón de Elea, evitaban tratos con el infinito cuya índole no habían logrado conocer.

2. 3. Sin embargo, no nos parece demasiado arriesgado aventurar la conjetura de que Eudoxo tuvo cierta propensión al uso de argumentaciones en las cuales se rastrean procesos hereditarios que continúan indefinidamente. Dentro de este tipo de argumentaciones creemos ver el segundo *testimonio indirecto*, entre los antiguos; testimonio vinculado asimismo a Arquímedes y a Eudoxo. Se refiere al después llamado *principio de exhaución*.

Si bien el nombre dado a este principio data del siglo XII, parece que el primero en proponer un problema de exhaución fue Platón (428 a 347 a. C.), al preguntar si sería posible agotar el espacio entre la esfera y el dodecaedro inscripto mediante la sucesiva intercalación de otros cuerpos. Eudoxo, que se hallaba muy vinculado a Platón, consideró atentamente el problema y lo transfirió a volúmenes, áreas y longitudes en general, sentando el siguiente principio:

Dadas dos cantidades desiguales, si se quita de la más grande una parte mayor que su mitad y se continúa haciendo lo mismo, se llegará a encontrar una cantidad seguramente menor que la más pequeña de las dos cantidades dadas.

El principio se ha empleado y se emplea en muchas cuestiones geométricas. Consiste en el agotamiento de diferencias ocasionado por la repetición de una operación hereditaria. Así, todo polígono regular circunscripto posee área mayor que la del círculo correspondiente, y todo polígono regular inscripto posee área menor que dicho círculo. Aumentando el número de lados, el polígono circunscripto resultante disminuye su área y el polígono inscripto la acrecienta. El proceso se torna exhaustivo en el sentido de que ambas áreas se aproximam todo lo que se desee.

Ahora bien, demostrando que si se supone el área del círculo mayor que la de los polígonos circunscriptos se llega a un absurdo, que también se llega a un absurdo suponiendo que el área del círculo es menor que la de los polígonos inscriptos; y suponiendo la vigencia del principio de exhaución, se arriba a la conclusión de que el área del círculo iguala al área del polígono regular circunscripto y a la del polígono regular inscripto, *si el número de lados ha crecido suficientemente*.

Este procedimiento demostrativo, denominado «de exhaución» desde el siglo XII y que la Historia atribuye a Eudoxo de Cnido por inspiración de Platón, es el mismo que Arquímedes de Siracusa utiliza con éxito en problemas de cuadraturas. (Ver, por ejemplo, *Cuadratura de la parábola*).

2. 4. Para cerrar el capítulo sobre atisbos del ingrediente hereditario en argumentaciones antiguas, vamos a invocar un testimonio especial recogido por Enclides (siglo III a. C.).

La proposición 20 del libro IX de los *Elementos* expressa el famoso teorema de que *los números primos son más que cualquier cantidad fija de números primos*.

Vamos a detallar la demostración euclídea, simplificando tan sólo la notación, con el propósito de aclarar aún más el proceso argumental.

Empiezo por un *caso particular*, viene a decirnos Euclides. Sean dados tres números primos a, b, c. Digo que, aparte de estos tres, hay otro número primo.

En efecto, si tomo $a \cdot b \cdot c + 1$, este número ha de ser primo o no serlo, pues una tercera alternativa es imposible. Si $a \cdot b \cdot c + 1$ fuese primo, la tesis de mi caso particular habría quedado probada; si $a \cdot b \cdot c + 1$ no fuese primo, debería admitirse (de acuerdo con la proposición 31 del libro VII de los *Elementos*) que es divisible por algún número primo d. Pues bien, d difiere de a, de b y de c; diré por qué.

Si d fuese igual a a, o igual a b, o igual a c, entonces $a \cdot b \cdot c$ sería múltiplo de d; y como también $a \cdot b \cdot c + 1$ es múltiplo de d de acuerdo con lo que acabo de admitir, habría que concluir que

$$a \cdot b \cdot c + 1 - a \cdot b \cdot c$$

es también múltiplo de d; o sea, que 1 es múltiplo de d, lo cual es *absurdo*.

Pór tanto, d difiere de a, de b y de c; y, como por hipótesis d es primo, acabo de hallar, pues, un número primo, más que los tres dados previamente en mi caso particular.

