Note sur un Lemme de Kronecker

par Luc M. Venet
Paris

Nous nous proposons d'étendre au cas continu une proposition attribuée à Kronecker dont l'énoncé est le suivant:

Proposition. Si $\{U_n, n \geqslant 1\}$ est une suite non-décroissante de réels positifs tendant vers $+\infty$, et si la suite de nombres réels $\{Y_n, n \geqslant 1\}$ est telle que la limite $\lim\limits_{n\uparrow\infty} \sum\limits_1^n U_m^{-1} Y_m$ existe et est *finie* alors:

$$\lim_{n\uparrow\infty} U_n^{-1} \sum_1^n Y_m = 0 .$$

Dans le cas continu la proposition devient:

Proposition. Si $g(x)$ est une fonction reelle non-décroissante, positive tendant vers $+\infty$ (et ne s'annulant en aucun point) et si la fonction reelle $f(x)$ est telle que la limite: $\lim\limits_{X\uparrow\infty} \int^X \frac{f(x)}{g(x)} dx$ existe et est *finie*. Alors si $g'(x) = \frac{dg}{dx}$ existe et est continue

$$\lim_{X\uparrow\infty} \frac{1}{g(X)} \int_0^X f(x)\,dx = 0 .$$

Démonstration. La proposition n'est pas absolument triviale car les inégalités classiques sur les intégrales n'aboutissent pas.

Notons d'abord que puisque $g'(x)$ existe et que $g(x)$ est non-décroissante, nous avons $g'(x) \geqslant 0$.

Le premier pas consiste à exprimer $\int_0^X f(x)\,dx$ d'une manière qui permette d'exploiter les hypothèses.

D'une manière évidente on a: $\int_0^X f(x)\,dx =$

$$= \int_0^X \frac{f(x)}{g(x)} g(x)\,dx .$$

Maintenant posant: $\frac{f(x)}{g(x)} dx = du$; $g(x) = v$; et en intégrant par parties:

$$\int_0^X f(x)\,dx = \left[g(x) \int_0^x \frac{f(t)}{g(t)} dt \right]_0^X -$$

$$- \int_0^X g'(x) \left(\int_0^x \frac{f(t)}{g(t)} dt \right) dx =$$

$$= g(X) \int_0^X \frac{f(t)}{g(t)} dt -$$

$$- \int_0^X g'(x) \left(\int_0^x \frac{f(t)}{g(t)} dt \right) dx .$$

Ajoutant et retranchant la quantité $g(0) \int_0^X \frac{f(t)}{g(t)} dt$ nous obtenons:

$$\int_0^X f(x)\,dx = (g(X) - g(0)) \int_0^X \frac{f(t)}{g(t)} dt -$$

$$- \int_0^X g'(x) \left(\int_0^x \frac{f(t)}{g(t)} dt \right) dx +$$

$$+ g(0) \int_0^X \frac{f(t)}{g(t)} dt = \int_0^X g'(x)\,dx \int_0^X \frac{f(t)}{g(t)} dt +$$

$$+ \int_0^X g'(x) \left(\int_x^0 \frac{f(t)}{g(t)} dt \right) dx +$$

$$+ g(0) \int_0^X \frac{f(t)}{g(t)} dt =$$

$$= \int_0^X g'(x) \left(\int_x^X \frac{f(t)}{g(t)} dt \right) dx + \\ + g(0) \int_0^X \frac{f(t)}{g(t)} dt ,$$

d'où (puisque g et g' sont positifs)

$$\left| \frac{1}{g(X)} \int_0^X f(x)\, dx \right| < \\ < \frac{1}{g(X)} \left| \int_0^X g'(x) \left(\int_x^X \frac{f(t)}{g(t)} dt \right) dx \right| + \\ + \frac{g(0)}{g(X)} \left| \int_0^X \frac{f(t)}{g(t)} dt \right| .$$

