

$$\begin{aligned}
 n \varepsilon &< \sum_{1 \leq k \leq n} \|\Delta_{yx}^2 z_{0,2k-1}\| + \\
 &+ \sum_{1 \leq k \leq n} \|\Delta_{yx}^2 z_{2k-1,0}\| + \sum_{1 \leq k \leq n} \|\Delta_y z_{0,2k-1}\| + \\
 &+ \sum_{1 \leq k \leq n} \|\Delta_x z_{2k-1,0}\| \leq M + 2N,
 \end{aligned}$$

em virtude das hipóteses do teorema e do lema demonstrado.

Em resumo, ter-se-ia

$$(2) \quad n \varepsilon < M + 2N \quad \text{para todo } n,$$

o que é absurdo.

De modo análogo se conclui que existe

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y)$$

em cada um dos casos II, III e IV.

OBSERVAÇÃO: Se alguns dos pontos tomados  $(x_i, y_i)$  têm a mesma abcissa, tem-se, como  $z_{i+1,i+1} = z_{i,i+1}$ ,

$$\begin{aligned}
 \|z_{i,i} - z_{i,i+1}\| &\leq \|z_{i,i} - z_{i,i+1} - z_{0,i} + \\
 &+ z_{0,i+1}\| + \|z_{0,i} - z_{0,i+1}\| = \|\Delta_{yx}^2 z_{0j}\| + \\
 &+ \|\Delta_y z_{0j}\|
 \end{aligned}$$

e, por consequência, o resultado (2) não é alterado.

Anàlogamente para o caso de alguns dos  $(x_i, y_i)$  terem a mesma ordenada.

## REFERÊNCIAS

- [1] L. SCHWARTZ, «Cours d'Analyse», II.º volume.
- [2] T. H. HILDEBRANDT, «Introduction to the Theory of Integration» (1963), Academic Press.
- [3] J. DIEUDONNÉ, «Foundations of Modern Analysis», (1960), Academic Press.

# Natureza da Investigação Operacional(\*)

por Fernando de Jesus

## 1. Generalidades sobre a natureza da ciência e metodologia

### 1.1. Caracterização da ciência

A extensiva bibliografia referente à definição ou caracterização da ciência é de tal modo vasta e abarca pontos de vista tão diversos e não raras vezes contraditórios, que se torna extremamente difícil apresentar uma definição adequada. Verifica-se, no entanto, que grande parte das dificuldades provém do facto de o significado do termo

«ciência» não ser constante pois tem-se modificado com o decorrer dos séculos e não temos a certeza de que amanhã a designação tenha o mesmo sentido que hoje possui.

Não se podendo pois apresentar uma definição inatacável de ciência, é preferível mencionar algumas das características essenciais do que se designa por ciência.

Num conceito dinâmico, consideraremos a ciência como um processo de investigação, isto é, um processo para: (a) responder a questões, (b) resolver problemas, (c) desenvolver processos mais eficientes para responder a questões e resolver problemas. Posteriormente faremos a distinção entre questões e problemas.

A par da investigação científica é costume

(\*) Palestra proferida no dia 8 de Janeiro de 1966 perante o Grupo de Investigação Operacional do Laboratório Nacional de Engenharia Civil.

porém considerar a investigação não científica, mas a distinção entre estes dois tipos de investigação é extremamente difícil e prende-se de perto com o complexo problema da limitação da ciência. No entanto, é ideia geralmente aceite que, através da investigação científica, o Homem tem mais possibilidades de obter respostas correctas para as questões e melhores soluções para os problemas. Isto não significa que os melhores resultados sejam sempre obtidos através da ciência mas que há mais possibilidades de os alcançar com o emprego de um processo científico de investigação. Esta superioridade da investigação científica deriva do facto de ser controlada. *Um processo é controlado na medida em que é eficientemente dirigido para a obtenção de objectivos desejados.*

O controle da investigação é exercido em vários graus, sendo o controle perfeito um ideal de que nos aproximamos cada vez mais com o avanço da ciência mas que nunca se atinge. Toda a investigação apresenta aspectos controláveis e incontroláveis e por consequência há muitas gradações de investigação além da investigação científica e da não científica.

O controle, embora necessário, não é porém suficiente para distinguir a investigação científica da não científica. A ciência caracteriza-se também pelos objectivos de *autopropetuação* e *auto-aperfeiçoamento*, isto é, propõe-se aumentar sem limites o nosso conhecimento e a nossa eficiência para responder a questões e resolver problemas.

### 1. 2. Experimentação e investigação

Fala-se muitas vezes de experimentação como sinónimo de investigação científica, mas o certo é que nem toda a investigação envolve experimentação. Esta, no sentido que lhe era atribuído no século XIX, incluía a manipulação física de objectos, acontecimentos e suas

propriedades. A manipulação física era considerada idêntica ao controle.

Pode na verdade fazer-se investigação controlada sem recorrer à manipulação física, como acontece, por exemplo, em astronomia. O controle pode obter-se pela manipulação conceptual de representações simbólicas (modelos) dos fenómenos que são objecto da investigação científica.

Ainda que o controle não seja sinónimo de manipulação física, alguns cientistas consideram útil a distinção entre investigações em que o controle se realiza dessa maneira (como num laboratório) e aquelas em que o controle não envolve manipulação física. Reservam a utilização do termo «*experimentação*» para a investigação que inclui manipulação física e o emprego do termo «*investigação*», para englobar a experimentação e qualquer outro tipo de investigação controlada.

Com o desenvolvimento recente das técnicas de *delineamento de experiências*, a manipulação física não é hoje tão necessária para a experimentação como era antigamente; ela pode ser substituída efectivamente por técnicas de classificação e casualização.

### 1. 3. Instrumentos científicos, técnicas e métodos

O progresso científico apresenta um aspecto bidimensional. Por um lado, tem-se alargado constantemente a gama de questões e problemas aos quais a ciência tem sido aplicada; por outro, a ciência tem aumentado continuamente a eficiência com que a investigação pode ser conduzida. Os resultados da investigação científica são pois (1) um corpo organizado de conhecimentos que nos permite controlar melhor o ambiente em que vivemos e (2) um corpo de processos que nos habilita a aumentar o conjunto de conhecimentos.

Ocupar-nos-emos exclusivamente dos processos pelos quais a ciência gera um corpo de conhecimentos — o processo de investigação.

Os processos que caracterizam a ciência são geralmente designados por *instrumentos*, *técnicas* e *métodos*. Embora haja tendência para a utilização indistinta destes termos, eles não possuem o mesmo significado.

Por *instrumento científico* deve entender-se o instrumento físico ou conceptual que é utilizado na investigação científica. Exemplos de tais instrumentos são os símbolos matemáticos, os computadores electrónicos, microscópios, termómetros, tabelas de logaritmos e de números aleatórios, etc..

A *técnica científica* é o modo de utilizar os instrumentos científicos. Por exemplo, os vários tipos de amostragem são técnicas científicas que utilizam uma tabela de números aleatórios, um instrumento científico; a utilização do cálculo diferencial é uma técnica para achar o extremo de uma função.

O *método científico* é o modo pelo qual se seleccionam técnicas na ciência. Enquanto as técnicas utilizadas pelo investigador são resultados das suas decisões, o modo pelo qual essas decisões são tomadas é o resultado das suas *regras de decisão*. Os métodos são regras de escolha; as técnicas são as próprias escolhas. Por exemplo, de um conjunto de modos alternativos de medir uma propriedade (comprimento, dureza, inteligência, etc.), a selecção do processo mais adequado envolve a utilização de um método.

O estudo dos métodos científicos constitui a *metodologia*. O objectivo da metodologia é o aperfeiçoamento dos processos e critérios empregados na investigação científica.

#### 1. 4. Ciência pura e aplicada

A distinção entre ciência pura e aplicada embora seja difícil — se não impossível — ocupa actualmente papel relevante nas discussões sobre ciência.

A investigação pura é frequentemente caracterizada como a que conduz a resultados que não são imediatamente utilizáveis fora do domínio da ciência. Nesta exposição distinguiremos investigação pura de investigação aplicada, baseando-nos na diferença entre procurar «*responder a uma questão*» e «*resolver um problema*».

Entende-se que um indivíduo tem um *problema* se deseja atingir determinado objectivo, possui modos alternativos de o alcançar e ignora qual a melhor alternativa. Assim, para resolver um problema, deve proceder-se a uma investigação a fim de obter elementos que permitam escolher o melhor processo de atingir os objectivos que definem o problema. Na resolução do problema pode-se responder a questões no intuito de melhor prosseguir um conjunto especificado de objectivos. Se o interesse por uma questão não envolve a utilização da resposta na prossecução de um objectivo específico, então não existe um problema.