Hasta aquí la demostración euclídea. Reflexíonemos un poco sobre ella. Euclides no ignora que la prueba ofrecida se atiene al caso particular de que haya *tres* primos. Sabe, además, cuál es el proceso que impulsa la demostración; proceso que, aunque ilustra un caso particular, se lo presenta como integrado por evidentes etapas sucesivas, que son: 1) hallar el producto de los números primos dados, 2) sumar la unidad al producto anterior, 3) discutir si dicho producto sumado a la unidad es primo o no lo es. Ante el esquema de este proceso, el caso particular considerado oficia, ciertamente, de un *caso cualquiera*, y, por lo que evidencia, sábese que el teorema es verificable en el caso siguiente, en donde se empezaría por los cuatro primos a, b, c y d. Por otra parte, la proposición sería obvia en oportunidad de considerar sólo el primer primo a.

En la demostración de la proposición 20 debe sobreentenderse que se admite la posibilidad de prolongar el proceso hereditariamente, con lo cual quedará entonces probado que *el número de los números primos es infinito*.

Por cierto, una reflexión ad-hoc como la precedente no aparece en forma explícita en el texto euclídeo; pero con todo derecho ha de presumirse que quienes lo leyeran a la luz de una crítica aguda tendrían que finalizar dándose cabal cuenta del mecanismo demostrativo subyacente; mecanismo que se apoya en un tipo de inferencia en muchos puntos *similar* a la que conforma el método de recurrencia.

No es la proposición 20 del libro IX de Euclides la única que se sustenta en ese tipo de inferencia. Numerosas definiciones y varios teoremas de los *Elementos* abonan la conjetura de que el procedimiento de *recurrir al siguiente* era manejado con entera naturalidad y parecía innecesario ponerlo de manifiesto como si no se le otorgase una categoría excepcional, ya que, según vemos, existía un *tácito reconocimiento* del ingrediente hereditario que se consume en el método de inducción.

La proposición 20 antes citada es la más reveladora del ingrediente hereditario que decimos; pero no es la única de los textos euclídeos que nos inclinan a pensar de modo análogo. El mismo principio aflora en Def. V, 17; Teor. V, 22; Teor. VII, 14; Teor. VII, 27; Teor. IX, 12; Teor. IX, 13, donde se lo nota adoptado sin ser proclamado, como si fuese parte natural de una argumentación por antigua nunca cuestionada.

2. 5. La conclusión que debemos extraer de los testimonios invocados en los párrafos 2 · 1 a 2 · 4 es que algunas notas que hoy vemos patentes en el principio de inducción completa provienen de argumentaciones muy antiguas, algunas de las cuales es imposible rastrear hasta los orígenes sin duda remotísimos. Como rasgo común de todas esas argumentaciones exhibimos el ingrediente hereditario que siempre aparece como proceso que agota una totalidad. Así, en el argumento

del tercer hombre, nos conduce a una infinitud de jerarquías; en el postulado de Eudoxo-Arquímedes, nos confirma en un conocimiento de base empírica cuyos primeros enunciados no tienen porqué incluir una infinidad de etapas, pero involucran una herencia inalterable; en el principio de exhaución también se observa una reiteración sin pausa y, en este caso por cierto, indefinidamente; en la proposición 20 de Euclides y en los teoremas similares precitados, es clara la presencia del elemento que se trasmite constantemente igual a través de todas las infinitas etapas del proceso.

No pretendemos afirmar que todos estos ejemplos sean evidencias del principio de inducción completa. En ellos, reiteramos, hallamos atisbos de una actitud del razonamiento; la misma que, pasados los siglos, iría a concretarse en enunciados precisos e inconfundibles. Pero, justamente, por haber existido en diversos tipos de argumentaciones el rasgo que hemos llamado «ingrediente hereditario», el método de la inducción completa ha parecido algo natural y sencillo. Pero apenas se lo problematizó, devino una cuestión ardua y oscura.

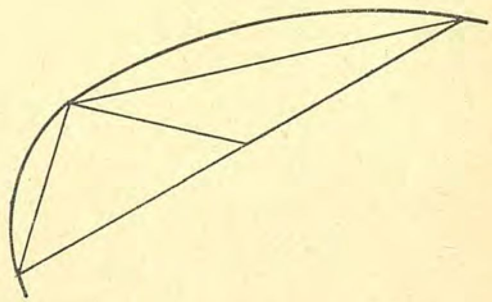
El profesor no debiera problematizarlo, pues, hasta tanto él mismo no lo capte en profundidad. Téngase en cuenta que quienes intentaron fundamentarlo lógicamente fueron mentalidades propensas a reflexionar intensamente sobre los métodos de demostración y de descubrimiento.

DESCUBRIMIENTO DEL PRINCIPIO DE RECURRENCIA ARQUIMEDES Y MAUROLICO

3. 1. En el capítulo II hemos hablado de los testimonios indirectos ofrecidos por Arquímedes de Siracusa (287 a 212 a. C.) respecto del ingrediente hereditario, una de las notas características de la recurrencia. La hemos visto en el postulado de Eudoxo-Arquímedes (2 · 2) y en el principio de exhaución (2 · 3).

