3. O caso de ideais bilaterais de $R \oplus S$ pode ser tratado de modo semelhante ao caso dos ideais direitos.

Seja R um anel qualquer e seja a um elemento de R. Se existe um inteiro não nulo m tal que

$$m a \in a R + R a + \Sigma R a R ,$$

(onde por $\Sigma R a R$ designamos uma soma de um número finito de elementos da forma $x a y$, com $x , y \in R$), chamaremos *semiordem* do elemento a ao menor inteiro positivo p_a tal que que

$$p_a a \in a R + R a + \Sigma R a R .$$

Se não existe um tal inteiro não nulo m, diremos que a semiordem de a é zero.

Mostra-se que, se

$$m a \in a R + R a + \Sigma R a R ,$$

então a semiordem de a divide m.

De um modo inteiramente análogo ao visto anteriormente se estabelece o seguinte

Teorema 2: *É condição necessária e suficiente para que todo ideal bilateral de* $R \oplus S$ *seja soma directa de um ideal bilateral de* R *e um ideal bilateral de* S, *que todo elemento de* $R \oplus S$ *tenha componentes cujas semiordens sejam primas entre si.*

BIBLIOGRAFIA

[1] Neal McCoy, *The Theory of Rings*, MacMillan Mathematics Paperbacks, 1965.

Sobre espaços normados de dimensão finita

por *Manuel Arala Chaves* (1)

Temos essencialmente em vista com este artigo apresentar uma demonstração «elementar» do seguinte resultado clássico — *num espaço vectorial real de dimensão finita todas as normas são equivalentes* — e ainda indicar algumas consequências importantes deste resultado.

Normalmente, num curso ou tratado de Análise estes resultados surgem após desenvolvimentos que tornam possível uma demonstração mais curta do que a que apresentamos (cf., p. ex.º, [1 — 5. 9. 1]). No entanto, atendendo ao condicionalismo actual das nossas licenciaturas, pareceu-nos de interesse redigir uma demonstração do resultado indicado que se torne acessível a um leitor com preparação equivalente à dada na cadeira de Matemáticas Gerais. É neste sentido mais preciso que entendemos o qualificativo de «elementar» que acima demos à demonstração apresentada. Ainda com o objectivo de nada pressupormos do leitor, além do que é tratado na cadeira de Matemáticas Gerais, começamos por indicar algumas definições e propriedades de que necessitamos.

§ 1. Espaços normados, convergência, continuidade, normas equivalentes

(1) Uma norma sobre um espaço vectorial real (2) E é uma função real de domínio $E , x \to \| x \|$ com as seguintes propriedades:

---

(1) Bolseiro do Instituto de Alta Cultura.

(2) É possível definir, mais geralmente, *norma* em espaços vectoriais sobre outros corpos.

I) para todo o $x \in E, \|x\| \geqq 0$;

II) para todo o $x \in E, \|x\| = 0$ se e só se $x = 0_E$;

III) para todo o $(x, y) \in E^2, \|x + y\| \leqq \|x\| + \|y\|$;

IV) para todo o $x \in E$ e todo o $\lambda \in R$, $\|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$.

O espaço E, munido da norma $x \to \|x\|$ diz-se um *espaço normado* (notação: $(E, \|\ \|)$).

(2) Exemplos: Sobre R^m qualquer das três seguintes funções é uma norma:

$$(x_1, \cdots, x_m) \to \sup_i |x_i|; (x_1, \cdots, x_m) \to \to |x_1| + \cdots + |x_m|$$

e

$$(x_1, \cdots, x_m) \to \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_m^2}.$$

Sobre o espaço vectorial real $C([0,1], R)$ das funções reais contínuas de domínio $[0,1]$, a aplicação $f \to \sup |f(x)|, x \in [0,1]$, é uma norma.

(3) Diz-se que uma sucessão $(x_p)_{p \in N}$, em $(E, \|\ \|)$, *converge para* $x_0 \in E$ ou que *tem limite* x_0 (notação: $(x_p)_{p \in N} \to x_0$ ou $\lim (x_p)_{p \in N} = x_0$) se a sucessão real $(\|x_p - x_0\|)_{p \in N}$ convergir para o número real 0. Toda a sucessão parcial de uma sucessão convergente ainda é convergente (e para o mesmo limite).

(4) Uma sucessão $(x_p)_{p \in N}$ diz-se *de Cauchy*, se, para todo o número real $\varepsilon > 0$, existir um número natural q, tal que, quaisquer que sejam r e s maiores que q, seja $\|x_r - x_s\| < \varepsilon \cdot (x_p)_{p \in N}$ diz-se *limitada* se $(\|x_p\|)_{p \in N}$ for limitada.

(5) Se $(a_p)_{p \in N}, (b_p)_{p \in N}$ são sucessões reais convergentes respectivamente para a e b e se $(x_p)_{p \in N}$ e $(y_p)_{p \in N}$ são sucessões convergentes (em $E, \|\ \|$) respectivamente para x e y, então $(a_p x_p + b_p y_p)_{p \in N}$ é uma sucessão convergente para $ax + by$. (Basta utilizar as propriedades (1)-III e (1)-IV).

(6) Se $(x_p)_{p \in N} \to x$, também $(\|x_p\|)_{p \in N} \to \|x\|$. (Atenda-se a que de (1)-III resulta $\|x_p\| = \|x + (x_p - x)\| \leqq \|x\| + \|x_p - x\|$ ou $\|x_p\| - \|x\| \leqq \|x_p - x\|$).

