

a função $f(x)$ é crescente em $]0, +\infty[$, decrescente em $] -\infty, 0[$ e possui mínimo local para $x = 0$: $f(0) = 0$. Os outros extremos locais (máximos) são $f(-\infty) = 1$ e $f(+\infty) = 1$.

3) Calcule $P \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + a^2}}$.

R: Fazendo $\sqrt{x^2 + a^2} = x + t$, vem $x = \frac{a^2 - t^2}{2t}$,

$\frac{dx}{dt} = -\frac{t^2 + a^2}{2t^2}$ e tem-se

$P \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + a^2}} = -\frac{1}{2} P \frac{1}{\frac{a^2 - t^2}{2t} + \frac{a^2 - t^2}{2t} + t}$.

$\frac{t^2 + a^2}{t^2} = -\frac{1}{2a^2} P \frac{t^2 + a^2}{t} = -\frac{1}{2a^2} \left(t + \frac{a^2}{t} \right) =$

$= -\frac{1}{4a^2} t^2 - \frac{1}{2} \log |t| = -\frac{1}{4a^2} (\sqrt{x^2 + a^2} - x)^2 -$

$-\frac{1}{2} \log |\sqrt{x^2 + a^2} - x|$.

4) Suponha $g(x, y)$ contínua no ponto $P(a, b)$. Mostre que, sendo $g(a, b) > C$ (ou $g(a, b) < C$), existe uma vizinhança de $P(a, b)$ na qual $g(x, y) > C$ (ou $g(x, y) < C$).

R: Sendo, por exemplo, $g(a, b) > C$, tome-se $\delta \leq g(a, b) - C$. Em virtude da continuidade de $g(x, y)$ em $P(a, b)$, tem-se $C \leq g(a, b) - \delta < g(x, y)$ para $(x, y) \in V_\epsilon(P)$ o que prova o resultado.

5) Calcule as raízes do polinómio $8x^3 - x^2 - 24x + 3$, sabendo que ele possui uma raiz da

forma \sqrt{n} , onde n designa um inteiro positivo que não é quadrado perfeito.

R: Fazendo no polinómio $x = \sqrt{n}$, vem $8n\sqrt{n} - n - 24\sqrt{n} + 3 = 0$ ou $8\sqrt{n}(n - 3) = n - 3$, relação que só é satisfeita com $n = 3$.

Utilizando a regra de Ruffini, vem

$$\begin{array}{r|rrrr} 8 & -1 & -24 & 3 & \\ \sqrt{3} & 8\sqrt{3} & 24 - \sqrt{3} & -3 & \\ \hline 8 & 8\sqrt{3} - 1 & -\sqrt{3} & 0 & \end{array}$$

e as restantes raízes são as do polinómio $8x^2 + (8\sqrt{3} - 1)x - \sqrt{3}$. Tem-se então $r_1 = \sqrt{3}$, $r_2 = -\sqrt{3}$ e $r_3 = 1/8$.

6) Discuta o sistema

$$\begin{cases} x_1 - kx_2 + k^2x_3 = k \\ kx_1 - k^2x_2 + kx_3 = 1 \\ kx_1 + x_2 + k^2x_3 = 1 \end{cases}$$

segundo os valores do parâmetro k .

R: Como $\begin{vmatrix} 1 & -k & k^2 \\ k & -k^2 & k \\ k & 1 & k^3 \end{vmatrix} = k(k-1)(k+1)(k^2+1)$

o sistema é possível determinado se $k \neq 0, 1, -1$.

Verifica-se facilmente que o sistema é impossível se $k = 0$, possível indeterminado de grau 1 se $k = 1$ e $k = -1$.

Enunciados e soluções dos N.ºs 5659 a 5670 de Fernando de Jesus

BOLETIM BIBLIOGRÁFICO

Nesta secção, além de extractos de críticas aparecidas em revistas estrangeiras, serão publicadas críticas de livros e outras publicações de Matemática de que os Autores ou Editores enviarem dois exemplares à Redacção

161 — A. G. КУРОШ — **Algèbre Générale** — Dunod — Paris 48 F.

O leitor encontrará nesta obra da Colecção Universitária de Matemática da Editora Dunod—a fisionomia actual da álgebra geral tal como a apresenta o

célebre matemático soviético, autor de não menos célebres tratados sobre teorias dos grupos.