Ahora nos toca referir *testimonios directos.*

Arquímedes aplicó muchas veces argumentos donde se manifiesta *indudablemente* el proceso matemático inductivo. El segundo libro de *Sobre el equilibrio de planos* contiene varias instancias de ese proceso con motivo de unas figuras allí calificadas o llamadas «figuras inscriptas en la manera consabida». Detengámonos en este punto por un instante.



Sea un *segmento de parábola*, es decir, la porción de plano limitada por una parábola y una cuerda. Por el punto medio de la cuerda trácese la paralela al eje de la parábola. Desde la intersección de esta paralela con la curva (vértice del segmento), trácense las dos rectas que pasan por los extremos de la cuerda. Quedan así formados: un triángulo inscripto en la parábola y dos nuevos segmentos de parábola. El triángulo, dice Arquímedes, es una figura inscripta en la «manera consabida».

En cada uno de los nuevos segmentos de parábola repítase la operación anterior, y en los segmentos sucesivos procédase de igual modo...

La figura resultante al unir los vértices obtenidos en cada etapa, se denomina figura inscripta en la «manera consabida».

Esto aclarado, la proposición 5 del libro segundo de *Sobre el equilibrio de planos,* expresa:

Si en un segmento parabólico se inscribe una figura en la manera consabida, el centro de gravedad del segmento queda más próximo al vértice del segmento, que el centro de gravedad de la figura inscripta en la manera consabida.

No es necesario transcribir la demostración de Arquímedes sino tan sólo destacar el esquema del razonamiento empleado por él.

En primer lugar, Arquímedes toma un segmento de parábola y *un triángulo* inscripto en la manera consabida. Demuestra aquí que el centro de gravedad del segmento de parábola se halla más cerca del «vértice» que el centro de gravedad del triángulo.

En segundo lugar, Arquímedes considera la figura inscripta *siguiente,* es decir, *un pentágono* inscripto en la manera consabida y, para él, demuestra que el centro de gravedad del segmento de parábola se halla más próximo al «vértice» que el centro de gravedad del pentágono inscripto de la manera consabida.

En tercer lugar, Arquímedes afirma lo siguiente: «Usando este último resultado, y procediendo de la misma forma, podemos demostrar la proposición para *cualquier* figura inscripta de la manera consabida». Con esta afirmación, da por concluida la prueba.

Repasemos nosotros las etapas de la argumentación arquimediana: 1) propone, por definición, una ley de formación de los sucesivos casos de figuras inscriptas de la manera consabida; 2) ofrece una demostración del teorema para un primer caso de dichas figuras; 3) presenta una demostración para la figura siguiente; 4) enuncia una conclusión general acerca de una propiedad que resulta ser hereditaria.

He ahí el esquema de recurrencia, casi a la perfección. Arquímedes lo utiliza con entera naturalidad, sin problematizar etapa alguna, ni aún la última que es esencial. ¿Qué podemos inferir de esto? Que la inducción completa no constituye misterio alguno para el gran siracusano y él no vacila un instante en emplearla como si se tratase de cualquier argumentación *incuestionablemente clara.*

Los professores de matemática secundaria debieran tomar ejemplo de la actitud de Arquímedes, absteniéndose de cuestionar el principio de recurrencia (sea exponiéndolo aparte como postulado, sea deduciéndolo de axiomas de apariencia menos comprometedora) antes de contar con una información histórica adecuada. El alumno de segunda enseñanza carece de perspectiva crítica como para seguir razonamientos sutiles, y, para evitar que se confunda en vericuetos demasiado complicados para su edad y preparación, es aconsejable, en estos particulares, no proponerle prematuramente problemas de fundamentación que no está habilitado para encarar con éxito.

Sin embargo, los profesores deben estar conscientes de las serias implicaciones que la inducción completa ha suscitado, como el *enfoque histórico* de la cuestión permite relevar sin grandes dificultades para el adulto.

Por lo que sabemos hasta el presente, ningún matemático anterior a Arquímedes ha ofrecido ejemplo más cabal del principio de inducción completa, que la demostración de la proposición 5 del segundo libro de *Sobre el equilibrio de planos.* Este testimonio directo nos conduce a la época de oro del período helenístico. Los testimonios indirectos en matemática y en filosofía abonan la conjetura plausible de que las raíces de aquel principio provienen de tiempos mucho más antiguos aún.

¿Que le toca, pues, a Maurolico?

(*Conclui no próximo número*)