Sobre as aplicações de $\mathscr{P}(A)$ em $\mathscr{P}(B)$[1]

por **José Morgado**

Seja $g: B \to A$ uma aplicação de B em A. Se $X \subseteq A$, designa-se por $g^{-1}(X)$ o conjunto dos elementos de B cujas imagens por g são elementos de X, i. e.,

$$a \in g^{-1}(X), \text{ se e só se } g(a) \in X$$

Isto significa que g^{-1} é uma aplicação do conjunto $\mathscr{P}(A)$, formado pelas partes de A, no conjunto $\mathscr{P}(B)$, formado pelas partes de B.

No entanto, dada uma aplicação $f: \mathscr{P}(A) \to \mathscr{P}(B)$, pode acontecer que não exista nenhuma aplicação $g: B \to A$ para a qual se tenha $f = g^{-1}$. Por exemplo, sejam $A = \{a, b\}$ e $B = \{1, 2\}$; se f é uma aplicação de $\mathscr{P}(A)$ em $\mathscr{P}(B)$ tal que $f(A) = \{1\}$ e $f(\{a\}) = \{1, 2\}$, não existe nenhuma aplicação $g: B \to A$ tal que $f = g^{-1}$, visto que, se X e Y são partes de A, então

$$X \subseteq Y \text{ implica } g^{-1}(X) \subseteq g^{-1}(Y)$$

para toda aplicação $g: B \to A$.

Surge naturalmente o problema de caracterizar as aplicações $f: \mathscr{P}(A) \to \mathscr{P}(B)$ para as quais existe alguma aplicação $g: B \to A$ tal que $f = g^{-1}$.

Para que exista uma tal aplicação $g: B \to A$, é evidentemente necessário que f satisfaça às condições:

$$\text{(I)} \qquad f(\bigcap_{i \in I} A_i) = \bigcap_{i \in I} f(A_i),$$

para toda família não vazia $\{A_i\}_{i \in I}$ *de partes de* A;

$$\text{(II)} \qquad f(A - X) = B - f(X),$$

para todo $X \in \mathscr{P}(A)$.

Isto resulta do facto de que, para toda aplicação $g: B \to A$, se tem

$$g^{-1}(\bigcap_{i \in I} A_i) = \bigcap_{i \in I} g^{-1}(A_i)$$

e

$$g^{-1}(A - X) = B - g^{-1}(X),$$

quaisquer que sejam a família não vazia $\{A_i\}_{i \in I}$ de partes de A e a parte X de A.

Vejamos que as condições (I) e (II) são também suficientes.

Em primeiro lugar, observemos que

$$f(\emptyset) = \emptyset \text{ e } f(A) = B.$$

Com efeito, das condições (I) e (II) resulta

$$f(\emptyset) = f(\emptyset \cap (A - \emptyset)) = f(\emptyset) \cap f(A - \emptyset) = \\ = f(\emptyset) \cap (B - f(\emptyset)) = \emptyset$$

e, utilizando novamente a condição (II), obtém-se

$$f(A) = f(A - \emptyset) = B - f(\emptyset) = B.$$

Para estabelecermos a suficiência das condições (I) (II), basta mostrar que para todo $b \in B$ existe um e um só elemento $a \in A$ tal que $b \in f(\{a\})$, porque, pondo então $g(b) = a$, obtém-se uma aplicação $g: B \to A$ tal que $f = g^{-1}$.

Vejamos então que:

[1] Nota de aula.