O livro destina-se aos estudantes que já adquiriram sólidos conhecimentos sobre álgebra superior e faz uma exposição em que são indicadas as divisões fundamentais da álgebra geral contemporânea e postos

em evidência os teoremas mais significativos e potentes, deixando para o estudante o cuidado de procurar, para o pormenor, as monografias e tratados mais desenvolvidos. Alguns temas, que até aqui não figuravam nas obras destinadas ao ensino são expostos na obra. São por exemplo: anéis não associativos, álgebra universal, grupos com multi-operadores.

A obra trata sucessivamente dos pontos seguintes: relações; grupos e anéis; álgebras universais; grupos com multi-operadores; reticulados; grupos e anéis com operadores; módulos, álgebras lineares; grupos e anéis ordenados e topológicos, anéis normados.

Termina com bibliografia bastante completa e índice alfabético de assuntos.

162 — J. LELONG-FERRAND, F. COMBES, D. LEBORGUE M. VIALARD — *Problèmes de l'Analyse Maitrises de mathématiques, C1* — Dunod — Paris 32 F.

Na colecção «Problèmes de licence et de maîtrise» a editora Dunod publicou um repositório de exercícios de análise matemática, com cerca de duzentos problemas, resolvidos pormenorizadamente e com notas adicionais sobre assuntos contidos nos problemas do novo certificado C 1, seja segundo ciclo das Faculdades de Ciências Francesas. São catorze os capítulos em que os problemas se agrupam.

Espaços topológicos. Espaços vectoriais normados. Derivação de funções vectoriais de uma ou várias variáveis numéricas. Diferenciais. Aplicações reciprocas, funções implícitas. Integração de funções reguladas. Equações diferenciais. Equações diferenciais lineares. Equações lineares e quase lineares às derivadas parciais de primeira ordem. Cálculo das variações. Formas diferenciais. Funções holomorfas de uma variável complexa. Equações diferenciais no domínio complexo. Espaços funcionais.

Cada capítulo inicia-se por um resumo dos assuntos essenciais nele versados. Os problemas têm carácter teórico e compreendem exercícios de cálculo e de aplicações.

É inútil insistir no interesse que um livro desta natureza tem para os estudantes de matemática.

163 — R. SILBER — *Étude et trace des écoulements permanents en canaux et rivières* — Dunod — Prais 40 F.

Os estudo dos escoamentos em superfície livre é particularmente difícil devido ao facto de existirem, na equação do movimento, parâmetros que são funções não analíticas da altura da água, mesmo nos casos mais simples. No trabalho que apresentamos, o autor, R. Silber, professor da Faculdade de Ciências de Grenoble, faz uma análise completa dos métodos

clássicos. Alguns são longos e laboriosos, outros são simplificados pela introdução de funções admitidas empiricamente pela adopção de hipóteses suplementares; o problema posto determina em princípio o método a empregar.

A segunda edição desta obra comporta, além de certo número de correcções e complementos, um capítulo inteiramente novo que considera os casos de um canal com leito de inclinação variável e de um canal com caudal progressivamente variável por fontes ou perdas contínuas laterais.

Na exposição adopta-se uma *equação universal* de natureza perfeitamente analítica (cap. II) em substituição da equação de parâmetros não analíticos, de valores e de evoluções variáveis com a natureza do canal ou do curso de água considerados. A nova equação permite o traçado de um diagrama universal que dá a evolução da *profundidade reduzida* em função do *caudal reduzido* sob a forma de características graduadas em *energia reduzida*.

Este diagrama, aplicável tanto aos cursos de água naturais como aos canais prismáticos, fornece um método de traçado absolutamente geral, mais rápido e menos fastidioso que os métodos que utilizam funções empíricas e não resulta da exigência de novas hipóteses simplicadoras. Fornece ainda um método geral de estudo qualitativo e quantitativo, permitindo em particular evidenciar as particularidades do escoamento e seguir a evolução: formação da secção de controlo, aparecimento de regolfo, efeitos de singularidades como variações de inclinação, abaixamento ou elevação do leito, estreitamento ou alargamento, pilar de ponte.

A publicação tem interesse especial a todos os engenheiros ou alunos de engenharia hidráulica e de uma maneira geral a todos os gabinetes de estudo da especialidade ou de ramos afins.

164 — J. BASS — *Cours de Mathématiques* — Tomo I e Tomo II — Quatrième édition revue et corrigée — Masson et C^{ie} Paris.