(7) Diz-se que f é *contínua no ponto* $x_0 \in E$ (sendo f uma aplicação do espaço vectorial normado $(E, \|\ \|)$ no espaço vectorial normado $(F, \|\ \|^*)$) se, para todo o número real $\varepsilon > 0$, existir um número real $\delta > 0$, de tal modo que, para todo o $x \in E$ que satisfaça a $\|x - x_0\| < \delta$ se tenha $\|f(x) - f(x_0)\|^* < \varepsilon$. E f diz-se *contínua* se for contínua em todos os pontos de E.

(8) Uma bijecção do espaço vectorial normado $(E, \|\ \|)$ sobre o espaço vectorial normado $(F, \|\ \|^*)$ diz-se *bicontínua* se for uma aplicação contínua e se a sua aplicação inversa também for uma aplicação contínua (de $(F, \|\ \|^*)$ sobre $(E, \|\ \|)$).

Seguindo raciocínios idênticos aos utilizados para funções reais de variável real conclui-se imediatamente que:

(9) A composta de duas aplicações f e g, a primeira contínua em x_0 e a segunda contínua em $f(x_0)$, é uma função $g \circ f$ contínua em x_0.

(10) Se $(x_p)_{p \in N} \to x_0$ e se $f: E \to F$ é contínua em x_0, então $(f(x_p))_{p \in N} \to f(x_0)$.

(11) Duas normas $\|\ \|$ e $\|\ \|^*$ sobre um mesmo espaço vectorial E dizem-se *equivalentes*[1] se existirem dois números reais k e K tais que, para todo o $x \in F$,

$$\|x\| \leqq k \|x\|^* \text{ e } \|x\|^* \leqq K \|x\|.$$

[1] É fácil provar que a relação assim definida no conjunto das normas sobre um espaço vectorial E é uma relação de equivalência, isto é, provar que: 1) uma norma é equivalente a si própria; 2) se $\|\ \|_1$ é equivalente a $\|\ \|_2$ também $\|\ \|_2$ é equivalente a $\|\ \|_1$; 3) se $\|\ \|_1$ é equivalente a $\|\ \|_2$ e se $\|\ \|_2$ é equivalente a $\|\ \|_3$ também $\|\ \|_1$ é equivalente a $\|\ \|_3$.

O significado desta definição pode ser melhor compreendido a partir das seguintes duas proposições ((12) e (13)):

(12) As normas $\| \|$ e $\| \|^*$, sobre E, são equivalentes se e só se a aplicação I de $(E, \| \|)$ sobre $(E, \|^*)$, definida por $I(x) = x$, for bicontínua.

A demonstração de que I é bicontínua se as normas forem equivalentes é imediata. Provemos então o recíproco. A não existência de um número K nas condições de (11) implica a existência, para cada $p \in N$, de um vector x_p, diferente de 0_E, com $\| x_p \|^* > p^2 \cdot \| x_p \|$. (Se não existisse um tal x_p para um certo $p \in N$, seria, para todo o $x \in E, \| x \|^* \leq p^2 \cdot \| x \|$). A sucessão $(y_p)_{p \in N} = (x_p / p \| x_p \|)_{p \in N}$ converge para 0_E, relativamente à norma $\| \|$, porque, para todo o $p \in E$, $\| y_p \| = \| x_p \| / p \cdot \| x_p \| = 1/p$; mas $(y_p)_{p \in N}$ não converge relativamente à norma $\| \|^*$, visto que, para todo o $p \in N, \| y_p \|^* = \| x_p \|^* / p \cdot \| x_p \| > p$.

A existência de uma sucessão em E, nas condições indicadas, permite afirmar que I não é contínua (se atendermos a (10)). Anàlogamente se mostraria que a não-existência de um k nas condições de (11) implica que I^{-1} não é contínua.

De (10) e da demonstração de (12) resulta imediatamente que:

(13) Dadas duas normas $\| \|$ e $\| \|^*$ sobre E, o conjunto das sucessões convergentes em $(E, \| \|)$ é igual ao conjunto das sucessões convergentes em $(E, \| \|^*)$ se e só se as duas normas forem equivalentes; se esta condição for satisfeita, cada sucessão convergente tem o mesmo limite em $(E, \| \|)$ e em $(E, \| \|^*)$.

(14) Dadas duas normas equivalentes $\| \|_1$ e $\| \|_2$ sobre E e duas normas equivalentes $\| \|_1^*$ e $\| \|_2^*$ sobre F, uma aplicação $f: E \to F$ é contínua em $a \in E$ relativamente a $\| \|_1$ e $\| \|_1^*$ se e só se o for relativamente a $\| \|_2$ e $\| \|_2^*$.

Isto resulta imediatamente de (9) e (12).

Obs. 1 — Dados um espaço vectorial E de dimensão finita (não nula) — m —, uma base $(e_1, \cdots, e_m)$ de E e uma função f tomando valores em E (e de domínio X), existem m funções reais — $f_1, \cdots, f_m$ — (de domínio X) tais que, para todo o $x (\varepsilon X), f(x) = \sum_{r=1}^{m} f^i(x) \cdot e_i$. Chamar-lhes-emos as «funções coordenadas» de f relativamente à base fixada. Note-se que a aplicação $f \to (f_1, \cdots, f_m)$ é linear.

Obs. 2 — Salvo indicação em contrário suporemos em R^m definida a norma indicada no 1.º exemplo de (2).