Appelant $I(X)$ et $J(X)$ les deux parties du membre de droite et posant:

$$\operatorname*{Lim}_{X \uparrow \infty} \int_0^X \frac{f(x)}{g(x)} dx = M ,$$

nous observons que:

$$\operatorname*{Lim}_{X \uparrow \infty} | J(X) | = \frac{g(0)}{g(\infty)} | M | = 0 ;$$

maintenant séparant le domaine d'intégration de $I(X)$ en deux parties au point X_0 nous obtenons:

$$| I(X) | \leq \frac{1}{g(X)} \int_0^X g'(x) \left| \int_x^X \frac{f(t)}{g(t)} dt \right| dx = \\ = \frac{1}{g(X)} \int_0^{X_0} g'(x) \left| \int_x^X \frac{f(t)}{g(t)} dt \right| dx + \\ + \frac{1}{g(X)} \int_{X_0}^X g'(x) \left| \int_x^X \frac{f(t)}{g(t)} dt \right| dx .$$

Le problème revient donc à montrer que les deux expressions du membre de droite tendent séparément vers 0 lorsque X tend vers $+\infty$.

Or pour tout X_0 l'intégrale

$$\int_0^{X_0} g'(x) \left| \int_x^\infty \frac{f(t)}{g(t)} dt \right| dx$$

existe et est finie car $\int_0^\infty \frac{f(t)}{g(t)} dt$ est finie.

Donc

$$\operatorname*{Lim}_{X \uparrow \infty} \frac{1}{g(X)} \int_0^{X_0} g'(x) \left| \int_x^X \frac{f(t)}{g(t)} \right| dx = 0 ;$$

D'autre part:

$$\int_{X_0}^X g'(x) \left| \int_x^X \frac{f(t)}{g(t)} dt \right| dx \leq \\ \leq \operatorname*{Sup}_{\substack{x \\ X_0 \leq x \leq X}} \left| \int_x^X \frac{f(t)}{g(t)} dt \right| \int_{X_0}^X g'(x)\, dx = \\ = \operatorname*{Sup}_{\substack{x \\ X_0 \leq x \leq X}} \left| \int_x^X \frac{f(t)}{g(t)} dt \right| (g(X) - g(X_0)) .$$

Maintenant divisant par $g(X)$ puis faisant tendre X vers $+\infty$ nous obtenons:

$$\operatorname*{Lim}_{X \uparrow \infty} \frac{1}{g(X)} \int_{X_0}^X g'(x) \left| \int_x^X \frac{f(t)}{g(t)} \right| dx \leq \\ \leq \operatorname*{Sup}_{\substack{x \\ X_0 \leq x \leq \infty}} \left| \int_x^\infty \frac{f(t)}{g(t)} dt \right| \left(1 - \frac{g(X_0)}{g(\infty)} \right) = \\ = \operatorname*{Sup}_{\substack{x \\ X_0 \leq x \leq \infty}} \left| \int_x^\infty \frac{f(t)}{g(t)} dt \right| .$$

Maintenant faisant tendre X_0 vers $+\infty$ nous obtenons:

$$\operatorname*{Lim}_{X_0 \uparrow \infty} \operatorname*{Lim}_{X \uparrow \infty} \frac{1}{g(X)} \int_{X_0}^X g'(x) \left| \int_x^X \frac{f(t)}{g(t)} \right| dx \leq \\ \leq \operatorname*{Lim}_{X_0 \uparrow \infty} \operatorname*{Sup}_{\substack{x \\ X_0 \leq x \leq \infty}} \left| \int_x^\infty \frac{f(t)}{g(t)} dt \right| = 0 .$$

La dernière égalité étant déduite du fait que lorsque X_0 tend vers l'infini le domaine d'intégration devient de mesure nulle.

Nous avons donc démontré que les trois parties composants $\left| \frac{1}{g(X)} \int_0^X f(x)\, dx \right|$ tendent séparément vers 0 lorsque X tend vers $+\infty$ donc:

$$\operatorname*{Lim}_{X \uparrow \infty} \frac{1}{g(X)} \int_0^X f(x)\, dx = 0 .$$

Ce qu'il fallait démontrer.