Este curso de matemática dedicado aos alunos das Grandes Escolas de Engenheiros versa assuntos que se integram em determinados programas das Faculdades de Ciências. Serve particularmente os estudantes que preparam a sua «maîtrise» em física (matemática dos certificados C_1 e C_2) e a «maîtrise» em mecânica. Alguns capítulos poderão igualmente ser utilizados no segundo ano do primeiro ciclo (MP e PC).

Entretanto a sua leitura exige conhecimentos prévios de álgebra, de análise e de geometria analítica que, fazendo parte dos antigos programas de propedêutica são actualmente ensinados em matemáticas

especiais e repartidos pelos dois anos do primeiro ciclo das Faculdades.

A quarta edição difere substancialmente das precedentes em muitos pontos. Se bem que o plano da obra se mantenha o mesmo no seu conjunto, a ordem seguida foi por vezes modificada. Certos capítulos cujo ensino passou ao nível do primeiro ciclo, foram fundidos (por exemplo os dois capítulos sobre integrais duplos e múltiplos) e outros novos foram introduzidos: quaterniões, integrais de Lebesgue, complementos sobre séries e integrais de Fourier, definição das distribuições (sem grande desenvolvimento) formas diferenciais exteriores, campos de tensores e noções de análise tensorial, noções sobre séries duplas. Os parágrafos sobre métodos numéricos, sem ocuparem extensão exagerada, foram regroupados numa oitava parte do curso, e sensivelmente aumentados. Aí se encontram métodos um pouco mais actualizados para a resolução dos problemas de valores próprios, de equações algébricas e de inversão de matrizes, para a soma de séries numéricas, cálculo de integrais definidos, integração de equações diferenciais e tratamento de alguns problemas relativos às equações de derivadas parciais.

Os capítulos sobre nomografia e planímetros foram sensivelmente conservados.

Este curso tem a preocupação de apresentar uma formulação matemática correcta.

É porém evidente que para redigir em 1 200 páginas os elementos que constituem a *cultura matemática mínima do engenheiro ou do físico*, tornou-se necessário reduzir a importância de desenvolvimentos abstractos, enunciar sem demonstração certos resultados e recorrer por vezes, explícita ou implicitamente, à intuição.

Os exercícios propostos tem as soluções desenvolvidas publicadas em outro volume da mesma editora (J. Bass — Exercices de mathématiques).

A obra divide-se em dois volumes: o primeiro comporta aproximadamente as matérias relativas ao ensino da matemática do certificado C_1 de física e algumas das matérias de C_2 . O segundo comporta as do certificado C_2 de física, diversos complementos e a teoria das funções analíticas.

Podendo ser adquiridos independentemente um do outro, os dois volumes formam um todo com paginação única.

165 — J. BASS — Eléments de Calcul des Probabilités — Théorique et Pratique — Deuxième édition, révue et augmentée — Masson et C^{ie} Paris.

Estes «elementos de cálculo das probabilidades» destinam-se aos alunos das Grandes Escolas de En-

genharia e aos utilizadores, engenheiros e físicos. Mas podem igualmente prestar valiosos serviços aos estudantes do segundo ciclo das Faculdades de Ciências que estudaram o cálculo das probabilidades, a estatística e a física. A sua leitura não exige profundos conhecimentos de matemática moderna mas apenas um razoável treino da matemática clássica que se ensina no primeiro ciclo francês: elementos de álgebra linear cálculo dos integrais simples e múltiplos com alguns complementos que serão úteis mas não indispensáveis numa primeira leitura (integrais de FOURIER, funções de EULER, funções de variável complexa).

A segunda edição difere da primeira por alguns capítulos adicionais, noções elementares sobre a teoria da medida, cadeias de MARKOV. Foi revista e corrigida até o pormenor, tendo em consideração várias sugestões apresentadas por numerosos utilizadores.

A obra comporta sete capítulos de cálculo das probabilidades propriamente dito, redigidos de forma tão intuitiva quanto possível mas com a preocupação constante de precisão e de exactidão. Eles terminam com a lei fraca dos grandes números e a tendência para a lei normal nas suas hipóteses mais simples. Os três capítulos seguintes constituem uma introdução elementar ao estudo das funções aleatórias: diversos modelos de definição, exemplos, processos de POISSON, funções aleatórias estacionárias, covariância e espectro, ergodismo, cadeias de MARKOV. Enfim, os dois últimos capítulos são consagrados a alguns problemas estatísticos e mais particularmente ao texto do χ^2 e a algumas das suas aplicações.

No texto são apresentados numerosos exemplos teóricos ou numéricos.