(15) Dado um espaço vectorial normado $(E, \| \|)$ e uma aplicação $f: E \to R^m$, f é contínua no ponto a de E se e só se as suas m funções coordenadas f^i (relativamente à base canónica de R^m) o forem. (Sobre a norma de R^m cf. Obs. 2). A demonstração faz ùnicamente intervir as definições de continuidade e da norma de R^m.

(16) Uma sucessão $(a_p^1, \cdots, a_p^m)_{p \in N}$ em R^m é convergente (resp. limitada) se e só se, para todo o $j = 1, \cdots, m$, a sucessão numérica $(a_p^j)_{p \in N}$ for convergente (resp. limitada). E, se para todo o j, $(a_p^j)_{p \in N} \to a^j$, então $((a_p^1, \cdots, a_p^m))_{p \in N} \to (a^1, \ldots, a^m)$. (Basta atender às definições).

(17) Toda a sucessão limitada de R^m (cf. Obs. 2) admite uma sucessão parcial convergente.

Vamos reduzir a demonstração desta proposição à do caso particular $m = 1$ (esta última feita em Matemáticas Gerais). Para provarmos a existência de uma função estrictamente crescente $\varphi: N \to N$ tal que, para todo o $j=1,\cdots,m$, a sucessão real $(a^j_{\varphi(p)})_{p\in N}$ seja uma sucessão parcial convergente de $(a^j_p)_{p\in N}$, podemos, por recorrência, provar a existência de m funções $\varphi_1,\cdots,\varphi_m$ estrictamente crescentes, tais que, para todo o $k\leqq m$ e todo o $j=1,\cdots,k$, $(a^j_{\varphi_k(p)})_{p\in N}$ seja convergente; é evidente que podemos então pôr $\varphi=\varphi_m$. Resta provar a existência de $\varphi_1,\cdots,\varphi_m$: 1) a existência de φ_1 tal que $(a^1_{\varphi_1(p)})_{p\in N}$ seja convergente decorre da limitação de $(a^1_p)_{p\in N}$ — é o caso $m=1$ da proposição a provar; 2) supondo que existe φ_r tal que, para $j=1,\cdots,r$, $(a^j_{\varphi_r(p)})_{p\in N}$ é convergente, escolhêmos uma sucessão parcial convergente $(a^{k+1}_{\varphi_r(\psi_r(p))})_{p\in N}$ da sucessão real limitada $(a^{r+1}_{\varphi_r(p)})_{p\in N}$ e pomos $\varphi_{r+1}=$ $=\varphi_r\circ\psi_r$.

§ 2. Espaços normados de dimensão finita

Teorema. *Sejam* E *um espaço vectorial real de dimensão finita* (não nula), $\mathrm{x}\to\|\mathrm{x}\|$ *uma norma definida sobre* E *e* $(\mathrm{e_i})_{\mathrm{i}=1,\ldots,\mathrm{m}}$ *uma base de* E. *Para cada* $\mathrm{x}\in\mathrm{E}$ *e cada* $\mathrm{j}\in\{1,\cdots,\mathrm{m}\}$, *designe* $\mathrm{x^j}$ *a coordenada de índice* j *de* x *naquela base. As funções reais* n *e* $\mathfrak{N}$, *de domínio* E, *definidas por* $\mathrm{n(x)}=$ $=\sup\limits_{\mathrm{j}}(|\mathrm{x^j}|\cdot\|\mathrm{e_j}\|)$ *e* $\mathfrak{N}(\mathrm{x})=\sup\limits_{\mathrm{j}}|\mathrm{x^j}|$ *são ambas normas equivalentes à dada.*

Demonstração. (A) — A verificação de que n e $\mathfrak{N}$ são normas não oferece dificuldades.

(B) — Comecemos por provar que n e $\mathfrak{N}$ são equivalentes entre si. Designando por P e Q, respectivamente, os números $\sup\limits_i\|e_i\|$ e $\inf\limits_i\|e_i\|$, é evidente que podemos escrever, para todo o $x\in E$, e todo o $i\in\{1,\cdots,m\}$ $|x^i|\cdot\|e_i\|\leqq|x^i|\cdot P$ e, portanto $n(x)\leqq$ $\leqq P\cdot\mathfrak{N}(x)$ e $Q\cdot|x^i|\leqq|x^i|\cdot\|e_i\|$ e, portanto, $\mathfrak{N}(x)\leqq Q^{-1}\cdot n(x)$.

(C) — Provemos agora que n e $\|\;\|$ são equivalentes. Notemos que, pelas propriedades III e IV das normas, podemos escrever

$$\|x\|=\left\|\sum_{i=1}^m x^i e_i\right\|\leqq\sum_{i=1}^m\|x^i e_i\|=\sum_{i=1}^m|x^i|\cdot$$
$$\cdot\|e_i\|\leqq m\cdot\sup_i(|x^i|\cdot\|e_i\|)=m\cdot n(x).$$

A demonstração de (C) e, portanto, do teorema, ficará então concluída se provarmos que existe um número real K tal que, para todo o $x\in E$, $n(x)\leqq K\|x\|$. Note-se, porém, que, por definição de $n(x)$, será $n(x)\leqq$ $\leqq K\cdot\|x\|$ se e só se, para todo o $i\in\{1,\cdots,m\}$, for $|x^i|\cdot\|e_i\|\leqq K\cdot\|x\|$; e é simples de verificar que o que resta provar é então equivalente ao seguinte:

Lema. Para todo o $i\in\{1,\cdots,m\}$ existe um número real K_i, tal que, para todo o $x\in E$, $|x^i|\cdot\|e_i\|\leqq K_i\cdot\|x\|$.