Quando às questões, no sentido em que foram definidas, se dão respostas por métodos científicos, considera-se que se faz investigação pura. Quando os problemas são resolvidos por investigação científica e algum dos objectivos envolvidos é de natureza não científica, a investigação diz-se aplicada. O que acabámos de dizer não significa que todos os problemas pertençam ao domínio da investigação aplicada. Problemas metodológicos, por exemplo, são do domínio da ciência pura porque os objectivos envolvidos são de natureza científica.

#### 1. 5. As fases da investigação

As fases da investigação científica tradicionalmente apontadas são :

- 1) observação
- 2) generalização
- 3) experimentação

admitindo-se geralmente que estas fases se podem realizar simultaneamente ou por outra ordem.

Estas três fases de um processo de investigação científica são as geralmente aceites pelos cientistas que se dedicam à investigação pura. Do ponto de vista da investigação aplicada, é necessário adoptar uma nova sequência de fases :

- 1) formulação do problema
- 2) construção do modelo
- 3) obtenção de uma solução a partir do modelo
- 4) testar o modelo e a solução dele derivada
- 5) controlar a solução
- 6) pôr a solução em prática.

Muito do que vamos dizer adiante situa-se em torno da discussão de cada uma destas fases da investigação aplicada. Na prática, estas diferentes fases raramente se sucedem na ordem indicada. Muitas podem ser simultâneas e, em numerosos estudos, por exemplo, a fase que consiste em formular o problema só fica completa quando a investigação está virtualmente terminada.

O processo de investigação é usualmente cíclico. Por exemplo, se, ao testar o modelo, se conclui que ele é deficiente, a formulação do problema e a construção do modelo podem ser revistas e modificadas. Por outras palavras, as diferentes fases influenciam-se mutuamente durante o trabalho de investigação.

## 2. Caracterização da investigação operacional

Tendo-se verificado que é impossível dar uma definição precisa do âmbito de qualquer disciplina científica, prefere-se modernamente caracterizar um ramo da ciência indicando a faceta sob a qual encara a unidade e com-

plexidade do real. Dentro desta orientação, vamos caracterizar a investigação operacional<sup>(1)</sup>.

Devemos já sublinhar que a I. O. é o que o seu próprio nome implica: *investigação (aplicada) das operações*.

Outro ponto a relevar é que a I. O. envolve um ponto de vista particular das operações e um tipo especial de investigação aplicada.

Entende-se por *operação* o conjunto de actos requeridos para obter determinado resultado, isto é, uma operação é um complexo de actos inter-relacionados, executados simultaneamente ou em sequência, que conduzem à obtenção de determinados objectivos.

No entanto, frize-se, o objecto de estudo da I. O. não é constituído por *todos* os tipos de operações. Exemplificando: a I. O. não estuda as operações de um indivíduo que trabalha com uma máquina mas sim o *sistema homem-máquina*.

A I. O. ocupa-se dos sistemas formados por duas ou mais partes cujos actos constituem uma operação. Grande número de sistemas que interessam à I. O. envolve comunicação entre algumas das partes e certas conexões. A comunicação e as conexões caracterizam um tipo de sistema a que se dá o nome de *sistema estruturado ou organização*.

Mais rigorosamente, uma organização é um sistema formado por duas ou mais partes cujos actos constituem uma operação e que apresenta quatro características essenciais:

- 1) Alguns dos seus componentes são seres humanos.
- 2) A responsabilidade das escolhas de um conjunto de actos está dividida entre dois ou mais indivíduos e (ou) grupos de indivíduos.
- 3) Os subgrupos funcionalmente distintos são conhecedores das escolhas de cada

(1) Daqui em diante utilizaremos apenas as iniciais I. O. para designar a investigação operacional.

um dos outros por meio de comunicação ou observação.

- 4) Um subgrupo (ou grupo total) de indivíduos no sistema tem função de controle: compara os resultados obtidos com os resultados desejados e faz ajustamentos no sistema por forma a reduzir as diferenças observadas.

Se alguma das condições 2, 3 e 4 não é satisfeita o sistema *não está organizado*. Se qualquer destas condições, embora satisfeita, não o é eficientemente, o sistema diz-se *desorganizado*.

Pode dizer-se que *a classe de fenómenos que são objecto de estudo da I. O. é constituída pelas operações das organizações*, mas, com o objectivo de restringir ainda mais o domínio da I. O., temos de referir os tipos de problemas, envolvendo operações das organizações, que são seu objecto de estudo. Nesse sentido, vamos indicar os quatro tipos de alterações que se verificam numa actividade organizada.

- 1) *Conteúdo da organização*: aumento, diminuição ou modificação das pessoas e (ou) equipamento.
- 2) *Estrutura da organização*: alterações na divisão do trabalho, envolvendo homens e (ou) equipamento.
- 3) *Comunicação*: alterações na geração, recolha, tratamento e transmissão da informação.
- 4) *Controle*: alterações no modo por que os recursos disponíveis são usados.

No estudo das alterações 1), 2) e 3) inter-vêm várias disciplinas tais como a psicologia, a engenharia, a cibernética e a economia.

Embora em certos estudos de I. O. seja necessário determinar quais as modificações a efectuar no conteúdo e estrutura da organização e na comunicação, para atingir determinados fins, é o controle das operações

que constitui o *domínio de aplicação da investigação operacional*.

Uma organização com bom pessoal e equipamento e disposta de estrutura e comunicações eficientes pode, porém, ser ineficiente se não fizer a utilização óptima dos seus recursos (homens, máquinas, matérias e dinheiro), isto é, se as operações da organização não forem controladas eficientemente.

O controle obtém-se mediante a *decisão correcta* dos responsáveis pela direcção das operações. Neste contexto, decidir consiste em escolher e utilizar recursos, edificar uma estrutura, criar um sistema de comunicações e um processo de controle. *Fornecer às autoridades responsáveis pelo controle das operações de uma organização os resultados que sirvam de base a uma decisão correcta, eis pois o importante objectivo da I. O.*

Embora o controle se interesse pelo conteúdo, estrutura e comunicações, estes factores não são objecto de estudo da I. O. mas sim as decisões pelas quais eles são seleccionados, concebidos e utilizados.

### 3. Metodologia da investigação operacional

Como características gerais da metodologia da I. O. apontam-se: o *carácter interdisciplinar*, o *estudo dos sistemas como um todo* e o *recurso ao método científico*.

#### 3.1. Carácter interdisciplinar

A divisão da ciência em disciplinas foi feita pelo Homem, não pela Natureza. Ora os diversos ramos da ciência não podem ser individualizados por uma categoria de fenómenos que constituem o seu objecto de estudo mas distinguem-se, sim, pelos aspectos parcelares sob os quais os encaram. Por exemplo, um acto de comunicação pode apresentar aspec-

tos físicos, químicos, biológicos, psicológicos, sociológicos e económicos.

Na linguagem corrente fala-se de problemas físicos, químicos, médicos, biológicos, sociais, políticos e económicos, como se eles se apresentassem diferenciados na Natureza. Na realidade, trata-se simplesmente de problemas e os adjetivos que os qualificam limitam-se a indicar a disciplina sob cuja faceta são estudados.

Dado um problema, não é geralmente fácil prever qual das disciplinas científicas fornecerá a melhor solução e se é possível obter esta no quadro restrito de uma só disciplina. Por esse facto, esboça-se actualmente a tendência para se encararem os fenómenos na multiplicidade dos seus aspectos. Isto não significa que se deixe de caminhar para a especialização, absolutamente indispensável ao progresso do conhecimento, mas sim que a investigação dos fenómenos reais tende progressivamente a assumir um carácter interdisciplinar. A adopção desta nova atitude científica implica que a investigação dos fenómenos reais tem de ser realizada por equipas de cientistas com diferentes especializações.

Ora uma das características metodológicas importantes da I. O. reside precisamente no seu carácter *interdisciplinar*, dando-lhe a possibilidade de encarar os problemas reais sob a multiplicidade dos seus aspectos.

As equipas de investigação operacional têm assim uma particularidade notável: agregam especialistas de diversas disciplinas que actuam tendo em vista o estudo unificado das operações.

### 3.2. Estudo dos sistemas como um todo

É evidente que a actividade de uma parte qualquer de uma organização influi sobre a actividade de cada uma das suas outras partes. Portanto, quando o investigador opera-

cional se debruça sobre aspectos relativos ao controle de uma organização deve ter em conta todas as interacções significativas existentes no sistema que influenciam o fenómeno sob observação. Por outras palavras, *o estudo do sistema como um todo* envolve a consideração de todos os objectivos relevantes e todas as classes de acções que integram a operação.