Além disso, no fim do livro, encontram-se 56 exercícios não resolvidos, referindo-se aos diversos capítulos de curso. A maior parte deles têm indicação da resposta e, para os mais difíceis, do método a empregar na resolução.

A obra termina por seis tabelas numéricas, bibliografia e índice alfabético.

166 — B. SZ. NAGY — C. FOIAS — Analyse harmonique des opérateurs de l'espace de Hilbert.

Na teoria dos operadores dos espaços de HILBERT, há já muito tempo se obtiveram resultados definitivos pelos operadores auto-adjuntos, unitários ou normais, casos particulares mas de importância fundamental nos diferentes ramos da matemática e da física teórica. A teoria dos operadores não normais, se bem que tenha sido abordada desde há muito sob diversos aspectos ainda não atingiu uma forma definitiva semelhante. O desenvolvimento actual desta

teoria está intimamente ligado aos trabalhos de certos matemáticos soviéticos e americanos. Os trabalhos da primeira escola são relativos em primeiro lugar às funções características dos operadores e aos modelos triangulares que destes operadores resultam, ao passo que os da segunda escola inspiram-se sobretudo sobre a teoria da predição pelos processos estocásticos estacionários. Finalmente existe uma orientação de pesquisas sugerida pelo teorema sobre a dilatação unitária das contracções do espaço de HILBERT (Sz. NAGY, 1953) e desenvolvida pelos Autores da presente monografia e outros (SCHREIBER, HALPERIN, LANGER, MLAK, etc.).

Esta última orientação permite, entre outras, estabelecer um cálculo funcional para as contracções do espaço de HILBERT. Por outro lado interfere também, em certo sentido, com as outras duas orientações de pesquisas. Com efeito, a função característica de uma contracção T aparece, neste estudo, de forma absolutamente natural, particularmente pela «análise harmónica» da dilatação unitária de T , análise que é de resto inspirada pela teoria da predição.

O objectivo desta monografia é o de apresentar uma exposição pormenorizada das informações sobre uma contracção T que se pode deduzir a partir da sua dilatação unitária, reduzindo desta maneira o estudo dos operadores de tipo geral ao dos operadores unitários.

167 — HOCQUENGHEM, JAFFARD, CHENON — *Mathématiques — Calcul différentiel, et intégral* — 3^{ème} édition révisée et complétée — Masson et C^{ie} Paris.

Trata-se de nova edição do já clássico tratado dos professores HOCQUENGHEM e JAFFARD aos quais se juntou agora CHENON, e destinado ao primeiro ano do

curso de matemáticas gerais no Conservatório Nacional de «Arts et Métiers».

Os conhecimentos exigidos para o acesso a este curso estão contidos nos programas dos liceus e escolas nacionais profissionais franceses. Os alunos saídos destes liceus profissionais e escolas profissionais, depois de um ano normal de curso nocturno têm acesso normal às técnicas essenciais de cálculo diferencial e integral e aplicações geométricas que facilitam por sua vez a compreensão de teorias abstractas.

Este primeiro ano de estudo da matemática deve permitir aos estudantes da «Promotion Supérieur du Travail» a entrada natural em qualquer curso científico.

Nesta ordem de ideias os Autores incluíram nesta nova edição um apêndice contendo os conhecimentos necessários ao estudo dos quadripolos.

Além disso, o programa deste primeiro ano foi concebido por forma a poder preencher as lacunas na formação matemática dos indivíduos que basearam o início dos seus estudos em outros ramos da ciência — química e ciências naturais.

Os Autores, sem perderem de vista que os estudantes de Promoção Superior do Trabalho apenas consideram a matemática como um meio necessário à compreensão das outras ciências, dedicaram toda a atenção em fornecer *definições precisas* e em expor *raciocínios rigorosos*. Com efeito os perigos no tratamento matemático de um problema técnico residem menos no erro do cálculo que mais cedo ou mais tarde acaba por aparecer, do que na pequena falha no raciocínio que conduz a conclusões erradas. Os estudantes devem persuadir-se de que a subtileza aparente de certos factos matemáticos não é apenas um jogo de espírito mas a tradução de certas dificuldades que se apresentam ao técnico.

Referências dos N.^{os} 161 a 167, por adaptação de bibliografia distribuída pelos Editores.

Leitores da «Gazeta de Matemática»! Enviem-nos os nomes e moradas dos vossos amigos que podem e devem interessar-se por esta revista. Contribuirão assim eficientemente para que a «Gazeta de Matemática» se torne cada vez mais interessante e útil.