Demonstremos o lema por indução relativamente à dimensão m de E.

Para $m=1$ a afirmação é trivial: basta tomar $K=1$ e atender à propriedade III da norma — $|x^1|\cdot\|e_1\|=\|x^1\cdot e_1\|=\|x\|$.

Suponhamos a afirmação válida em dimensão r e seja E um espaço vectorial de dimensão $r+1$.

i) Se $x^i=0$, teremos $|x^i|\cdot\|e_i\|\leqq K_i\cdot$ $\cdot\|x\|$, qualquer que seja $K_i\geqq 0$ (K_i, a existir, terá de ser maior que zero).

ii) Suponhamos então $x^i\neq 0$. Poderemos escrever

$$\frac{|x^i|\cdot\|e_i\|}{\|x\|}=\frac{|x^i|\cdot\|e_i\|}{\|x^1e_1+\cdots+x^{r+1}e_{r+1}\|}=$$
$$=\frac{\|e_i\|}{\left\|\dfrac{x^1}{x^i}e_1+\cdots+\dfrac{x^{r+1}}{x^i}e_{r+1}\right\|}\leqq$$
$$\leqq[\|e_i\|/(\inf\|a^1e_1+\cdots+a^{r+1}e_{r+1}\|,$$
$$(a^1,\cdots,a^{r+1})\in R^{r+1},\,a_i=1)]=K_i$$

ou $|x^i| \cdot \|e_i\| \leq K_i \|x\|$, se provarmos que aquele ínfimo é maior que zero. Ora, se o ínfimo deste conjunto de números reais (maiores que zero) fosse nulo, haveria nele uma sucessão convergente para zero, i. e., existiria, para cada $j \in (\{1, \cdots, r+1\} - \{i\})$, uma sucessão de números reais — $(a_p^j)_{p \in N}$, tal que, (pondo $a_p^i = 1$, por comodidade de de notação) a sucessão real $\left(\left\|\sum_{j=1}^{r+1} a_p^j e_j\right\|\right)_{p \in N}$ fosse convergente para zero. Seria então $\left(\sum_{j=1}^{r+1} a_p^j e_j\right)_{p \in N}$ convergente para 0_E ou, por 1. (5), $\left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{r+1} a_p^j e_j\right)_{p \in N} \to -e_i$, uma vez que $\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{r+1} a_p^j e_j = \sum_{j=1}^{r+1} a_p^j e_j - e_i$; portanto, por (1. 6), também $\left(\left\|\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 1}}^{r+1} a_p^j e_j\right\|\right)_{p \in N} \to \|e_i\|$. Em particular, esta última sucessão seria limitada. Deste facto resultaria que, para todo o $j \in \{1, \cdots, r+1\}$, a sucessão $(a_p^j)_{p \in N}$ seria limitada; com efeito, o sub-espaço gerado pelos vectores $e_j, j \in (\{1, \cdots, r+1\} - \{i\})$ tem dimensão r e, por hipótese indutiva, para todo o $j \neq i$ existiria então um K_j^i tal que, para todo o $p \in N$, $|a_p^j| \cdot \|e_j\| \leq K_j^i \cdot \left\|\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{r+1} a_p^j e_j\right\|$. Mas, se para cada j, $(a_p^j)_{p \in N}$ fosse limitada, poderíamos, por 1. (16) e 1. (17), definir uma função estrictamente crescente $\varphi : N \to N$ tal que, para todo o j, a sucessão $(a_{\varphi(p)}^j)_{p \in N}$ fosse uma sucessão parcial de $(a_p^j)_{p \in N}$, convergente para um certo a^j. A sucessão $\left(\sum_{j=1}^{r+1} a_{\varphi(p)}^j e_j\right)_{p \in N}$ seria então convergente para $\sum_{j=1}^{r+1} a^j e_j$; por outro lado, como esta sucessão seria uma sucessão parcial da sucessão $\left(\sum_{j=1}^{r+1} a_p^j e_j\right)_{p \in N}$, convergiria para 0_E, e, então $\sum_{j=1}^{r+1} a^j e_j = 0_E$, com $a^i = 1$, o que é absurdo, pois os vectores $e_1, \cdots e_m$ são linearmente independentes.

Corolários do Teorema 1:

1.º) *Num espaço vectorial de dimensão finita* E, *quaisquer duas normas são equivalentes.*

Com efeito, fixada uma base em E, podemos afirmar que ambas as normas são equivalentes à norma $\mathfrak{N}$ associada a essa base (as notações são as do teorema anterior).

2.º) *Se* f *é uma aplicação linear do espaço vectorial normado* E *no espaço vectorial normado* F *e se* E *tem dimensão finita,* f *é contínua.*

Pelo teorema e por 1. (14) podemos supor em E definida a norma $\mathfrak{N}$ associada a uma base $(e_1, \cdots, e_m)$ de E. Designe $\|\,\|$ a norma de F. Será então $\|f(x) - f(a)\| = \|f(x-a)\| = \left\|\sum_{i=1}^{m} (x^i - a^i) \cdot f(e_i)\right\| \leq \leq m \cdot \mathfrak{N}(x-a) \cdot \sup_i \|f(e_i)\|$ ou $\|f(x) - f(a)\| \leq \leq K \cdot \mathfrak{N}(x-a)$, em que $K = m \cdot \sup_i \|f(e_i)\|$. Desta desigualdade decorre imediatamente a continuidade de f no ponto a: para todo o número real $\varepsilon > 0$ existe um número real $\delta = \varepsilon / K$, tal que $x \in E$ e $\mathfrak{N}(x-a) < \delta$ implicam $\|f(x) - f(a)\| < \varepsilon$.