Este processo de investigação é diferente do normalmente adoptado no quadro de outras disciplinas, o qual consiste em simplificar um problema muito complexo, isolando-o de certos factores que dificultam o seu tratamento. A I. O. adopta orientação oposta: considera deliberadamente todas as componentes significativas que intervêm na operação, cobrindo toda a área sob controle e não apenas uma parcela.

O estudo do sistema como um todo tem ainda um reflexo importante na I. O.. Esta é fortemente orientada pelos problemas e não pelas técnicas que tem à sua disposição, isto é, a I. O. tem provocado o desenvolvimento de técnicas ajustáveis ao tratamento eficiente dos problemas e não simplificado os problemas para lhes aplicar técnicas disponíveis.

### 3.3. Recurso ao método científico

Sendo a I. O. um tipo de investigação aplicada, é evidente que ela se processará de acordo com as fases já descritas anteriormente:

- 1) formular o problema
- 2) construir o modelo
- 3) obter uma solução a partir do modelo
- 4) testar o modelo e a solução dele derivada
- 5) controlar a solução
- 6) pôr a solução em prática.

Vamos focar, sucintamente, cada uma destas fases do método científico.

Na *formulação do problema* há a distinguir dois aspectos: o problema da entidade que tem de tomar decisões e o problema de investigação pròpriamente dito. Este é uma transformação do primeiro, envolvendo inicialmente a definição de uma base científica para encontrar uma política (sucessão de decisões) como solução.

O problema da entidade que pretende tomar decisões raramente é apresentado com clareza à equipa de I. O. e, portanto, na maior parte dos casos, é esta que tem de observar o sistema considerado, seus fins e as diferentes possibilidades existentes. É necessário também identificar todos os participantes susceptíveis de serem afectados pelas decisões, assim como determinar as operações em que eles intervêm e os seus objectivos.

O problema para a equipa de I. O. consiste depois, fundamentalmente, em determinar a política mais eficiente (*política óptima*) para a entidade que tem de tomar decisões. Consequentemente, a equipa tem de definir a medida ou quantificação da eficiência que vai tomar. Na definição de políticas óptimas assume papel relevante a *teoria da decisão*.

O *modelo* é um esquema simplificado para a interpretação da realidade. Em consequência da complexidade do mundo real, é necessário formular hipóteses simplificadoras que levem à compreensão de um certo fenómeno. A mera acumulação de observações não pode fornecer explicação satisfatória do fenómeno e, portanto, o investigador tem necessidade de sistematizar e racionalizar os factos conhecidos, seleccionando os aspectos mais importantes e desprezando os que considera irrelevantes.

É este processo de abstracção, acompanhado de uma generalização, que conduz à construção do modelo que vai permitir representar, com certo grau de aderência, o fenómeno real.

Os investigadores operacionais constroem e utilizam os chamados *modelos operacionais*

no estudo das operações das organizações. Os modelos podem ser *icónicos*, *analógicos* e *simbólicos*.

Os modelos *icónicos* são representações, geralmente reduzidas, de estados, objectos ou acontecimentos. Estes modelos representam o fenómeno real apenas com uma transformação de escala. Podem considerar-se modelos icónicos, por exemplo, os mapas de estradas, as fotografias aéreas, os diagramas de fluxos que mostram o processamento de material ou informação, etc..

Quando num mapa se pretende mostrar o relevo, não se recorre geralmente a um mapa tridimensional; utilizam-se para esse efeito curvas de nível.

Querendo-se indicar o estado das estradas, podem usar-se cores e uma legenda explicativa. Nestes, como noutros casos, emprega-se uma propriedade para representar outra e o modelo assim construído diz-se *analógico*.

Um sistema eléctrico pode ser representado por um sistema hidráulico onde o fluxo de água representa a corrente eléctrica. A régua de cálculo é também um modelo analógico em que as quantidades são representadas por distâncias proporcionais aos seus logaritmos. Os gráficos em que são representadas certas propriedades, tais como custos, tempo, números de pessoas e percentagens, constituem também exemplos de modelos analógicos.

Os modelos *simbólicos* são aqueles em que as propriedades do fenómeno real são expressas simbólicamente. Como se sabe, a matemática assume papel relevante na construção dos modelos simbólicos que se utilizam em diversas ciências. São os chamados *modelos matemáticos*.

Os modelos icónicos são os mais concretos dos três tipos de modelo mas, em geral, são os mais difíceis de manipular para a determinação do efeito de variações no fenómeno real. Os modelos analógicos são geralmente mais fáceis de manipular e como consequência possuem um carácter mais abstracto. Os

modelos simbólicos são os mais abstractos e gerais e são normalmente os mais fáceis de manipular.

Em I. O. utilizam-se os três tipos de modelos, sendo frequente o emprego de modelos icónicos e analógicos como fase intermédia na construção de modelos simbólicos.

Os modelos matemáticos utilizados em I. O. apresentam-se frequentemente com uma expressão matemática complicada. No entanto, a estrutura de um modelo matemático operacional é relativamente simples. Com efeito, designando  $E$  uma medida de eficiência,  $C_i$  variáveis controláveis ou de acção e  $I_j$  variáveis incontrolláveis,  $E$  é função de  $C_i$  e  $I_j$ , isto é, a forma básica de um modelo matemático operacional é:

$$E = f(C_i, I_j).$$

Em certos casos, é necessário acrescentar a este modelo básico um conjunto de restrições sobre os valores possíveis de  $C_i$ .

Os modelos operacionais são de explicação-previsão não só porque mostram como as coisas se passam, como os diversos factores reagem entre si, como a medida de eficiência varia em função das variáveis de acção, mas também porque não se limitam a verificar o passado, devendo aplicar-se ao futuro para permitirem a tomada de uma decisão.

Os modelos operacionais também se classificam em exactos (ou deterministas) e estocásticos. Um modelo exacto utiliza-se quando o acaso desempenha um papel pouco importante; o modelo estocástico contém explicitamente variáveis aleatórias.

Quanto à forma das relações que os integram, os modelos matemáticos podem ser lineares ou não lineares. No primeiro caso todas as relações são lineares, no segundo pelo menos uma não é linear.

A consideração da variável tempo conduz a uma nova classificação dos modelos em

estáticos e dinâmicos. O modelo é estático quando todas as variáveis que nele intervêm se referem ao mesmo instante  $t$ ; é dinâmico quando as relações compreendem variáveis desfasadas.

A gama diversíssima de modelos matemáticos de que dispõe a investigação operacional é constituída fundamentalmente pelos modelos aplicáveis ao estudo dos problemas básicos que se põem à entidade controladora das operações de uma organização e que serão descritos sucintamente no n.º 5: existências, repartição, filas de espera, ordenação, substituição, concorrência e pesquisa.

Construído o modelo que representa a operação, segue-se a terceira fase do processo de investigação: *obtenção de uma solução a partir do modelo.*

Sendo

$$E = f(C_i, I_j)$$

o modelo matemático que representa a operação, põe-se o problema de obter os valores de  $C_i$  que optimizam  $E$ . A solução aparece na forma

$$C_1 = f_1(I_j)$$

$$C_2 = f_2(I_j)$$

$f_1, f_2 \dots$  são as chamadas *regras de decisão*.

Existem dois processos principais para derivar uma solução óptima (ou vizinha da solução óptima): o processo *analítico* e o processo *numérico*.

O processo analítico consiste na obtenção da solução por via dedutiva, utilizando diversos ramos da análise matemática e da álgebra. O processo numérico consiste na utilização de técnicas que permitem obter indutivamente a solução, quer ensaiando diversos valores nas variáveis de acção quer adoptando processos iterativos.

Entre os processos de análise numérica assume posição relevante a *simulação* que

abrange um conjunto de técnicas, utilizáveis sobretudo quando há dificuldades para formular o modelo, obter soluções a partir do modelo ou testar o modelo e a solução dele derivada.

Na quarta fase do processo de investigação põe-se o problema de *testar o modelo e a solução dele derivada*.

Dado que o modelo é uma representação simplificada da operação, ele será bom se possui suficiente aderência à realidade, isto é, se apesar do seu carácter incompleto, serve para explicar a realidade, fazer previsões e tomar decisões com certo grau de precisão. Utilizam-se largamente em I. O. técnicas estatísticas para testar os modelos e as suas soluções.

Na fase de *controle da solução de um modelo*, há que atender ao facto de ela só permanecer como solução quando as variáveis incontrolláveis mantêm os seus valores e não há modificações das relações entre as variáveis. Para controlar uma solução é necessário (a) definir para cada variável e relação uma variação significativa, (b) construir um processo para detectar a ocorrência de tais variações significativas e (c) especificar como deve ser modificada a solução se ocorrem tais variações.