3.º) *Qualquer isomorfismo (linear) entre espaços vectoriais normados de mesma dimensão finita é uma aplicação bicontínua.*

É consequência imediata do corolário anterior. Em particular:

4.º) *Se* E *é um espaço vectorial normado de dimensão finita* (>0), $(e_1, \cdots, e_m)$ *uma base de* E, *a aplicação* $\varphi : E \to R^m$ *definida por* $\varphi(x^1 e_1 + \cdots + x^m e_m) = (x^1, \cdots, x^m)$ *é uma aplicação bicontínua de* E *sobre* R^m.

5.º) *Uma aplicação* f *de um espaço vectorial normado* F *num espaço vectorial normado* E *de dimensão finita é contínua num ponto* a *de* F *se e só se as funções coordenadas de* f *relativamente a uma base* $(e_1, \cdots, e_m)$ *de* E *o forem.*

Com efeito, designando φ a aplicação definida no cor.º 4.º, é imediato concluir (por 1. (8) e 1. (9)) que f é contínua em a se e só se $\varphi \circ f$ o for. Ora as funções coordenadas de f (relativamente a $(e_1, \cdots, e_m)$) e de $\varphi \circ f$ (relativamente à base canónica de R^m) são as mesmas. Então a afirmação a provar resulta de 1. (15).

6.º) *Num espaço vectorial normado* E, *de dimensão finita, toda a sucessão de* Cauchy *é convergente.*

Comecemos por observar que se uma sucessão num espaço vectorial E é de Cauchy (resp. convergente) relativamente a uma norma $\|\,\|$ sobre E, também é uma sucessão de Cauchy (resp. uma sucessão convergente) relativamente a qualquer outra norma equivalente à primeira. Podemos então supor, pelo teorema, que sobre E está definida a norma $\mathfrak{N}$ associada a uma base $(e_1, \cdots, e_m)$. Então, se $(x_p)_{p\in N}$ é de Cauchy, é imediata a verificação de que, para todo o $j \in \{1, \cdots, m\}$ $(x_p^j)_{p\in N}$ é uma sucessão real de Cauchy e, como tal, convergente para um certo a^j. De 1. (5) resultará então a convergência de $(x_p)_{p\in N}$ para $\sum_{i=1}^{m} a^i e_i$.

Definições. Um espaço vectorial normado diz-se *completo* precisamente se todas as sucessões de Cauchy forem convergentes e neste caso coincide o conjunto das sucessões de Cauchy com o das sucessões convergentes, visto que uma sucessão convergente é sempre de Cauchy. Chama-se *espaço de Banach* a um espaço vectorial normado completo.

Com estas definições podemos indicar duas afirmações equivalentes à do cor.º 6.º:

6') *Todo o espaço vectorial normado de dimensão finita é completo.*

6'') *Todo o espaço vectorial normado de dimensão finita é um espaço de Banach.*

7.º) *Num espaço vectorial normado de dimensão finita toda a sucessão limitada* $(x_p)_{p\in N}$ *admite uma sucessão parcial convergente.*

Notemos primeiro que uma sucessão definida num espaço vectorial E é limitada relativamente a uma norma, se e só se o for relativamente a qualquer norma equivalente. Podemos então, atendendo a 1. (13) supor definida sobre E a norma $\mathfrak{N}$ associada (cf. teorema) a uma base qualquer $(e_1, \cdots, e_m)$ de E. Para cada $j = 1, \cdots, m$, $(x_p^j)_{p\in N}$ será então uma sucessão real limitada. Por 1. (16) e 1. (17), existirá φ tal que, para $j = 1, \cdots, m$ $(x^j_{\varphi(p)})_{p\in N}$ é uma sucessão parcial convergente de $(x_p^j)_{p\in N}$. Então, por 1. (5), a sucessão $(x_{\varphi(p)})_{p\in N} = \left(\sum_{j=1}^{m} x^j_{\varphi(p)} e_j\right)_{p\in K}$ convergirá também. Ora $(x_{\varphi(p)})_{p\in N}$ é uma sucessão parcial de $(x_p)_{p\in N}$.

Designando, num espaço vectorial normado $(E, \|\,\|)$, para cada $r > 0$, por B_r (resp. S_r) o conjunto dos $x \in E$, tais que $\|x\| \leq r$ (resp. tais que $\|x\| = r$), podemos afirmar que

8.º) *Se* E *tem dimensão finita, toda a função real contínua* f *definida em* B_r *(resp.* S_r*) é limitada.*

Com efeito, se f não fosse limitada, existiria em B_r (resp. S_r) uma sucessão $(x_p)_{p \in N}$, tal que, para todo o $p \in N$, $p < |f(x_p)|$. Ora $(x_p)_{p \in N}$ admitiria, pelo cor.° anterior, uma sucessão parcial $(x_{\varphi(p)})_{p \in N}$ convergente para um ponto a, necessàriamente pertencente a B_r (resp. S_r), porque, para todo o $p \in N$, $\|x_p\| \leq r$ (resp. $\|x_p\| = r$). Então $\|f(x_{\varphi(p)})\|_{p \in N}$ convergiria para $\|f(a)\|$, o que é absurdo.

§ 3. Espaços normados de dimensão infinita

No § 2 supusemos os espaços normados de dimensão finita; vejamos agora se algum dos resultados desse parágrafo ainda é válido sem essa hipótese.

Em [2 – 3. 5], utilizando o teorema «todo o espaço vectorial tem uma base», demonstra-se não só a impossibilidade de generalizar o cor.° 1 a espaços vectoriais normados de dimensão infinita, como ainda se prova que, para *qualquer* espaço vectorial real de dimensão infinita, existe um conjunto infinito de normas não equivalentes duas a duas.

Se E tem dimensão infinita, por [2–3. 5], existem pois, duas normas não equivalentes $\| \|$ e $\| \|^*$ em E. A aplicação I de $(E, \| \|)$ em $(E, \| \|^*)$ definida por $I(x) = x$ não é bicontínua, por 1. (12); isto é, pelo menos um dos isomorfismos lineares, I de $(E, \| \|)$ em $(E, \| \|^*)$ ou I^{-1} de $(E, \| \|^*)$ em $(E, \| \|)$, não é contínuo, o que mostra que são falsas as generalizações a dimensão infinita dos corolários 2.° e 3.°.

Em relação com o cor.° 6.° (e 6′, 6″), podemos afirmar que existem espaços vectoriais normados de dimensão infinita que são completos e outros que não são.

Exemplo 1. O espaço normado de dimensão infinita considerado no último exemplo de 1. (2) é completo. Com efeito, notemos que afirmar que nesse espaço uma sucessão de funções $(f_p)_{p \in N}$ é de Cauchy equivale a afirmar que

(C_1) para todo o $\varepsilon > 0$, existe um número natural q_0 tal que, para quaisquer números naturais r e s maiores que q_0 e para qualquer $x \in [0, 1]$, $|f_r(x) - f_s(x)| < \varepsilon$. Ora prova-se — e a demonstração é feita em certos cursos de Matemáticas Gerais — que

(P) se $(f_p)_{p \in N}$ satisfaz a (C_1), existe uma função contínua f para a qual $(f_p)_{p \in N}$ converge uniformemente;

e dizer que $(f_p)_{p \in N}$ converge uniformemente para f equivale precisamente a dizer que $(f_p)_{p \in N} \rightarrow f$ no espaço normado que estamos a considerar. Portanto (P) traduz precisamente que este espaço normado é completo.

Exemplo 2. Designando por S o sub-espaço [1] de $\mathcal{C}([0, 1], R)$ constituido pelas funções cujos gráficos são reuniões de um número finito de segmentos de recta, considere-se sobre S a norma-restrição da definida sobre $\mathcal{C}([0, 1], R)$. É possível provar (a demonstração é deixada ao leitor como exercício) que existe em S uma sucessão — $(f_p)_{p \in N}$ — que converge (uniformemente) para o elemento g de $\mathcal{C}([0, 1], R)$, definido por $g(x) = x^2$. Ora $g \notin S$; a sucessão $(f_p)_{p \in N}$ é de Cauchy e não converge para nenhum elemento de S. Logo S é um espaço normado não completo.

Quanto ao corolário 7.°, não só é impossível generalizar as suas conclusões ao caso de dimensão infinita, como podemos provar mesmo o seguinte:

[1] Como exercício, poder-se-á provar directamente que S é um sub-espaço vectorial de dimensão infinita de $\mathcal{C}([0, 1], R)$. Aliás, também se pode concluir *a posteriori* que a sua dimensão é infinita, notando que, se fosse finita, pelo teorema do § 2, S seria completo.

TEOREMA: *Em qualquer espaço vectorial real normado de dimensão infinita existe uma sucessão* $(x_p)_{p \in N}$ *tal que: 1.º) para todo o* $p \in N, \|x_p\|=1$; *2.º)* $(x_p)_{p \in N}$ *não tem nenhuma sucessão parcial convergente.*

DEMONSTRAÇÃO. Designe S o conjunto dos elementos de E de norma 1. Vamos mostrar a existência de uma sucessão $(x_p)_{p \in N}$ em S tal que, para quaisquer dois números naturais r e s $(r \neq s)$, seja $\|x_r - x_s\| \geqq 1/2$. É evidente que uma sucessão com esta propriedade não admite nenhuma sucesssão parcial convergente e a demonstração do teorema ficará feita.

Definamos $(x_p)_{p \in N}$ por recorrência. Seja x_1 um elemento qualquer de S. Sejam $x_1, \cdots, x_r$ elementos de S, tais que, para quaisquer i e j satisfazendo a $1 \leqq i < j \leqq r$, seja $\|x_i - x_j\| \geqq 1/2$. Vamos mostrar que existe $x_{r+1} (\in S)$ por forma que, para todo o $i \leqq r, \|x_i - x_{r+1}\| \geqq 1/2$. Para tal, designemos por V_r o espaço vectorial (de dimensão finita) gerado por $x_1, \cdots, x_r$. Como por um lado S gera E, e por outro E tem dimensão infinita, S não está contido em V_r; seja y_r um elemento de S, não pertencente a V_r. Ponhamos $a_r = \inf_{v \in V} \|y_r - v\|$. É $a_r > 0$, pois se fosse $a_r = 0$, existiria em V_r uma sucessão $(v_p)_{p \in N}$ tal que $(\|y_r - v_p\|)_{p \in N}$ convergisse para 0. Como para todo o $p \in N$ é $\|v_p\| \leqq \|y_r - v_p\| + \|y_r\|$, $(v_p)_{p \in N}$ seria uma sucessão limitada de V_r e, visto que V_r tem dimensão finita, essa sucessão admitiria uma sucessão parcial $(v_{\varphi(p)})_{p \in N}$ convergente em V_r (por $2 \cdot 7^{\circ}$). Ora isto é absurdo, pois $(v_p)_{p \in N}$ converge para $y_r \notin V_r$; portanto $a_r > 0$. Mas então, por definição de a_r, existirá um $u_r \in V_r$ tal que $a_r \leqq \|y_r - u_r\| < 3\, a_r/2$. Ponhamos