Um dos problemas mais delicados que finalmente se põe à equipa de I. O. é o de conseguir *pôr a solução em prática*.

As soluções são geralmente executadas por pessoal cujos conhecimentos matemáticos são muito reduzidos e, por consequência, se a equipa de investigação operacional quer assegurar o cumprimento das suas recomendações deve apresentar as soluções em termos muito simples.

Como já dissemos, na prática, estas diferentes fases de investigação raramente se sucedem na ordem indicada. Muitas podem ser simultâneas e em numerosos estudos, por exemplo, a fase que consiste em enunciar o problema só fica terminada quando o pró-

prio estudo está virtualmente terminado. Normalmente as diferentes fases influenciam-se mutuamente durante o trabalho de investigação.

#### 4. Breve história da investigação operacional

##### 4.1. Período anterior à II Grande Guerra

Embora o termo «*investigação operacional*» seja relativamente recente, a utilização de métodos científicos na preparação das decisões que competem a uma autoridade executiva remonta a datas longínquas. Recordemos que já no século III A. C., Hierão, tirano de Siracusa, pedia ao sábio Arquimedes que indicasse a mais eficiente utilização das armas da época a fim de romper o cerco imposto pela frota romana.

Mais perto de nós, PASCAL, FERMAT e sobretudo JACQUES BERNOULLI são os percursores da teoria da decisão, criando um novo ramo da matemática — o cálculo das probabilidades — cujo desenvolvimento teve grande influência nos progressos recentes da I. O..

Em 1885, surgem os trabalhos pioneiros de TAYLOR sobre a organização científica do trabalho; em 1917, aparecem as contribuições de ERLANG sobre as comunicações telefónicas e, em 1930, LEVINSON aplica os métodos científicos a problemas de mercado.

No domínio das aplicações militares, devem referir-se os trabalhos importantes de LANCHESTER (1916), que traduziu em fórmulas matemáticas algumas complexas estratégias militares, e as contribuições de EDISON sobre as técnicas a serem adoptadas pelos navios mercantes para se defenderem dos submarinos.

#### 4. 2. Período 1939-45

Foi no entanto durante a Segunda Guerra Mundial que a I. O., já assim designada, recebeu um impulso extraordinário.

Desde 1939 que um pequeno grupo de técnicos dedicados à I. O. trabalhou, em Inglaterra, na crítica dos métodos de emprego dos primeiros radares. E, nas horas cruciais de 1940, o Estado Maior inglês recorreu a uma equipa de investigadores — o grupo Blackett — para conseguir o aproveitamento óptimo do sistema defensivo britânico. Citam-se como resultados notáveis obtidos por estes cientistas, os seguintes: duplicação da eficiência dos ataques aéreos aos submersíveis, nova disposição dos combóios de navios por forma a minimizar as perdas, organização dos bombardeamentos aéreos sobre a Alemanha, etc..

Paralelamente, nos E. U. A., desde a sua entrada na guerra, grupos de I. O. foram incubidos pelo exército, marinha e força aérea de estudarem cientificamente cada uma destas armas. Métodos e formação de ataque dos submersíveis inimigos, técnicas de bombardeamento aéreo por esquadrilhas, meios de defesa contra os ataques aéreos dos japoneses, eis alguns dos assuntos estudados, tendo-se obtido uma sensível melhoria dos resultados e uma diminuição importante das perdas inevitáveis.

#### 4. 3. Período do após-guerra

No fim da guerra, os grupos de I. O. gozavam de merecido prestígio. Tinha ficado demonstrado, durante as hostilidades, que as equipas constituídas por especialistas das mais diversas disciplinas eram capazes de resolver complexos problemas, envolvendo muitas variáveis, e os métodos que tinham permitido obter uma maior eficiência das armas e uma valiosa economia em vidas humanas e material, eram susceptíveis de ser

aplicados, em tempo de paz, na obtenção de uma maior eficiência económica.

Terminado o conflito, numerosas empresas progressistas aplicaram nas suas organizações os métodos da I. O. que a tão bons resultados tinham conduzido no período das hostilidades. Na Inglaterra, por exemplo, as primeiras organizações a introduzirem a I. O. nos seus serviços foram a «British Transport Commission», o «National Coal Board», «Courtaulds, Ltd». e a «British Iron and Steel Federation». Também nos E. U. A., na França e, pouco a pouco, em todos os países abertos ao progresso científico, os meios industriais, comerciais e o próprio sector público foram-se interessando pela I. O..

Nos Estados Unidos, onde existiam já, antes de 1941, numerosos gabinetes ou empresas de organização científica, a introdução da I. O. nos meios de negócios foi rápida e pode dizer-se que, embora existam nesse país milhares de especialistas, eles não chegam actualmente para satisfazer a procura das empresas.

Em França, a adopção da I. O. começou a ser feita pelas grandes empresas nacionalizadas (S. N. C. F., E. D. F., etc.) e rapidamente se difundiu. Existem também, neste país, alguns grupos de consultores que se dedicam ao estudo científico dos problemas postos pela indústria e as maiores empresas dispõem das suas próprias equipas de I. O.

Nos países socialistas, a I. O. encontra-se também muito difundida. Na U. R. S. S., por exemplo, a I. O. é largamente utilizada no planeamento económico.

O desenvolvimento progressivo das aplicações da I. O. nos diversos sectores da actividade económica é, ao mesmo tempo, causa e efeito do número crescente de livros e revistas especializadas que se publicam hoje em todo o mundo. Simultaneamente, têm-se fundado numerosas sociedades científicas que agrupam os técnicos e as empresas interessadas na I. O. Entre as mais importantes

citam-se: *Operational Research Society* (Inglaterra), fundada em 1948, que publica desde 1950 a revista *Operational Research Quarterly*; a *Operations Research Society of America*, fundada em 1952, publicando o *Journal of the O. R. S. A.*; em França, a *Société Française de Recherche Opérationnelle*,<sup>(1)</sup> criada em 1956, edita a *Revue Française de Recherche Opérationnelle*.

Em 1 de Janeiro de 1959, fundou-se a *Federação Internacional das Sociedades de Investigação Operacional* que agrupa, actualmente, as sociedades da Alemanha, Argentina, Austrália, Bélgica, Canadá, Dinamarca, Espanha, França, Holanda, Índia, Inglaterra, Itália, Japão, Noruega, Suécia e Suíça. A federação começou a publicar, em 1962, a revista bibliográfica *International Abstracts in Operations Research* que regista as publicações de livros e artigos que dizem respeito à I. O. ou disciplinas afins.

## 5. Descrição sumária da forma e conteúdo dos problemas que se apresentam à investigação operacional

### 5.1. Generalidades

Embora não exista uma classificação única dos tipos de problemas que podem ser resolvidos por meio da I. O., veremos que há certas formas básicas que se encontram nas mais diversas situações reais.

Consideraremos a seguir sete formas básicas que, isoladamente ou em combinação, abrangem a maior parte dos problemas que se põem à entidade executiva de uma orga-

nização. A classificação adoptada é a seguinte:

1. Existências
2. Repartição
3. Filas de espera
4. Ordenação
5. Substituição
6. Concorrência
7. Pesquisa.

Relativamente a cada uma destas sete formas, faremos algumas observações sobre o modo de tratar esses problemas, sem no entanto entrarmos em detalhes técnicos.

Finalmente, agrupando os problemas em termos do seu conteúdo, daremos uma ideia da gama de situações concretas a que a I. O. tem sido aplicada.

### 5.2. Formas de problemas

#### 5.2.1. Problemas de existências

Existências são recursos provisoriamente inactivos. Homens, material, máquinas e dinheiro são os principais recursos de que dispõem as autoridades executivas.

Para existir um problema de existências deve haver dois tipos de custos associados com os recursos inactivos: (1) um custo que cresce com o aumento das existências e (2) um custo que decresce com esse aumento.

Um custo crescente é, sem dúvida, o custo corrente das existências que inclui custos de armazenagem, custos de obsolescência e deterioração, impostos, seguros, etc.. Há custos que decrescem quando aumentam as existências como, por exemplo, os custos de rotação, que estão associados com a impossibilidade de satisfazer a procura ou com as demoras em a satisfazer.

Pode definir-se um problema de existências como aquele em que está envolvido pelo menos um custo de cada tipo e onde a soma

(1) Esta Sociedade juntou-se recentemente à «Association Française de Calcul et Traitement de l'Information» e passaram a constituir a «Association Française d'Informatique et de Recherche Opérationnelle».

desses custos é influenciada ou pela procura de artigos, ou pela frequência de reaprovisionamento, ou ainda por ambas. A questão consiste em seleccionar a quantidade ou frequência de reaprovisionamento, ou ambas, por forma a minimizar a soma dos custos relevantes.

Os problemas de existências aparecem nos mais variados contextos e existem técnicas matemáticas muito desenvolvidas para o seu tratamento. O cálculo infinitesimal, o cálculo das probabilidades e a álgebra linear estão na base dessas técnicas. Em casos mais complicados, quando é possível construir o modelo mas é difícil obter a solução, utilizam-se técnicas de simulação que, em geral, envolvem o emprego de um computador electrónico.

### 5.2.2. Problemas de repartição

Estes problemas agrupam-se em *três categorias* principais. Um problema de repartição da *primeira categoria* define-se pelas seguintes condições:

1. Há um conjunto de tarefas (de qualquer tipo) a cumprir.
2. Há recursos disponíveis suficientes para cumprir todas as tarefas.
3. Pelo menos uma das tarefas pode ser cumprida de diferentes maneiras, utilizando combinações e quantidades diferentes de recursos.
4. Algumas das maneiras de executar as tarefas são melhores do que outras (por exemplo, mais baratas ou mais lucrativas).
5. Não há recursos disponíveis suficientes para fazer cada uma das tarefas da melhor maneira possível.

O problema consiste em repartir os recursos pelas tarefas por forma a maximizar a

eficiência total; por exemplo, minimizar o custo total ou maximizar o lucro total.

No problema de repartição mais simples, pertencente a esta categoria, cada tarefa requer um e um só recurso e há o mesmo número de tarefas e recursos. É o chamado *problema de afectação* porque envolve a afectação de um recurso a cada tarefa.

Suponha-se, por exemplo, que numa empresa há  $n$  lugares vagos  $J_1, \dots, J_n$  e  $n$  candidatos  $I_1, \dots, I_n$ . Admitindo que, por meio de um teste, é possível obter quantitativamente a eficiência  $a_{ij}$  do indivíduo  $I_i$  para o lugar  $J_j$ , pretende-se afectar os indivíduos às tarefas por forma a maximizar a eficiência total. Representando por  $x_{ij}$  uma variável que toma o valor 1 ou 0, consoante o indivíduo  $I_i$  é afectado ou não à tarefa  $J_j$ , o problema traduz-se matematicamente do seguinte modo:

maximizar

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_{ij}$$

com as restrições

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} = 1 \quad (j = 1, \dots, n)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1 \quad (i = 1, \dots, n)$$

$$x_{ij}^2 = x_{ij}$$

Quando algumas das tarefas requerem mais do que um recurso e se os recursos podem ser utilizados para mais de uma tarefa, o problema de repartição complica-se. Um dos problemas mais frequentes nesta categoria é o *problema do transporte*. Considere-se, por exemplo, um certo produto  $P$  que é produzido em cada uma das  $m$  fábricas  $F_1, \dots, F_m$  e seja  $a_i$  a produção anual de  $F_i$ . Su-

ponha-se também que o produto  $P$  é procurado em cada um dos  $n$  mercados  $M_1, \dots, M_n$ , sendo  $b_j$  a procura anual em  $M_j$ . Pretende-se determinar a repartição óptima dos «recursos»  $a_1, a_2, \dots, a_m$  pelas «tarefas»  $b_1, b_2, \dots, b_n$  por forma a minimizar o custo total de transporte. Designando por  $x_{ij}$  a quantidade de  $P$  transportada de  $F_i$  para  $M_j$  e por  $c_{ij}$  o correspondente custo unitário de transporte, o problema do transporte traduz-se matematicamente do seguinte modo:

minimizar

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$$

com as restrições

$$\sum_j x_{ij} = a_i \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

$$\sum_i x_{ij} = b_j \quad (j = 1, 2, \dots, n).$$

A *segunda categoria* de problemas de repartição abrange os que compreendem mais tarefas a cumprir do que os recursos disponíveis consentem. Assim, tem de se proceder a uma selecção das tarefas e à determinação da forma como devem ser executadas. Este problema é frequente, por exemplo, nas refinarias de petróleo. Dada a procura para uma gama variada de produtos (que não podem ser todos produzidos ao mesmo tempo) e os seus preços de venda, determinar a combinação de produtos que deverão ser fabricados e as respectivas quantidades por forma a maximizar o lucro.

A *terceira categoria* de problemas de repartição engloba aqueles em que é possível controlar a quantidade de recursos e, assim, determinar que recursos deverão ser acrescentados, onde ou que recursos deverão ser dispensados. Por exemplo, a necessidade de localizar uma nova fábrica ou armazém cria

um problema deste tipo. De um grupo de fábricas, determinar as que devem fechar em períodos de contracção da procura. Dentro de uma fábrica, o problema pode surgir quando se trata de determinar que tipos de máquinas se devem introduzir ou retirar da linha de produção.

A maior parte das técnicas matemáticas utilizadas no tratamento de problemas de repartição agrupa-se na teoria da *programação matemática* — linear, não linear, estocástica, paramétrica e dinâmica — cujo desenvolvimento é recente.

### 5. 2. 3. Problemas de filas de espera

Um dos problemas de filas de espera estudado pelas equipas de I. O. durante a Segunda Guerra Mundial foi o da aterragem de aviões de bombardeamento regressados à base depois de um *raid*. Quando os aviões, em grande número, regressavam das missões efectuadas, chegavam à base, simultaneamente, com escassas reservas de combustível e alguns com avarias importantes. A necessidade urgente de todos aterrarem provocava problemas de congestionamento e obrigava os serviços de terra a acelerar o ritmo das aterragens, procurando desimpedir as pistas num tempo mínimo.

Em tempo de paz, também surgem problemas idênticos a todo o momento: nos correios, nos bancos, nos restaurantes, no trânsito, etc.

Em geral, uma *fila de espera* (ou *bicha*) aparece sempre que a procura de um serviço, por uma série de unidades (pessoas, máquinas, etc.), é superior às possibilidades de o satisfazer, sendo necessário diferir os serviços por um sistema de filas ou de ordenação entre essas unidades.

Em todo o problema de filas de espera há a considerar a *entrada*, que é a forma (aleatória, periódica, etc.) como chegam as unidades ao *local de serviço*, a *disciplina* ou

regra segundo a qual se ordenam as unidades para aguardar a prestação do serviço, o mecanismo do serviço ou a maneira deste se realizar e a saída ou forma como as unidades abandonam o local de serviço.

No domínio da economia da empresa os problemas de espera são frequentes. Exemplifiquemos: Considere-se um conjunto de máquinas numa unidade industrial e admitamos que, de tempos a tempos, uma máquina requer reparação. Supondo aleatórios o tempo de funcionamento normal de uma máquina e o tempo de reparação, põe-se o problema de estudar o número de máquinas na fila para reparação, de forma a ver-se qual é o número mínimo de operários necessários, a fim de que as filas de espera sejam mínimas e também o número de operários inactivos.

A teoria matemática das filas de espera está muito desenvolvida, fazendo larga utilização do cálculo das probabilidades, de equações diferenciais, integrais e equações de diferenças. Em certos problemas mais complicados há necessidade de recorrer a técnicas de simulação.

#### 5. 2. 4. Problemas de ordenação

Nos problemas de espera, a ordem segundo a qual as unidades são seleccionadas para serem servidas supõe-se definida. Nos problemas de ordenação pretende-se seleccionar uma disciplina da fila por forma a minimizar uma medida apropriada da operação.

Considere-se o seguinte exemplo de problema de ordenação: Suponhamos que há dois produtos *A* e *B* a fabricar, que cada um requer operações em duas máquinas, 1 e 2, e para ambos os produtos as operações na máquina 1 devem preceder as da máquina 2. Admitamos ainda que *A* requer duas horas na máquina 1 e dez horas na máquina 2, e que *B* necessita de seis e quatro horas, respectivamente. Cada possibilidade pode

determinar-se por meio de um gráfico de GANTT:

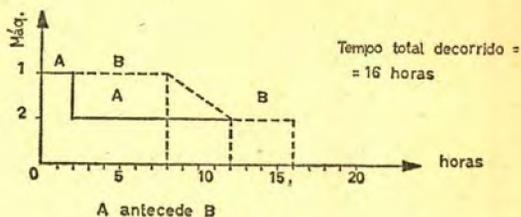


Fig. 1

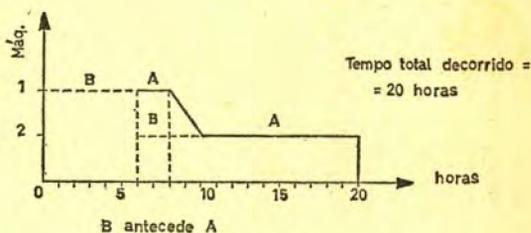


Fig. 2

É claro que a comparação das duas sucessões (*AB* e *BA*) mostra que há uma diferença de quatro horas no tempo total decorrido na operação. Neste caso deve optar-se, evidentemente, pela ordenação *AB*.

Infelizmente, na maior parte dos problemas de ordenação é difícil achar a solução ótima e só os mais simples se podem resolver pela análise matemática. Em quase todos os problemas reais é necessário proceder a uma simulação, e mesmo assim a quantidade de trabalho é muitas vezes proibitiva e somente é possível obter soluções aproximadas.

Uma variante notável dos problemas de ordenação é constituída pelos *problemas de escolha do itinerário*.

Suponhamos que um caixeiro viajante tem um certo número de cidades a visitar, conhece a distância (ou tempo, ou custo) da deslocação entre qualquer par de cidades. O problema consiste em escolher um percurso que começa na cidade onde habita, passe uma só

vez por cada uma das cidades a visitar e termine no ponto de partida, por forma a minimizar a distância (ou tempo ou custo).

Com duas cidades não há escolha a fazer. Com três, uma das quais a cidade onde reside (A), há dois itinerários possíveis (ABC e ACB). Para quatro cidades há seis percursos possíveis. Mas para onze cidades há aproximadamente 3 700 000 itinerários possíveis.

Um problema de escolha do itinerário, exemplificado acima pelo chamado «problema do caixeiro viajante», pode aparecer em contextos muito diferentes.

Técnicas recentes permitem abordar também uma variante de problema de ordenação que consiste em realizar nas melhores condições possíveis um conjunto de operações ordenáveis. Por vezes trata-se da minimização do prazo de execução do conjunto das operações; por vezes trata-se da minimização dos custos das operações.

Essas técnicas são designadas pelas iniciais P. E. R. T. (*Program Evaluation and Review Technique*) e constituem um modelo em que se associam a teoria dos gráficos e a teoria das probabilidades.

O P. E. R. T. aplica-se, por exemplo, aos seguintes problemas de ordenação: todos os tipos de construção e manutenção, planeamento do orçamento e lançamento de novos produtos.

### 5. 2. 5. Problemas de substituição

Os problemas de substituição são de dois tipos: os que envolvem artigos que se deterioram gradualmente com o tempo e os que se referem a artigos cuja eficiência desaparece completamente depois de um certo período de uso. Entre os artigos que se deterioram gradualmente com o tempo figuram as máquinas, vagões, barcos, etc.. A sua eficiência vai decrescendo com o tempo e pode ser levada ao nível inicial por meio de

certa actuação. Entre os artigos que praticamente mantêm o seu nível de eficiência durante um certo tempo e depois se inutilizam completamente figuram os que, em geral, são pequenos e baratos: lâmpadas eléctricas, molas de automóveis, etc.

Em relação aos bens que se deterioram gradualmente, é evidente que, sem uma conservação preventiva ou correctiva, a diminuição da sua eficiência traduz-se geralmente numa utilização a custos crescentes. Para manter a sua eficiência há que proceder à conservação, que também envolve um custo. Além disso, certos bens tornam-se obsoletos. Assim, quanto mais longa é a vida do equipamento maior é o custo de conservação ou maiores são as perdas devidas ao decrescimento da eficiência absoluta e relativa.

Por outro lado, a substituição frequente do equipamento envolve custos de investimento crescentes. O problema consiste, pois, em determinar quando se deve proceder à substituição por forma a minimizar a soma dos custos de conservação e investimento.

Os modelos matemáticos para resolver problemas deste tipo são, na maior parte dos casos, simples. Presentemente a programação dinâmica é uma técnica muito aplicada.

Para os artigos que mantêm o seu nível de eficiência durante um certo tempo e depois se inutilizam completamente, o problema consiste geralmente em optar por uma substituição de grupo, por uma substituição individual ou por uma substituição mista.

Há duas políticas extremas: substituir os artigos somente quando se inutilizam e substituir todos os artigos antes que qualquer deles se inutilize. No primeiro caso, há a vantagem de minimizar o número de artigos necessários para a substituição mas, como as inutilizações são relativamente frequentes, os custos associados às substituições são elevados. No segundo caso, o número de artigos necessários não é minimizado mas os custos de substituição são mais baixos.

O problema deve resolver-se escolhendo uma política que minimize a soma dos custos dos artigos, inutilizações e operações de substituição.

A análise matemática e processos de simulação figuram entre as técnicas utilizadas na resolução destes problemas.

### 5. 2. 6. Problemas de concorrência

Um importante elemento que surge, tanto nos problemas económicos como nas questões militares de tática e estratégia, é a concorrência. Muitas vezes a decisão tomada por um indivíduo é afectada pelas decisões tomadas por um ou mais indivíduos. Essas decisões interdependentes podem ser cooperativas ou concorrentes; são as últimas que se encontram mais estudadas.

Procuremos um exemplo:

Suponhamos que existem duas empresas  $A$  e  $B$  que partilham um determinado mercado e que têm de tomar em cada trimestre — portanto um grande número de vezes — uma decisão quanto ao emprego dos seus orçamentos de publicidade. Por hipótese, admitiremos que a publicidade faz deslocar os lucros de uma empresa para a outra por forma que o ganho de uma é a perda da outra. Considere-se ainda que existem duas estratégias extremas para cada empresa: a primeira estratégia consiste em despendar totalmente o orçamento em publicidade nos jornais; a segunda em gastar totalmente o orçamento em cartazes. Cada empresa toma a sua decisão antes de conhecer a da outra e portanto são possíveis quatro eventualidades.

O comportamento das empresas será o seguinte: a empresa  $A$  procurará adoptar a estratégia que torne o seu lucro máximo, enquanto que a empresa  $B$  vai tentar tornar mínimo o lucro de  $A$ . Estamos assim perante um caso típico de estratégias concorrentes.

A teoria dos jogos permite formular a maior

parte dos problemas de concorrência mas só possibilita a obtenção de soluções nos casos mais simples. Grande parte das situações reais tem de utilizar um tipo de simulação a que se dá o nome de *jogo*.

O jogo militar, por exemplo, tem uma longa história e tem sido uma maneira de treinar os homens para o combate (concorrência). No entanto, só recentemente é que essas técnicas foram aplicadas a problemas industriais e governamentais (por exemplo, em diplomacia).

Num jogo, o contexto da situação da concorrência é simulado mas os agentes que tomam as decisões são reais.

A teoria dos jogos tem sido aplicada na indústria, por exemplo, para o estudo da política de preços, estratégias de publicidade, introdução de novos produtos no mercado, etc..

### 5. 2. 7. Problemas de pesquisa

Considere-se o problema de detectar submarinos na rota de um barco ou comboio durante tempo de guerra. Utilizaram-se para esse efeito dirigíveis e pequenos balões que se deslocavam lentamente sobre a água, a baixa altitude, o que lhes dava grande probabilidade de detectar os submarinos. Porém, como estes engenhos se moviam lentamente, não tinham possibilidades de cobrir uma área vasta e portanto podiam escapar-lhes alguns. Se fosse utilizado para o mesmo efeito um avião rápido, é evidente que a área sob observação poderia ser aumentada mas diminuiria a precisão das observações, em consequência da velocidade do aparelho e do seu voo a maior altitude. Neste caso, o aumento de área observada não compensava o acréscimo dos erros de observação.

Numa questão deste tipo há duas espécies de erros que se podem cometer: erros devidos à inadequada área de observação (erros

de amostragem) e erros de observação. Há, evidentemente, custos associados a ambos os tipos de erros e à obtenção de informações.

Dispondo-se de uma quantidade fixa de recursos (tempo, dinheiro ou investigadores) deve tomar-se uma decisão sobre a grandeza e composição da amostragem. A selecção de uma grandeza e composição de amostragem apropriadas, com recursos fixos, é o problema de pesquisa com restrições. No problema sem restrições deve também determinar-se os recursos a utilizar no processo. Quanto mais recursos se empregam maior é o custo da pesquisa mas menor é o custo esperado do erro.

É fácil reconhecer que o exame de contas por sondagem é um processo de pesquisa e dá origem a problemas do tipo que descrevemos acima. Muitos processos contabilísticos podem interpretar-se como pesquisas. Mais geralmente, todos os processos de estimação e previsão são problemas de pesquisa.

Diversos investigadores operacionais têm aplicado a teoria da pesquisa a problemas de exploração de recursos naturais com o objectivo de determinarem áreas de exploração e como explorá-las. Esses processos foram, por exemplo, aplicados à pesquisa de níquel e carvão.

As técnicas aplicáveis à resolução destes problemas assentam na teoria da amostragem, da estimação e na teoria psicológica da percepção.

### 5. 2. 8. Problemas mistos

É necessário pôr em evidência que nem todos os problemas que são objecto de estudo da I. O. pertencem a *um* dos sete tipos acima estudados. Com efeito, em grande número de casos, os problemas abrangem vários aspectos que cabem dentro das diversas categorias analisadas. Embora se possa decompor o seu estudo, a própria metodologia da I. O. obriga

a uma análise global que permita descobrir as inter-relações existentes no fenómeno.

Também é importante para o investigador saber que há problemas que não cabem dentro de nenhuma destas categorias e que portanto permitem abrir novas vias de investigação.

## 5. 3. Conteúdo dos problemas

### 5 3.1. Compras

A I. O. tem sido utilizada para determinar as políticas de compra de matérias primas cujos preços são estáveis ou variáveis. As soluções deste tipo de problemas indicam quanto se deve comprar, quando e onde.

A I. O. tem sido empregada também para formular estratégias de exploração de depósitos naturais de matérias primas e preparar planos para a exploração de tais recursos, depois de localizados; utiliza-se igualmente na compra de bens de equipamento no sentido de seleccionar o tipo de equipamento, determinar quando deve ser comprado ou alugado, se é preferível ser usado ou novo, etc..

### 5. 3. 2. Produção

No que se refere a problemas de produção, a I. O. tem sido aplicada em diversos domínios: no planeamento e localização de fábricas e determinação da medida em que devem ser automatizadas; estudo das fontes de energia para um complexo de fábricas, determinação das espécies de energia e quantidades óptimas a fornecer; determinação de quais as fábricas de um complexo industrial que devem ser fechadas, sob que condições e em que ordem.

A I. O. tem sido largamente utilizada no delineamento de políticas de produção (quantidades, processos, tipos de produtos, etc.), de sistemas de controle de qualidade, de con-

servação preventiva e correctiva, assim como em diversos estudos referentes à estabilização da produção e do nível do emprego.

### 5. 3. 3. Comercialização

A I. O. tem sido aplicada vantajosamente na localização de pontos de distribuição, seu dimensionamento, quais as quantidades que devem ter em depósito e os clientes que devem servir; na determinação da amplitude de um orçamento de vendas e na repartição das suas rubricas pelas vendas directas, promoção de vendas e publicidade; na determinação do número de vendedores de uma empresa, do número e qualidade dos clientes que lhes devem ser affectados, da frequência com que devem visitar cada cliente e que tempo deve ser gasto na prospecção de clientes; na determinação dos tipos de produtos que os consumidores necessitam e das variedades de tamanhos, modelos, cores, etc., preferidos; na adaptação dos modelos, embalagens, etc. Tem-se utilizado também a I. O. para determinar se os serviços de assistência referentes a determinado artigo devem ficar a cargo da fábrica ou de outros indivíduos, que tipo de garantia e durante quanto tempo deve ser oferecida; e ainda na localização de retalhistas, repartição do seu espaço interno pelo armazém e vendas, determinação dos casos em que devem ser dirigidos pela fábrica ou por outros indivíduos, etc.

### 5. 3. 4. Investigação e desenvolvimento

A I. O. foi aplicada recentemente na determinação do orçamento para investigação e desenvolvimento e na averiguação de como deve ser dividido entre a investigação fundamental e aplicada. Tem sido também utilizada na determinação do número de investigadores, áreas de investigação e sua organização.

### 5. 3. 5. Sequência e localização de pontos de estrangulamento

Dado que em muitas operações complexas a tarefa total se decompõe num grande número de actividades, acontece que algumas delas têm de esperar que outras se completem para poderem então começar, verificando-se que surgem também actividades que são paralelas.

Estabelecidas as ligações e dependências entre as actividades, é possível determinar o *caminho crítico*, isto é, a sucessão de actividades de que vai depender o tempo de realização do projecto. Deslocando recursos pode-se minimizar esse tempo utilizando os métodos do P. E. R. T. que constitui, actualmente, um dos modelos matemáticos mais aplicados na I. O.

### 5. 3. 6. Pessoal

A I. O. tem sido usada não só na determinação óptima da composição de idades e especializações dos operários, no estudo das causas de acidentes e modos de os evitar, causas de absentismo, etc., mas também no recrutamento do pessoal, sua distribuição pelas tarefas e na medição da sua eficiência.

### 5. 3. 7. Finanças e contabilidade

Neste domínio, a I. O. tem sido aplicada no delineamento de processos de contabilidade e exame de contas que minimizem a soma dos custos dos processos e dos erros; na processação automática de dados; no controle da contabilidade manual, e, em geral, no controle das operações de escritórios; no estudo da política de crédito para uma empresa e dos processos para estimar os riscos do crédito.

A I. O. é usada também na determinação das necessidades de capital a longo prazo e

no estudo da composição das carteiras de títulos.

\*  
\*   \*  
\*

É fácil concluir da precedente enumeração de problemas que a maior parte deles tem sido estudada, desde há muitos anos, sem o recurso à I. O. Este facto vem sublinhar um importante aspecto que, aliás, já aflorámos: a I. O. *não* se distingue pela natureza dos problemas que investiga mas sim *como* os aborda.

A aproximação interdisciplinar, a análise dos sistemas como um todo e a adopção do método científico são os traços fundamentais que têm garantido à I. O. a resolução eficiente dos problemas reais.

## 6. Relação entre a investigação operacional e outras ciências da direcção

### 6.1. Generalidades

Estudada a natureza da I. O. e descritos sucintamente os problemas que constituem o seu objecto de estudo, vamos ver agora quais são as relações existentes entre a I. O. e outras ciências da direcção.

Antes, porém, sublinhemos mais uma vez que as três características metodológicas fundamentais da investigação operacional são: o carácter interdisciplinar, o estudo dos sistemas como um todo e a adopção do método científico. Este simples conhecimento permitirá distinguir a I. O. de outras ciências da direcção; no entanto, deve frizar-se que, em certos casos, aquelas três características não consentem uma delimitação nítida entre as diversas disciplinas.

Para definirmos as tarefas da direcção, retomemos o conceito de sistema estruturado ou organização, que apresentámos no n.º 2.

Resumidamente, podemos dizer que uma organização é um sistema formado por duas ou mais partes cujos actos constituem uma operação e que apresenta quatro características essenciais: deve possuir conteúdo, estrutura, rede de comunicações e dispositivos de controle.

#### a) Conteúdo

Entre os componentes da organização encontram-se homens e máquinas. A maior parte das organizações converte recursos em bens e serviços que, por vários meios, vão satisfazer necessidades de outrem. Em síntese, uma organização contém: homens, máquinas, matérias e dinheiro.

#### b) Estrutura

A actividade do sistema divide-se, funcionalmente, em diferentes grupos responsáveis por um certo número de subactividades intervenientes todas no interesse geral da organização.

#### c) Comunicações

Os elementos humanos do sistema são informados quer por observação directa quer por comunicação proveniente de outros indivíduos. É a rede de comunicações que mantém a coesão do conjunto e assegura o contacto com meio exterior.

#### d) Controle

O sistema deve ter a possibilidade de comparar os resultados obtidos com os resultados desejados e precisa de evoluir no sentido da redução das diferenças observadas. É pois necessário que possa modificar o conteúdo, a estrutura, as comunicações e mesmo os seus próprios controles afim de atingir mais eficientemente os seus

objectivos. Quer dizer, o sistema deve ser evolutivo e auto-organizador.

Vejam agora como as ciências da direcção contribuem, em cada um destes aspectos, para melhorar o funcionamento do sistema.

## 6.2. Conteúdo

Em relação ao emprego do pessoal, o primeiro componente de uma organização, existem três questões fundamentais:

Em primeiro lugar, tem de se proceder à selecção do melhor, cuidando posteriormente da sua formação profissional. Neste aspecto intervém a *psicologia* e deve referir-se que, nos últimos anos, as questões relativas à formação do pessoal tendem a formar uma especialização a que se consagram cada vez mais os consultores externos ao sistema.

Em segundo lugar, há que tirar o maior partido da actuação do pessoal, melhorando o seu comportamento. Está aberta a via ao *estudo do trabalho*, realizado em grande parte por empresas especializadas.

Em terceiro lugar, tenta-se alterar o ambiente de trabalho, modificando os meios materiais, psicológicos e sociais em que vivem os homens. O comportamento do pessoal é indirectamente influenciado por certas medidas, tais como o subsídio de férias, cantinas, etc. A *psicologia industrial e social* tem estudado diferentes meios para a modificação do ambiente de trabalho.

O segundo componente de uma organização são as máquinas. A concepção, construção e conservação destas pertence a técnicos de diferentes especialidades (*engenharia civil, engenharia mecânica, engenharia química, engenharia electrotécnica*, etc.). A adaptação das máquinas aos homens é objecto de estudo da *engenharia humana (ergonomia)*.

O equipamento com que uma organização opera pode ser ineficiente; vários ramos da engenharia podem porém auxiliar a direcção,

planeando ou seleccionando novo equipamento ou modificando o antigo. O planeamento do equipamento e o seu controle constituem objecto de estudo da *engenharia de sistemas*.

O terceiro componente de um sistema são as *matérias*. Os estudos neste domínio exigem geralmente especialistas metalúrgicos, químicos, físicos, engenheiros ou estatísticos que se debruçam sobre o estudo da influência das matérias no conjunto do sistema.

Finalmente, o *fluxo monetário* através do sistema é um factor de primacial importância, em cujo estudo assume grande evidência a *contabilidade*, encarada quer sob o aspecto de fonte geradora de informação quer sob o ângulo de instrumento de controle.

A I. O. raramente é utilizada na análise do conteúdo das organizações.

## 6.3. Estrutura

A reorganização é o método de ataque à ineficiência da estrutura da organização e consiste, fundamentalmente, na modificação da composição dos subgrupos e (ou) suas responsabilidades. Os *estudos de reorganização (ou organização)* apresentam em larga medida um carácter qualitativo e o corpo de conhecimentos e técnicas em que se baseiam é conhecido por *teoria da organização* embora ainda esteja longe de uma sistematização ou quantificação. Em 1959, HAIRE construiu uma teoria quantitativa das estruturas mas na prática é difícil aplicá-la.

Os estudos sobre a reorganização da estrutura dos sistemas baseiam-se, na prática, sobretudo na apreciação qualitativa pessoal e na experiência; frequentemente estes estudos são realizados por empresas especializadas e neles não intervém geralmente a I. O.

## 6.4. Comunicações

O estudo das comunicações tem um carácter essencialmente qualitativo, embora haja

uma teoria matemática da comunicação baseada nos trabalhos de HARTLEY e SHANNON; esta, porém, não inclui os importantes aspectos psicológicos e sociais da comunicação. No domínio do estudo das alterações na geração, recolha, tratamento e transmissão da informação, também raramente se utiliza a I. O.

### 6.5. Controle

Uma organização com bom pessoal e equipamento e dispondo de estrutura e comunicações eficientes pode, porém, ser ineficiente se não fizer a utilização óptima dos seus recursos (homens, máquinas, matérias e dinheiro), isto é, se as operações da organização não forem controladas eficientemente.

O controle consiste, como se disse, em comparar os resultados obtidos com os resultados desejados e em fazer ajustamentos no sistema por forma a reduzir as diferenças observadas. Note-se que estas duas fases do controle equivalem a reconhecer a necessidade de uma decisão e a tomá-la.

Neste contexto, *decidir* consiste em escolher e utilizar recursos, edificar uma estrutura, criar um sistema de comunicações e um processo de controle. Mas facilmente se reconhece que a questão importante não reside no conteúdo da decisão mas sim na sua estrutura, quer dizer, na via seguida para a sua preparação. *É na preparação da decisão que intervém a investigação operacional.*

Como dissémos no n.º 2, embora o conteúdo, a estrutura e a comunicação estejam envolvidas no controle, não são propriamente estes factores o objecto de estudo da I. O., mas sim as decisões pelas quais eles são seleccionados, concebidos e utilizados. A I. O. procede ao controle a partir dos dados fornecidos pelos especialistas do conteúdo, da estrutura e das comunicações e por sua vez estes especialistas poderão trabalhar mais eficientemente se utilizarem os resultados fornecidos pela I. O..

## 7. A Investigação Operacional e a Economia

### 7.1. Generalidades

Dada a complexidade dos fenómenos que são objecto de estudo da economia e nos quais intervêm factores de mais diversa natureza, são evidente as vantagens que resultam do emprego da I. O. no estudo desses fenómenos. Assim, assistimos actualmente a um esforço de remodelação e aperfeiçoamento dos esquemas tradicionais quer da teoria económica quer da econometria, com o recurso, sobretudo, aos novos modelos matemáticos utilizados na I. O. (teoria dos jogos, programação matemática, teoria das filas de espera, teoria da substituição e renovação, etc.).

Apelidar, porém, de I. O. os temas clássicos da economia e da econometria reformulados por meio dos novos modelos é, infelizmente, uma tendência errada que leva a confundir domínios diversos. Nem a I. O. é um capítulo da economia nem esta um capítulo da primeira; por exemplo, não se pasará a chamar I. O. à táctica militar só pelo facto daquela lhe ser aplicável.

Não podemos ir até ao ponto de predizer, como alguns autores pretendem, o desaparecimento da I. O. e a sua integração nas diferentes disciplinas, mas o que acontecerá certamente é a disseminação dos modelos matemáticos operacionais pelos vários ramos da ciência.

A I. O., encarando as operações das organizações como um todo e na multiplicidade dos seus aspectos, tem potencialidades que lhe garantem não só a existência mas também a possibilidade de contribuir com novos conhecimentos para o enriquecimento das outras disciplinas, em particular a economia. Por seu lado, o «desenvolvimento operacional» de cada um dos ramos da ciência permitirá que a aproximação interdisciplinar da I. O. seja cada vez mais frutuosa.

## 7.2. Aplicações da Investigação Operacional à Economia

Como dissémos anteriormente, a reformulação da teoria económica e da econometria por meio dos modelos matemáticos utilizados na I. O. é um dos aspectos que mais deve interessar o economista moderno.

A utilização destes modelos tem provocado o acréscimo de operacionalidade dos modelos económicos e econométricos, permitindo resolver problemas que até há poucos anos não tinham encontrado solução satisfatória.

A teoria dos jogos, por exemplo, veio possibilitar o tratamento de situações de conflito de interesses tão frequentes na economia: monopólio bilateral (monopólio-monopsónio), duopólio e oligopólio, combinações ou coalizações, como, por exemplo, quando os salários são determinados por uniões ou federações de trabalhadores e patrões; etc..

A programação matemática, em especial a programação linear, provocou uma verdadeira revolução na análise económica e na econometria. A teoria da empresa, as relações interindustriais, a teoria do equilíbrio geral e a economia do bem-estar são exem-

plos de domínios profundamente remodelados com o recurso à programação linear.

Os aperfeiçoamentos da teoria económica e da econometria, no sentido de um acréscimo de operacionalidade, têm-se reflectido, evidentemente, na política económica. Ao nível da macro ou da microeconomia os modelos operacionais têm demonstrado a sua eficácia na tomada de decisões económicas.

## BIBLIOGRAFIA

- ACKOFF, R. L. (ed.), *Progress in operations research*, Vol. I, New York, 1961.
- ACKOFF, R. L., (C. W. CHURCHMANN e E. L. ARNOFF), *Introduction to operations research* (tradução francesa com o título *Éléments de recherche opérationnelle*) Paris, 1961.
- ACKOFF, R. L., (S. K. GUPTA e J. S. MINAS), *Scientific method: optimizing applied research decisions* New York, 1962.
- ACKOFF, R. L., (P. RIVETT), *A manager's guide to operational research* London, 1963.
- FAURE, R. (J. P. BOSS. e A. Le GARFF), *La recherche opérationnelle*, Paris, 1961.
- JESUS, F., *A investigação operacional na empresa* (curso realizado no CEGOC), Lisboa, 1965.
- SHUCHMANN, A. (ed.), *Scientific decision making in business*, New York, 1963.

# MATEMÁTICAS SUPERIORES

## PONTOS DE EXAME DE FREQUÊNCIA E FINAIS

### MATEMÁTICAS GERAIS

I. S. C. E. F. — MATEMÁTICAS GERAIS — 1.ª cadeira — 2.º exame de frequência e 2.º ponto de informação (1.ª chamada) — 15-6-1965.

I

5643 — 1) Considere  $\varphi(x) = \frac{1+x}{(1-x)^3}$  e resolva os seguintes problemas:

- Trace a imagem de  $\varphi(x)$ .
- Calcule  $P\varphi(x)$ .

c) Prove que  $\varphi(x) = \sum_1^{\infty} n^2 x^{n-1}$  para  $|x| < 1$ .

2) Demonstre que  $\theta$ , no termo complementar da fórmula de TAYLOR

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(a + \theta h),$$

tende para  $1/3$  quando  $h \rightarrow 0$  se  $f'''(x)$  é contínua para  $x = a$  e  $f'''(a) \neq 0$ . Generalize este resultado.

Sugestão: Escreva a terceira fórmula de TAYLOR para  $f(x)$  e relacione-a com a segunda.