$$x_{r+1} = (y_r - u_r)/\|y_r - u_r\| \in S .$$

Para todo o $v \in V_r$,

$$\|x_{r+1} - v\| = (\|y_r - u_r\|)^{-1} \cdot \|(y_r - u_r - \|y_r - u_r\| \cdot v)\| > \frac{2}{3\,a_r} \|y_r - (u_r + \|y_r - u_r\| \cdot v)\|;$$

mas $u_r + \|y_r - u_r\| \cdot v \in V_r$ e, portanto:

$$\|x_{r+1} - v\| > \frac{2}{3\,a_r} \cdot a_r = \frac{2}{3} > \frac{1}{2} .$$

Em particular, será, para todo o $i \leqq r, \|x_{r+1} - x_i\| > \frac{1}{2}$.

N. B. Na demonstração que acabamos de indicar servimo-nos da ideia da demonstração do teorema de RIESZ, dada em [1 — 5. 9. 4].

Finalmente, também não é possível estender o corolário 8º a espaços normados de dimensão infinita. Vamos até mostrar que, designando por B (resp. S) o conjunto dos vectores de um espaço vectorial normado qualquer de dimensão infinita E, que têm norma $\leqq 1$ (resp. $= 1$), existe sempre uma função real contínua não majorada de domínio B (resp. S).

Seja $(x_p)_{p \in N}$ uma sucessão construida pelo modo indicado na demonstração precedente e, para cada $p \in N$, designe U_p o conjunto dos vectores x de B (resp. S) tais que $\|x - x_p\| \leqq 1/8$. A função real de domínio B, (respectivamente S) definida por $f(x) = p - 8p\|x - x_p\|$ se $x \in U_p$ e $f(x) = 0$ se $x \notin \bigcup_{p \in N} U_p$, é contínua e não majorada. (Deixa-se como exercício ao leitor a demonstração de que f é contínua).

BIBLIOGRAFIA

[1] J. DIEUDONNÉ, *Fondements de l'analyse moderne*, Gauthier-Villars, Paris, 1963.

[2] J. C. FERREIRA, *Sobre a equivalência de normas em espaços vectoriais*, «Gazeta de Matemática» n.º 58 (1954), 5-9.

NOTA DE AULA

Sobre semigrupos regulares à esquerda e à direita

por José Morgado
Instituto de Matemática, Universidade Federal de Pernambuco, Brasil

1. Introdução

Diz-se que o semigrupo S é *regular à esquerda*, se, para todo $a \in S$, existe algum $x \in S$ tal que

(1) $$x a a = a .$$

Diz-se que S é *regular à direita*, se, para todo $a \in S$, existe algum $y \in S$ tal que

(2) $$a a y = a .$$

Na revista *The American Mathematical Monthly*, vol 72 (1965), p. 1021, foi proposto por MICHAEL GEMIGNANI o seguinte exercício:

Seja S um semigrupo regular à esquerda e à direita. Mostre que:

(i) Todo elemento $a \in S$ tem pelo menos uma identidade local, i. e., para todo $a \in S$ existe algum elemento $e_a \in S$ tal que

$$e_a a = a e_a = a ;$$

(ii) Para todo elemento $a \in S$ existe pelo menos um elemento inverso, i. e., para todo $a \in S$ existe algum $b_a \in S$ tal que

$$b_a a = a b_a = e_a ,$$

onde e_a designa alguma identidade local de a.

Na mesma revista, vol. 74 (1967), p. 325, é publicada a seguinte solução de D. DAWSON:

(i) Fazendo

$$e_a = x a = x a a y = a y ,$$

vem

$$e_a a = x a a = a = a a y = a e_a .$$

(ii) Fazendo

$$b_a = x x a = x a y = a y y ,$$

vem

$$b_a a = x x a a = x a = e_a = a y = a a y y = a b_a .$$

Nesta nota daremos condições necessárias e suficientes para que um semigrupo regular à esquerda e à direita seja um grupo.

2. Observações

1) É interessante notar que *as condições* (i) e (ii) *são suficientes para que um semigrupo* S *seja regular à esquerda e à direita.*

Na verdade, se S satisfaz às condições (i) e (ii), tem-se

$$b_a a a = e_a a = a = a e_a = a a b_a ,$$

o que prova (1) e (2) com $x = y = b_a$.

2) Num semigrupo regular à esquerda e à direita S, *pode acontecer que não exista inverso do elemento a com respeito a uma dada identidade local e_a de a.*

Seja, por exemplo, $S=\{0,2,4\}$ e seja a operação definida em S o produto de inteiros módulo 6. Como se tem

$$aaa=a \text{ para todo } a\in S,$$

o semigrupo S é regular à esquerda e à direita. Verifica-se que 4 é identidade local de 0 e, no entanto, não existe inverso de 0 com respeito a 4.

3) Num semigrupo regular à esquerda e à direita, *pode acontecer que uma identidade local não seja idempotente.*

Assim, no exemplo anterior, o elemento 2 é uma identidade local de 0 e não é idempotente.

A este respeito podemos estabelecer o seguinte

TEOREMA 1: *Se* S *é um semigrupo regular à esquerda e à direita e se o elemento* $e\in S$ *é uma identidade local, então* e *é idempotente se e só se existem em* S *elementos* a *e* x *tais que*

$$(3) \qquad ea=ae=a, \quad e=xa.$$

DEM. Com efeito, se e é idempotente, então as condições (3) são satisfeitas, pondo $a=x=e$. Inversamente, se as condições (3) são satisfeitas, então tem-se

$$ee=xae=xa=e,$$

como se pretendia mostrar.

Em particular, se x e y são tais que $xaa=a=aay$, então a identidade local de a dada por $e_a=xa=ay$ é idempotente.

3. Grupos encarados como semigrupos regulares à esquerda e à direita

Há semigrupos regulares à esquerda e à direita que possuem elemento neutro e, no entanto, não são grupos. O semigrupo $S=\{0,2,4\}$ acima considerado é um exemplo de um tal semigrupo; o elemento neutro é 4. Este semigrupo tem dois elementos idempotentes, 0 e 4.

Do teorema anterior resulta imediatamente o seguinte

COROLÁRIO. *Um semigrupo regular à esquerda e à direita é um grupo, se e só se contém um único idempotente.*

Uma outra caracterização de um grupo como semigrupo regular à esquerda e à direita é dada pelo seguinte

TEOREMA 2. *É condição necessária e suficiente para que um semigrupo regular à esquerda e à direita* S *seja um grupo que*

(I) *Para cada* $a\in S$, *se* e_a *é uma identidade local de* a *e* i *é uma identidade local de* e_a, *então exista inverso de* e_a *relativo a* i;

(II) *Se* $a,b\in S$ *e* e_a *e* e_b *são identidades locais de* a *e* b, *respectivamente, então*

$$e_a e_b = e_a e_b.$$

DEM. As condições (I) e (II) são evidentemente necessárias. Vejamos que são também suficientes.

Seja, com efeito, a um elemento qualquer de S e sejam x e y elementos de S tais que

$$xaa=a=aay.$$

Então sabemos que o elemento $e_a=xa=ay$ é uma identidade local de a. Se i designa também uma identidade local de a, tem-se

$$ie_a=iay=ay=e_a=xa=xai=e_ai,$$

o que mostra que i é também uma identidade local de e_a.

Daqui resulta, pela condição (II), que existe algum elemento $z\in S$ tal que

$$(4) \qquad i=ze_a=zxa.$$

Pelo teorema 1, concluimos que i é um idempotente e, por consequência, tem-se, em virtude de (4),

$$i = ii = zxazxa = zayzay =$$
$$= ze_a ayze_a ay = iayiay =$$
$$= ayay = e_a e_a = e_a .$$

Isto significa que, para cada elemento, existe uma única identidade local, e tal identidade é idempotente.

Sejam agora e_a e e_b as identidades locais de a e b, respectivamente.

Então, em virtude da condição (II), tem-se, atendendo à idempotência de e_a e e_b,

$$e_a e_a e_b = e_a e_b = e_b e_a = e_b e_a e_a ,$$
$$e_a e_b e_b = e_a e_b = e_b e_a = e_b e_b e_a = e_b e_a e_b ,$$

quer dizer, e_a e e_b são identidades locais do elemento $e_a e_b$, sendo, por consequência,

$$e_a = e_b .$$

Concluimos assim que existe em S um elemento neutro $e = e_a = e_b$.

Ora, de (ii) resulta que, para cada a existe um elemento $a' = b_a$ tal que $aa' = a'a = e$, isto é, S é um grupo, como queríamos provar.

É fácil ver que as condições (I) e (II) são independentes em semigrupos regulares à esquerda e à direita.

Assim, seja $S = \{0, 2, 4\}$ o semigrupo acima considerado e seja T um semigrupo com mais de um elemento, em que a operação é definida por

$$xy = y \text{ quaisquer que sejam } x, y \in T .$$

Tanto S como T são semigrupos regulares à esquerda e à direita e, além disso, S verifica a condição (II) e não a condição (I), enquanto que T verifica a condição (I) e não a condição (II).

BIBLIOGRAFIA

[1] Michael Gemignani, Amer. Math. Monthly, **72** (1965), p. 1021.

[2] D. F. Dawson, Amer. Math. Monthly, **74** (1967), p. 325

[3] José Morgado, *Note on the definition of a group,* Gazeta de Matemática, **101-102**, (1966), pp. 11-12.

Regularidade segundo Von Neumann e regularidade à esquerda e à direita em semigrupos

por *Maria Eulália Coutinho* (*)

1. Introdução

Seja S um semigrupo.

Diz-se que S é *regular* (no sentido de Von Neumann) se, para todo $a \in S$, existe algum $z \in S$ tal que

$$aza = a .$$

Diz-se que S é *regular à direita,* se, para todo $a \in S$, existe algum $x \in S$ tal que

$$aax = a .$$

Diz-se que S é *regular à esquerda* se, para todo $a \in S$, existe algum $y \in S$ tal que

$$yaa = a .$$

Em recente seminário realizado no Instituto de Matemática, o Prof. José Morgado pôs a

(*) Estudante do Mestrado no Instituto de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco.