

## Panorama da Geodesia Contemporânea (\*)

por F. Teixeira de Queiroz

### 1. O problema geodésico.

Como acontece com toda a ciência em rápido desenvolvimento, é extremamente difícil a apresentação dum panorâmica da geodesia contemporânea porque, não só alguns dos factos expostos podem à altura da publicação estar já desactualizados, mas também, e principalmente, porque a exposição dum ciência em tais condições está muito mais marcada do que qualquer outra por influências subjectivas, que sempre existem, daquele que a expõe. A qualquer desses perigos nos expomos ao apresentar esta panorâmica dum ciência que, como tantas outras, adquiriu depois da segunda guerra mundial um desenvolvimento que se pode classificar de explosivo.

Deve-se um tal desenvolvimento a quatro factores fundamentais:

1) Uma melhor colaboração entre as nações a respeito dos problemas geodésicos.

2) O aparecimento de máquinas de calcular electrónicas que permitem a resolução de sistemas de equações lineares a um muito grande número de incógnitas.

3) O aparecimento de instrumentos electrónicos medidores de distâncias.

4) A colocação em órbita de satélites artificiais.

Parece-nos útil, porém, antes de abordarmos a influência que cada um destes pontos tem em geodesia, fazer um apanhado dos objectivos e métodos da geodesia clássica pois, só assim, será possível inserir e fazer ressaltar o papel que cada um dos factores acima assinalados desempenha no desenvolvimento e renovação desta ciência.

\*

A geodesia é uma ciência que tem como objectivo a determinação das dimensões e da forma da Terra. É uma das ciências mais antigas pois, já na Grécia clássica, AERATÓSTENES realizou uma determinação do raio da Terra.

Contudo, é por alturas da revolução francesa que a geodesia principia a adquirir o aspecto que tem hoje. Nessa altura, a observação dum cadeia de triângulos centrada em Paris e estendendo-se para Norte e Sul da Europa, levou alguns geodetas a formularem a hipótese de ser a Terra sensivelmente um elipsóide alongado de revolução (elipsóide de CASSINIS). Tal hipótese deu origem a uma grande controvérsia pois estava em contradição com a teoria de NEWTON e HUYGENS a qual conduzia a admitir ser um elipsóide achatado de revolução o que melhor se adaptava à forma da Terra. A fim de decidir

---

(\*) O presente artigo consta de dois extractos, a Introdução e o Capítulo V, do trabalho apresentado pelo Autor ao Concurso organizado pela «Gazeta de Matemática» com o apoio da Fundação Calouste Gulbenkian e que mereceu o 2.º prémio da Secção B.

qual o elipsóide que melhor se adaptava à Terra, a Academia das Ciências de Paris mandou, em 1735, duas expedições para regiões de latitude elevada com o objectivo de aí medirem arcos que se podessem comparar com o da Europa Central. Uma das expedições, enviada para a Patagónia, depois de inúmeras peripécias, ficou impossibilitada de chegar a resultados conclusivos. A outra, enviada para a planície de Lapland, pôde provar ter a Terra uma forma mais próxima dum] elipsóide achatado do que dum alongado.

Com a controvérsia acima referida ficou posto um dos problemas fundamentais da geodesia: a determinação do elipsóide que melhor se ajusta à superfície da Terra.

Este problema é duma importância capital pois é sobre uma tal superfície que, na geodesia clássica, se efectuam os cálculos das observações geodésicas. Portanto, estes conduzem a resultados diferentes conforme o elipsóide escolhido, afastando-se tanto mais dos valores observáveis quanto mais diferir a superfície terrestre desse elipsóide. Evidentemente não se pode pensar que toda a massa de observações, feita ou a fazer, possa ser referida automaticamente a um elipsóide satisfatório. Escolhido um, ele é conservado durante o maior tempo possível, já que a mudança de milhares de dados observados, dum elipsóide para outro é uma operação muito dispendiosa. Além disso, não sendo a Terra uma superfície regular, pode haver um elipsóide que se ajuste melhor a uma dada região e que não seja satisfatório para outra.

Fixado um elipsóide de referência, todo o ponto do espaço pode ser determinado pela normal ao elipsóide que passa por ele e pela distância do ponto (afectada dum sinal) a esse elipsóide. Em particular, podem ser referidos a essa superfície todos os pontos da superfície terrestre. Na prática, é porém impossível, duma maneira simples, determinar

num ponto da superfície terrestre, a normal a um elipsóide dado. Contudo, sempre que o elipsóide escolhido seja uma boa aproximação da superfície terrestre, a vertical desse lugar é uma linha vizinha da normal referida. É por isso que todas as observações geodésicas são baseadas nessa vertical.

Assim, nas observações astronómicas determinam-se os parâmetros da vertical que passa pelo lugar de observação.

Na triangulação geodésica medem-se rectilíneos de diedros cujas arestas são tangentes a verticais.

No nivelamento geométrico determina-se a equidistância dos planos horizontais (Planos perpendiculares à referida vertical) que passam em lugares vizinhos.

Finalmente nas medições da gravidade determina-se qual a superfície equipotencial (superfície normal às verticais) que passa por um lugar dado.

Desta forma, nas observações geodésicas que referimos, ressalta a importância que tem o campo da gravidade terrestre, já que a vertical dum lugar não é senão a tangente, nesse lugar, à linha de corrente desse campo que passa por ele.

Aparece-nos assim, como segundo objectivo da geodesia, o estudo do campo da gravidade terrestre.

Da determinação das diferentes superfícies equipotenciais e das linhas de corrente desse campo deduz-se uma superfície (a superfície equipotencial de nível zero) que é uma melhor aproximação da superfície terrestre do que o elipsóide. Ela será a superfície que contém a superfície de equilíbrio dos oceanos. Em geodesia dá-se o nome de geoide a uma tal superfície.

Ficam assim definidas em geodesia três superfícies: a superfície terrestre, o geoide e o elipsóide de referência. A geodesia clássica desenvolve-se usando-as alternadamente: as observações são feitas sobre a primeira em relação à segunda e calculadas

sobre a terceira. Das vantagens e inconvenientes dum tal método teremos ocasião de falar no decorrer deste trabalho.

## 2. A Associação Internacional de Geodesia.

O estudo da figura da Terra não se pode compreender sem observações que abranjam, senão a totalidade, pelo menos uma grande extensão da superfície terrestre. Para a realização de tais observações é fundamental um perfeito acordo entre as nações, não só para que aquelas tenham sensivelmente a mesma precisão mas, principalmente, para que se possam interligar.

O trabalho de coordenação e de sistematização das observações, bem como a compilação dos estudos acerca da forma da Terra, tem sido realizado pela Associação Internacional de Geodesia (AIG).

A AIG que tem hoje, praticamente, representações de todas as nações completou há poucos anos o seu primeiro centenário. Criada com o nome de Associação Geodésica Internacional, funcionou desde 1862 até 1914, altura em que a guerra interrompeu a sua actividade. Tornada a criar em 1922, já com o nome de AIG, a sua actividade tem-se mantido até à actualidade.

Apraz-nos salientar que o bom entendimento entre as secções das diferentes nações permitiu colocar ao serviço da AIG assuntos tais como as coordenadas geográficas de pontos bem definidos, os quais até há bem pouco tempo eram classificados como segredo militar.

A AIG foi primitivamente criada para interligar os países do centro da Europa mas tornou-se rapidamente uma organização à escala planetária, podendo hoje reenviçar com orgulho o título da mais antiga organização científica mundial.

A sua actividade foi estruturada numa sequência de congressos:

Em Berlim nos anos de 1864 e de 1867, em Viena (1871), em Dresde (1870), em Stuttgart (1877), em Munique (1880), em Roma (1883), novamente em Berlim (1886), em Paris (1889), em Copenhague (1903), em Budapeste (1906), em Cambridge (1909). Com esta reunião terminou a primeira fase da vida desta organização.

Se quiséssemos apontar os nomes de alguns geodetas que se distinguiram durante este período três aparecem imediatamente destacados: GAUSS, BESSEL e HELMERT. Porém, numa organização deste tipo, é o trabalho contínuo de observação, sistematização e cálculo que mais convém destacar.

Durante o primeiro período de actividade da organização pode-se apresentar como obra realizada:

A Convenção Internacional do Metro que permitiu uniformizar as unidades de comprimento.

O Serviço Internacional de Latitudes ao qual está entregue a conservação da hora.

A repetição, com precisão muito maior, da observação dos arcos em regiões de latitude elevada, a que já fizemos referência no início deste trabalho.

A medição de diversos arcos de paralelos e de meridianos.

Determinações de desvios da vertical, pesquisas sobre isostasia e sobre marés terrestres, etc.

A seguir à guerra de 1914-1918 voltou a pôr-se a necessidade da Instituição. A mesma foi integrada numa União Geodésica e Geofísica Internacional da qual passou a ser uma das Associações.

Realizaram-se as Assembleias Gerais de Roma (1922), Madrid (1924), Praga (1927), Estocolmo (1930), Lisboa (1933), Edinburgo (1936), Washington (1939), e a seguir à segunda guerra mundial, Oslo (1948), Bruxelas (1951), Roma (1954), Toronto (1957), Helsinquia (1960) e Berkeley (1964).

A estrutura da AIG tem evoluído sendo

actualmente formada por cinco secções: determinação geométrica de posições, nivelamento e movimentos dos solos, astronomia geodésica e satélites artificiais, gravimetria e geodesia física.

Para dar uma primeira ideia da problemática da geodesia contemporânea, damos a seguir um apanhado dos principais problemas que são o objecto de cada uma destas secções:

I Secção: Triangulações e trilaterações, poligonais de alta precisão, bases, medições electromagnéticas e ópticas de distâncias, nivelamento trigonométrico, refacção atmosférica, cálculo.

II Secção: Altitudes, definições, nivelamento de precisão, métodos e instrumentos, resultados, precisões e cálculos, movimentos horizontais e verticais do solo.

III Secção. Métodos de observação em astronomia geodésica, variação das latitudes e das longitudes, problemas da hora, utilização geométrica dos satélites artificiais.

IV Secção: Medições absolutas e relativas da gravidade, estabelecimento dum rede gravimétrica mundial homogénia, bases de calibração, estabelecimento de cartas de anomalias da gravidade, utilização prática dos métodos de redução.

V Secção: Desvios da vertical, reduções da gravidade, interpretação física das anomalias da gravidade, determinação do potencial exterior e do campo gravítico terrestre, utilização dinâmica dos satélites artificiais, marés terrestres.

A estruturação da AIG em cinco secções não é suficiente para abordar os diferentes problemas da geodesia moderna. Por isso, sempre que um problema o justifique, é criada uma Comissão Permanente ou, pelo tempo que for julgado necessário, um Grupo Especial de Estudo (que pode eventualmente ser desdobrado em subgrupos) a que ficam ades-

trictos os membros da AIG a que ele interesse. O problema é estudado por esse grupo dum forma permanente e, quando se justifique, em sessões de trabalho.

A seguir ao congresso de Berkeley as comissões permanentes ficaram a ser:

1.<sup>a</sup> Comissão: Nova compensação de conjunto das triangulações europeias. 2.<sup>a</sup> Comissão: Estabelecimento dum rede europeia de nivelamento unificada (REUN). 3.<sup>a</sup> Comissão: comissão gravimétrica internacional. 4.<sup>a</sup> Comissão: marés terrestres. 5.<sup>a</sup> Comissão: bibliografia geodésica. 6.<sup>a</sup> Comissão: movimentos recentes da crosta terrestre. 7.<sup>a</sup> Comissão: satélites artificiais.

Quanto aos grupos de estudo foram criados os seguintes (indicamos entre parêntesis a secção a que o grupo diz respeito):

GEE 1 (I) Problemas teóricos respeitantes ao cálculo e à compensação das grandes triangulações. GEE 2 (I) Cálculo das redes de SHORAN (e de processos análogos) e das grandes geodésicas. GEE 3 (II) Estudo dos erros sistemáticos dos nivelamentos de precisão por métodos de análise estatística. GEE 4 (III) Estudo crítico dos métodos de astronomia geodésica. GEE 5<sub>1</sub> (IV) Determinações absolutas da gravidade. Ligações entre estações absolutas. Fórmula da gravidade normal. GEE 5<sub>2</sub> Técnica das observações gravimétricas. GEE 6 (IV) Estabelecimento dum base europeia de calibração de gravímetros. Bases de calibração GEE 7 (IV) Sobre a oportunidade da adopção dum sistema único de decomposição em zonas para o cálculo das reduções topográficas (e isostáticas) e para o cálculo dos desvios absolutos da vertical. GEE 8 (V) Reduções das observações gravimétricas com vista à sua utilização na fórmula de STOKES. GEE 9 (III) Emprego em geodesia dos resultados das observações lunares e de satélites artificiais

(eclipses, ocultações, fotografias sobre um campo estelar, etc.). GEE 10 (V) Determinação do geóide europeu pelos desvios relativos da vertical. GEE 11 (V) Interpretação geofísica das anomalias da gravidade. GEE 12 (I) Utilização nos diferentes domínios da geodesia das modernas máquinas de cálculo (máquinas de cartões perfurados, de fita magnética, etc.). GEE 13 (I) Determinação dos movimentos da crosta terrestre (exceptuando o das marés) por todas as medidas susceptíveis de serem realizadas à superfície da Terra. GEE 14 (I) Especificações das precisões requeridas para as triangulações e as trilaterações. Pontos de LAPLACE. Emprego combinado de trilaterações e triangulações. GEE 15 (V) Estudo das secções do geóide que atravessam largas regiões do mar (Creta, Egipto, Canadá, etc.). GEE 16 (V) Estudo prático sobre a aplicação à fórmula de STOKES das anomalias definidas pela teoria de J. DE GRAAF HUNTER. GEE 17 (IV) Resultados obtidos por observação de satélites artificiais acerca do campo da gravidade terrestre. GEE 18 (IV) Métodos para a determinação absoluta da gravidade. GEE 19 (I) Medições electrónicas de distâncias. GEE 20 (IV) Medições da gravidade no mar (em submarinos e em navios). GEE 21 Cálculos numéricos com interesse para as grandes triangulações. GEE 22 (II) Estudo do nível médio dos mares. GEE 23 Estudo da refacção atmosférica. GEE 24 Notações e nomenclatura a usar em geodesia. GEE 25 (III) Observações ópticas de satélites artificiais. GEE 26 (III) Ligações geodésicas por meio de satélites artificiais. GEE 27 (III) Navegação por meio de satélites artificiais. GEE 28 (V) Dinâmica dos satélites artificiais.

Demos uma tão extensa lista de agrupamentos da AIG por nos parecer que assim destacávamos melhor um certo número de problemas da geodesia moderna. Teremos

o ocasião de nos referir a alguns particularmente.

A Associação Internacional de Geodesia publica uma revista, o «Bulletin Géodésique», ao qual fomos buscar os elementos relativos a esta Associação.

\*

Redigidas estas notas em 1965, são publicadas em 1970. Como não notar desactualizações? As palavras com que abrimos estas notas confirmaram-se plenamente. Contudo, quere-nos parecer que o contexto que serviu de base à redacção desta panorâmica da geodesia ainda se mantém o que justifica a sua publicação. Ao fazê-lo, importa assinalar os principais factos que introduzem desactualizações e os principais pontos onde uma influência subjectiva marcada, pode ter conduzido a um erro de apreciação.

Assim, importa assinalar os seguintes factos ocorridos durante este período :

a) A conclusão dos projectos de observação baseados nos satélites ECOS, GEOS e PA-GEOS.

b) A introdução dum novo elipsóide internacional de referência: o IAU, 1963.

c) O início dum novo capítulo da geodesia: o estudo da forma da Lua. A este novo capítulo deu-se o nome de selenodesia (\*).

d) O início e possível conclusão do projecto SECOR.

Como influência subjectiva, assinalamos a importância excessiva que demos às observa-

(\*) Quere-nos parecer que o nome de geodesia lunar teria sido mais apropriado. O que realmente se está a passar neste momento é o facto do objecto da geodesia estar a sofrer uma mutação: de ciência que estuda a forma da Terra tende a transformar-se na ciência que estuda a forma dum Planeta qualquer. Onde se justifica a conservação do nome da ciência mas não o seu conteúdo. Tal como aconteceu à geometria.

ções ópticas de satélites em detrimento das observações baseadas no efeito DOPPLER-FIZEAU. O segundo tipo de observações revela-se de momento mais preciso do que o primeiro.

Como resultado de tal precisão, a geodesia por satélites encontra-se de momento diferenciada em dois sectores. Um, o da «geodesia rica» utiliza satélites activos do tipo GEOS e SECOR. É a geodesia dos Estados Unidos e da União Soviética. O outro, o da «geodesia pobre», utiliza satélites passivos do tipo ECO, PAGEOS ou Diamante. É a geodesia da Europa.

## ELEMENTOS DE GEODESIA DINÂMICA

### 1. Introdução.

Mostramos nos dois últimos capítulos a importância que tinha em geodesia a determinação do potencial do campo da gravidade. Essa determinação fazia-se decompondo o campo da gravidade num campo de gravidade normal e num campo de perturbação. Ao primeiro correspondia um potencial de gravidade normal e ao segundo um potencial de perturbação,  $T$ .

A geodesia dinâmica tem por objectivo estudar o campo de gravitação terrestre. Para isso, decompõe este num campo de gravitação normal e num campo de perturbação. Para campo de gravitação normal toma-se um campo de simetria esférica. Em tais condições, o potencial de perturbação é o mesmo usado em geodesia física quando se toma como superfície de referência uma esfera.

Se desenvolvermos o potencial de perturbação em série de LEGENDREANOS, tal como o fizemos nos capítulos anteriores, o problema central da geodesia dinâmica será o da deter-

minação dos coeficientes  $J_n$ ,  $J_{nm}$ , e  $K_{nm}$ : Essa determinação faz-se pela análise das perturbações causadas no movimento dos satélites artificiais devido à existência do potencial de perturbação.

Torna-se então necessário separar as perturbações causadas pelo campo de perturbação daquelas devidas a diversos efeitos parasitários. Destes, os mais importantes são o atrito da atmosfera, a atracção do Sol e da Lua e a pressão da radiação solar. Destas perturbações parasitárias as de mais difícil controle são a pressão de radiação e o atrito atmosférico pois dependem grandemente da actividade solar. A fim de minimizar os seus efeitos, são escolhidos satélites cujas órbitas tenham um perigeu não muito pequeno e um apogeu não muito grande, pois a acção da atmosfera faz-se sentir quando o satélite está mais próximo da Terra e a perturbação causada pela pressão de radiação é tanto maior quanto mais afastado está o satélite da Terra. Além disso escolhem-se para estudo satélites pequenos e pesados.

A órbita é escolhida em conformidade com a perturbação a analisar. Para isso procura-se uma órbita que torne máximas as perturbações de interesse geodésico e mínimas as perturbações parasitárias. Em geral, uma dada perturbação não é estudada só relativamente a uma dada órbita. Procuram-se observar satélites em diversas órbitas, com diferentes inclinações (afastadas em geral da inclinação crítica), para se obter uma determinação suficientemente precisa. Um método a usar é o da escolha de satélites onde os harmónicos em estudo criem fenómenos de ressonância.

### 2. As equações do movimento dum satélite.

As equações do movimento dum satélite artificial sob a acção dum campo criado por um potencial da forma

$$(1) \quad W = \frac{fM}{r} + T = \frac{fM}{r} \cdot \left( 1 + \sum \frac{J_n P_n + \Sigma (J_{nm} \cos m\lambda + K_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}}{r^n} \right)$$

são mais facilmente deduzidas se utilizarmos um sistema de coordenadas esféricas. Com efeito, consideremos um sistema de coordenadas esféricas, com origem no centro de massas do corpo atraente e introduzidas por meio de

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta \cos \eta \\ y &= r \cos \theta \sin \eta \\ z &= r \sin \theta \end{aligned}$$

Será então

$$\begin{aligned} ds^2 &= dx^2 + dy^2 + dz^2 = \\ &= dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \cos^2 \theta d\eta^2 \end{aligned}$$

e a força viva do satélite, que supomos de massa  $m$ , será

$$(2) \quad 2T = m(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \cos^2 \theta \dot{\eta}^2).$$

Com auxílio das equações de LAGRANGE obtemos para componentes da aceleração da partícula.

$$\begin{aligned} \gamma_r &= \frac{1}{m} \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial T}{\partial r} \right) = \frac{1}{m} Q_r \\ \gamma_\theta &= \frac{1}{m} \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) = \frac{1}{m r} Q_\theta \\ \gamma_\eta &= \frac{1}{m} \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\eta}} - \frac{\partial T}{\partial \eta} \right) = \frac{1}{m r \cos \theta} Q_\eta \end{aligned}$$

onde as segundas igualdades são uma consequência de ser o trabalho realizado pelo campo, quando o satélite sofre um deslocamento  $dP$ , igual a

$$\begin{aligned} dW &= Q_i dP^i = Q_r dr + Q_\theta d\theta + Q_\eta d\eta = \\ &= m \gamma^i dP_i = m(\gamma^r dr + \gamma^\theta r d\theta + \gamma^\eta r \cos \theta d\eta). \end{aligned}$$

Com a força viva dada por (2) e o potencial da intensidade de campo dado por (1), as equações do movimento podem ser escritas

$$(3) \quad \begin{aligned} \gamma^r &= r'' - r \theta'^2 - r \cos^2 \theta \eta'^2 = \frac{\partial W}{\partial r} \\ \gamma^\theta &= \frac{1}{r} (r^2 \theta')' - r \cos \theta \sin \theta \eta'^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial \theta} \\ \gamma^\eta &= \frac{1}{r \cos \theta} (r^2 \cos^2 \theta \eta')' = \frac{1}{r \cos \theta} \frac{\partial W}{\partial \eta} \end{aligned}$$

A decomposição do potencial, no potencial de gravitação normal e no potencial de perturbação  $T$ , permite-nos escrever, em vez de (3), as equações com a forma

$$\begin{aligned} r'' - r \theta'^2 - r \cos^2 \theta \eta'^2 + \frac{fM}{r^2} &= \frac{\partial T}{\partial r} \\ \frac{1}{r} (r^2 \theta')' + r \cos \theta \sin \theta \eta'^2 &= \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} \quad (I) \\ \frac{1}{r \cos \theta} (r^2 \cos^2 \theta \eta')' &= \frac{1}{r \cos \theta} \frac{\partial T}{\partial \eta} \end{aligned}$$

### 3. O problema dos dois corpos.

Se anularmos os segundos membros do sistema de equações I, obtemos as equações do movimento dum satélite sob a acção do campo de gravitação normal escolhido. É o conhecido problema dos dois corpos, visto o anulamento do segundo membro equivaler a admitir que o corpo atraente tem simetria esférica. As equações I tomam a forma

$$\begin{aligned} r'' - r \theta'^2 - r \cos^2 \theta \eta'^2 + \frac{fM}{r} &= 0 \\ \frac{1}{r} (r^2 \theta')' + r \cos \theta \sin \theta \eta'^2 &= 0 \quad (II) \\ \frac{1}{r \cos \theta} (r^2 \cos^2 \theta \eta')' &= 0 \end{aligned}$$

Adoptamos, ao estabelecer o sistema de equações, um sistema de coordenadas esférico cujo plano de referência era arbitrário. Vamos agora admitir que esse plano contém no instante  $t_0$ , não só o ponto material, como ainda é paralelo à velocidade dele no mesmo instante. Por outras palavras, vamos admitir que no instante  $t_0$  é  $\eta = \eta' = 0$ . Em tais condições, a última das equações II admite o integral primeiro  $r^2 \cos^2 \theta \eta' = k$  que se reduz a  $\eta' = 0$ . Com uma segunda integração resultará  $\eta = k_1 = 0$ . Vemos que a trajectória do ponto material é uma curva plana que está agora contida no plano de referência. Em tais condições o sistema II toma a forma mais simples

$$(2) \quad r'' - r \theta'^2 + \frac{fM}{r^2} = 0$$

$$(r^2 \theta')' = 0.$$

A segunda equação dá origem ao integral primeiro

$$(3) \quad \frac{1}{2} r^2 \theta' = k$$

que exprime que a velocidade areolar é constante. A eliminação do tempo entre a primeira das equações (2) e (3) dá-nos uma nova equação que determina a trajectória. Seja  $1/r = u = f(\theta)$  a sua solução. Será então

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{du} \cdot \frac{du}{d\theta} \theta' = -\frac{1}{u^2} \cdot \frac{2k}{r^2} \cdot \frac{du}{d\theta} =$$

$$= -2k \frac{du}{d\theta}$$

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = -2k \frac{d^2 u}{d\theta^2} \cdot \theta' = -4k^2 u^2 \frac{d^2 u}{d\theta^2}$$

e, portanto, essa equação escrever-se-á

$$(4) \quad \frac{d^2 u}{d\theta^2} + u - m = 0$$

em que  $m = \frac{fM}{4k^2}$ . Esta equação tem uma solução da forma  $u - m = k \cos(\theta - \theta_0)$  o que mostra que a trajectória, visto não ter pontos impróprios, é uma elipse. Escrevemos a solução de (4) com a forma

$$(5) \quad \frac{1}{r} = \frac{1 + e \cos(\theta - \theta_0)}{a(1 - e^2)} = \frac{1 + e \cos \theta}{a(1 - e^2)}.$$

A integração do sistema II leva ao aparecimento de seis constantes. A forma como eliminamos  $\eta$ , mostra-nos que duas das constantes deverão determinar o plano da trajectória. Duas outras determinam a forma da elipse (5) descrita pelo satélite. Finalmente, as duas restantes são necessárias para determinar o movimento do satélite na sua órbita. Tomaremos, para definir a órbita descrita pelo ponto, o semi-eixo maior,  $a$ , e a excentricidade,  $e$ . O plano da órbita ficará definido pelo conhecimento da sua inclinação,  $i$  sobre o plano de referência  $XOY$  e ainda pelo conhecimento dum seu ponto nesse plano. Chamamos nodo ascendente o ponto em que o satélite passa do hemisfério Sul para o hemisfério Norte. A outra constante a ser introduzida é a ascensão recta (ou a longitude) do nodo ascendente,  $\Omega$ . Por fim, para determinar o movimento do astro, introduzimos o instante,  $\tau$ , em que ele passa mais próximo do corpo atraente (Instante da passagem no periastro) e o argumento do periastro,  $\omega$ , que é o arco da órbita compreendido entre o nodo ascendente e o periastro. A estas constantes  $a$ ,  $i$ ,  $\omega$ ,  $\Omega$ ,  $\tau$ , dá-se o nome de constantes elípticas.

Para acabar de resolver o problema dos dois corpos, torna-se necessário fazer ainda a integração de (3). Para a fazermos, vamos introduzir a variável auxiliar  $E$  dada por

$$(6) \quad r = a(1 - e \cos E).$$

Será

$$1 - e^2 = (1 + e \cos v) \cdot (1 - e \cos E)$$

e portanto

$$(7) \quad \cos v = \frac{\cos E - e}{1 - e \cos E},$$

$$\sin v = \frac{\sqrt{1 - e^2} \sin E}{1 - e \cos E}$$

ou, o que é equivalente,

$$(8) \quad \operatorname{tg}^2 \frac{v}{2} = \frac{1 - \cos v}{1 + \cos v} = \frac{1 + e}{1 - e} \operatorname{tg}^2 \frac{E}{2}.$$

Finalmente, derivando (7), teremos

$$\sin v \frac{dv}{dE} = \frac{(1 - e^2) \sin E}{(1 - e \cos E)^2}$$

ou seja

$$(9) \quad \frac{dv}{dE} = \frac{\sqrt{1 - e^2}}{1 - e \cos E}.$$

Utilizando esta relação e (6) para fazer uma mudança de variável em (3), somos conduzidos a

$$(10) \quad r^2 \frac{dv}{dt} = 2k = a^2 \sqrt{1 - e^2} (1 - e \cos E) \frac{dE}{dt}$$

Introduzindo a constante auxiliar

$$n = \frac{2k}{a^2 \sqrt{1 - e^2}}$$

e fazendo a integração temos

$$(11) \quad E - e \sin E = n(t - \tau).$$

A posição do corpo atraído será então determinada por meio de

$$M = n(t - \tau)$$

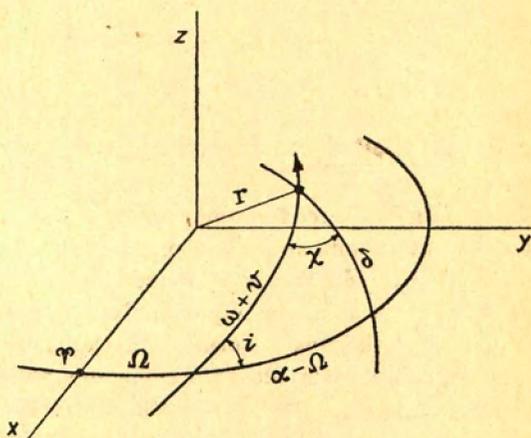
$$E = e \sin E = M$$

$$\operatorname{tg} \frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1 + e}{1 - e}} \operatorname{tg} \frac{E}{2} \quad (III)$$

$$r = a(1 - e \cos E)$$

$$\operatorname{tg}(\alpha - \Omega) = \cos i \operatorname{tg}(\omega + v)$$

$$\sin \delta = \sin i \sin(\omega + v).$$



Usando (6), (9) e (10) vemos que

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{dv}{dt}\right)^2 = \frac{n^2 a^2}{r^2} (a^2 - a^2 e^2 \cos^2 E).$$

Usando novamente (6) podemos formar a constante das forças vivas

$$h = \frac{1}{2} \left[ \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{dv}{dt}\right)^2 \right] - \frac{fM}{r} = -\frac{n^2 a^2}{2} + \frac{n^2 a^5 - fM}{r}$$

o que mostra ser

$$(12) \quad 2h = -n^2 a^2 \quad n^2 a^5 = fM.$$

Finalmente, a partir de (10), vemos que o momento cinético da unidade de massa, constantemente normal ao plano da órbita, tem

a grandeza

$$(13) \quad r^2 \frac{dv}{dt} = n a^2 \sqrt{1-e^2} = \sqrt{f M a (1-e^2)}.$$

As suas coordenadas no referencial celeste que introduzimos anteriormente, serão

$$\sqrt{f M a (1-e^2)} \operatorname{sen} i \operatorname{sen} \Omega,$$

$$\sqrt{f M a (1-e^2)} \operatorname{sen} i \cos \Omega, \sqrt{f M a (1-e^2)} \cos i.$$

#### 4. A análise das perturbações.

Mostrámos já como obter as equações de LAGRANGE quando se toma como coordenadas esféricas  $r, \alpha, \delta$ . Isto é tomámos como plano de referência o plano equatorial. Porém, o método que usámos é geral: poderíamos ter tomado como plano de referência um plano qualquer. As equações das perturbações simplificam-se grandemente quando se toma para plano de referência o plano da órbita no instante  $t$ . Com efeito, nesse caso, o momento de inércia é normal ao plano de referência. Em vez de  $\alpha$  usamos  $v$ . Podemos decompor a força perturbadora numa componente radial,  $R$ , numa componente transversa,  $T$  (situada no plano da órbita) e numa componente bitransversa,  $B$  (Perpendicular ao plano da órbita). Em tais condições as equações de LAGRANGE são:

$$\frac{da}{dt} = \frac{2}{n\sqrt{1-e^2}} [e \operatorname{sen} v R + (1 + e \cos v) T]$$

$$\frac{de}{dt} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{na} [\operatorname{sen} v R + (\cos v + \cos E) T]$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{na} \frac{\cos(\omega + v)}{1 + e \cos v} B$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{na \operatorname{sen} i} \frac{\operatorname{sen}(\omega + v)}{1 + e \cos v} B \quad (IV)$$

$$\frac{d\omega}{dt} + \cos i \frac{d\Omega}{dt} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{nae} \left[ -\cos v R + \operatorname{sen} v \left( 1 + \frac{1}{1 + e \cos v} \right) T \right]$$

$$\frac{d\tau}{dt} - \frac{1}{n} \left( \frac{d\omega}{dt} + \cos i \frac{d\Omega}{dt} \right) = \frac{1}{n^2 a} \left[ \frac{2(1-e^2) \operatorname{sen} E - 3ne \operatorname{sen}^2 v (t-\tau)}{(1+e \cos v) \operatorname{sen} E} R - \frac{3 \operatorname{sen} v}{\operatorname{sen} E} n(t-\tau) T \right].$$

Como em  $I$  a força perturbadora é dada pelas suas componentes radial  $\left( R = \frac{\partial T}{\partial r} \right)$ , meridiana  $\left( M = \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \delta} \right)$  e perpendicular  $\left( P = \frac{1}{r \operatorname{sen} \delta} \frac{\partial T}{\partial \alpha} \right)$  será

$$(1) \quad \begin{aligned} R &= R \\ T &= M \cos \chi + P \operatorname{sen} \chi \\ B &= M \operatorname{sen} \chi - P \cos \chi \end{aligned}$$

em que  $\chi$  é o ângulo que o plano meridiano que contem o satélite faz com o plano da órbita. Pela figura da página 95 vemos que

$$(2) \quad \begin{aligned} \cos i &= \cos \delta \operatorname{sen} \chi \\ \operatorname{sen} i \cos(\omega + v) &= \cos \delta \cos \chi \\ \operatorname{sen} i \operatorname{sen}(\omega + v) &= \operatorname{sen} \delta. \end{aligned}$$

KING-HELE toma em primeira aproximação  $P=0$ . Corresponde isso a considerar o corpo atraente como sendo de revolução. Uma tal aproximação, porém, só pode ser válida quando a inclinação da órbita não for pequena. Para pequenos valores de  $i$ , o factor que multiplica  $\frac{\partial T}{\partial \alpha}$  é grande e portanto  $P$  toma valores consideráveis. Isso mostra-nos que se devem usar satélites com órbitas de pequena inclinação quando se desejam determinar os harmónicos em xadrez.

Uma variante das equações de LAGRANGE quando, como no caso presente, as forças de perturbação derivam dum potencial  $T$ , é

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\frac{2}{n^2 a} \frac{\partial T}{\partial \tau} \\ \frac{de}{dt} &= -\frac{\sqrt{1-e^2}}{n a^2 e} \frac{\partial T}{\partial \omega} - \frac{1-e^2}{n^2 a^2 e} \frac{\partial T}{\partial \tau} \\ \frac{di}{dt} &= -\frac{1}{n a^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} \frac{\partial T}{\partial \Omega} \\ &\quad - \frac{\operatorname{tg} \frac{i}{2}}{n a^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial T}{\partial \omega} \end{aligned} \tag{V}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\Omega}{dt} &= \frac{1}{n a^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} \frac{\partial T}{\partial i} \\ \frac{d\omega}{dt} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{n a^2 e} \frac{\partial T}{\partial e} + \frac{\operatorname{tg} \frac{i}{2}}{n a^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial T}{\partial i} \\ \frac{d\tau}{dt} &= \frac{2}{n^2 a} \frac{\partial T}{\partial a} + \frac{1-e^2}{n^2 a^2 e} \frac{\partial T}{\partial e} \end{aligned}$$

Vários outros sistemas equivalentes têm sido usados. Entre eles destaca-se o obtido por DELAUNAY para o estudo do movimento lunar. Em todos esses sistemas, bem como nos que já referimos, torna-se necessário exprimir o segundo membro em função dos elementos elípticos e do tempo.

As perturbações a estudar são decompostas como habitualmente, em perturbações periódicas e seculares. No estudo das perturbações seculares não é necessário entrar em consideração com os coeficientes  $J_{nm}$  e  $K_{nm}$  pois, a existência do movimento de rotação da Terra, é suficiente para fazer com que as perturbações correspondentes sejam periódicas.

O potencial de perturbação causa perturbações mais sensíveis no movimento do periéu e do nodo ascendente. Daí, utilizarem-se

quase exclusivamente, as equações em  $\Omega$  e  $\omega$  para o estudo do potencial terrestre. A introdução dos elementos da órbita nas equações das perturbações permite dar às equações das perturbações seculares a forma

$$\begin{aligned} \frac{d\Omega}{dt} &= \sum c_n J_n + \sum c_{nm} J_n J_m \\ \frac{d\omega}{dt} &= \sum d_n J_n + \sum d_{nm} J_n J_m \end{aligned} \tag{3}$$

em que os coeficientes  $c_n$ ,  $c_{nm}$ ,  $d_n$  e  $d_{nm}$  são funções dos elementos elípticos. Assim, por exemplo, KING-HELE (considerando só quantidades até à ordem de  $J_2^2$ ) obtém

$$\begin{aligned} \frac{d\Omega}{dt} &= n \left( \frac{1}{1-e^2} \right)^2 \cos i \left[ \frac{3}{2} J_2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{9}{4} J_2^2 \left( \frac{1}{1-e^2} \right) \left( \frac{19}{12} \sin^2 i - 1 \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{15}{16} J_4 \left( \frac{1}{1+e^2} \right)^2 (y \sin^2 i - 4) \right] \\ \frac{d\omega}{dt} &= \frac{3}{4} n \left( \frac{1}{1-e^2} \right)^2 J_2 (5 \cos^2 i - 1). \end{aligned} \tag{4}$$

A segunda destas equações mostra-nos a importância que têm as órbitas com a inclinação  $i = 63,4^\circ$  para as quais  $5 \cos^2 i = 1$ . É de notar que um grande número de satélites soviéticos têm uma inclinação próxima. Isso permite diminuir as perturbações causadas por  $J_2$  no movimento do periéu.

A utilização de (3), calculado para diferentes satélites em órbitas distintas, e com inclinações variadas, permite, depois de determinado

$\frac{d\Omega}{dt}$  por observações determinar os coeficientes  $J_n$ . KING-HELE, por exemplo, faz uma determinação simultânea de  $J_2$ ,  $J_4$  e  $J_6$  usando o Sputnik 2 ( $i = 65^\circ$ ), o Vanguard 1 ( $i = 34^\circ$ ) e o Explorer 4 ( $i = 50^\circ$ ).

Em 1963 melhora o resultado obtido pelo estudo do movimento do nodo de sete satélites com inclinações variando de  $28,8^\circ$  até  $97,4^\circ$ . KOZAI em 1962 utiliza igualmente sete satélites mas com um número menor de órbitas.

#### Breve análise dos resultados obtidos.

Foram já realizadas várias determinações dos coeficientes  $J_n$ . Assim, dos valores comunicados ao congresso de Berkeley, destacamos os de KING-HELE e KOZAI a que já fizemos referência.

Ambas as determinações foram feitas pelo estudo do movimento secular do nodo ascendente. Os valores obtidos foram:

(Entre parêntesis indicam-se as precisões obtidas)

$$J_2 \cdot 10^6 \quad J_4 \cdot 10^6 \quad J_6 \cdot 10^6 \quad J_8 \cdot 10^6 \quad J_{10} \cdot 10^6 \quad J_{12} \cdot 10^6$$

KOZAI

$$\begin{array}{cccccc} +1082.48 & -1.84 & +0.39 & +0.002 & & \\ (0.04) & (0.09) & (0.09) & (0.07) & & \end{array}$$

KING-HELE

$$\begin{array}{cccccc} +1082.86 & -1.03 & +0.72 & +0.34 & -0.50 & +0.44 \\ (0.1) & (0.2) & (0.2) & (0.2) & (0.2) & (0.2) \end{array}$$

Os coeficientes de ordem ímpar foram estudados por meio das variações periódicas do perigeu, da excentricidade, da inclinação e do nodo ascendente. KOZAI dá-nos os valores

$$\begin{array}{cccc} J_3 \cdot 10^6 & J_5 \cdot 10^6 & J_7 \cdot 10^6 & J_9 \cdot 10^6 \\ -2.562 & -0.064 & -0.470 & -0.117 \\ (0.007) & (0.007) & (0.010) & (0.011) \end{array}$$

Estes resultados melhoram muito os que tinham sido obtidos por métodos gravimétricos. Com efeito JEFFREYS tinha chegado aos valores:

$$J_2 = (+1093 \pm 5) \cdot 10^{-6}, \quad J_3 = (-0.4 \pm 2.8) \cdot 10^{-6} \\ J_4 = (-2.2 \pm 2.1) \cdot 10^{-6}$$

valores estes que são de muito menor precisão.

Poderá supor-se, pelos valores dados, que os métodos da geodesia dinâmica vêm substituir, com vantagem, os métodos da gravimetria. Isso só em parte é verdade. Com efeito, a observação de satélites permite determinar, com uma muito grande precisão, os harmônicos de ordem inferior. A precisão com que se fazem estas determinações vai diminuindo à medida que a ordem dos harmônicos vai aumentando. Pelo contrário, a precisão com que se fazem as determinações pelos métodos gravimétricos é independente da ordem dos harmônicos. Além disso, certamente essa precisão melhorará à medida que forem aumentando o número de observações gravimétricas realizadas. Desta forma, é de esperar que os métodos gravimétricos e os métodos da geodesia dinâmica se completem harmoniosamente para, conjuntamente, determinarem o potencial terrestre.

#### 5. Conclusão.

Ao apresentar os diferentes métodos usados para determinar a forma da Terra, procuramos mostrar os problemas ligados a cada um. Para isso tivemos que os estudar separadamente desarticulando em parte a ciência geodésica. Na verdade esta, para fazer esse estudo, não recorre alternadamente a um e outro método mas, bem ao contrário, procura utilizá-los simultaneamente.

Já demos alguns exemplos da colaboração existente entre os diferentes métodos utilizados. Assim, vimos como o conceito de cota geopotencial era obtido a partir do nivelamento e da gravimetria. Vimos igualmente, no fim do parágrafo anterior, que o potencial terrestre era determinado pela colaboração da gravimetria e da geodesia dinâmica. Outros exemplos de trabalho conjunto dos diferentes ramos da geodesia podem ser apresentados.

No Capítulo I mostra-se como por meio de triangulação podemos definir referenciais ligados à Terra. A cada datum escolhido corresponde uma origem e um sistema de eixos bem determinado. A extensão e a conexão das diferentes redes permite reduzir os diferentes referenciais a utilizar a um número mínimo. O recurso a métodos de triangulação com grandes lados (triangulação por meio de fochos e satélites, medição de lados por meio de shoran, etc.) permitirá mesmo realizar um referencial único ligado à Terra. Este é impossível de realizar pelos métodos clássicos dada a impossibilidade de triangular as grandes extensões cobertas pelos oceanos.

Os métodos da geodesia geométrica são, porém, impotentes para fazer com que a origem de coordenadas do referencial terrestre adoptado seja o centro de massas terrestre. Será então necessário recorrer a métodos gravimétricos e de geodesia dinâmica para impor a condição que, nesse referencial, seja  $J_1 = 0$ .

Os diferentes pontos da Terra não são coordenados nesse referencial. São-no mais simplesmente pela introdução dum elipsoide auxiliar de forma muito vizinha da da Terra. Este pode ser de revolução ou triaxial. No primeiro caso, o seu achatamento será determinado por métodos gravimétricos e de geodesia dinâmica. Para isso impõe-se a condição do elipsoide ser uma superfície de nível dum campo de gravidade normal tal que uma função bem determinada de  $J_2$  e  $J_4$  tenha o mesmo valor nesse campo e no campo da gravidade terrestre.

Se abandonarmos a condição do elipsoide de referência ser de revolução, podemos então introduzir a condição do campo de gravidade normal ter os mesmos coeficientes  $J_{21}$  e  $K_{21}$  que o campo da gravidade terrestre. Isso determina a elipticidade do equador e a longitude do semi-eixo maior.

Vemos que a forma do elipsoide de referência é determinada com maior precisão

por métodos gravimétricos e de geodesia dinâmica. Estes são, porém, impotentes para nos darem as dimensões desse elipsoide. Temos então que recorrer a métodos da geodesia geométrica para determinar o valor do seu raio equatorial. Esta determinação está ligada ao ajuste de redes geodésicas.

Por meio desta última operação faz-se a colocação do elipsoide escolhido e, portanto, faz-se a escolha de referencial terrestre. Como dissemos o referencial obtido não tem o seu centro no centro de massas terrestre. Além disso, a cada rede geodésica corresponde um referencial distinto. A unificação dos diferentes referenciais é uma tarefa da geodesia dinâmica.

Com efeito na geodesia dinâmica, estuda-se o movimento dum satélite em relação a um referencial celeste que tem a sua origem no centro de massas terrestre. A passagem desse referencial celeste para qualquer referencial terrestre é obtida pelo estudo do movimento do pólo e das variações da velocidade de rotação da Terra. Este dar-nos-á elementos para estabelecer, em cada instante, uma rotação de eixos. A mudança de referencial ficará determinada a menos de uma translacção.

Conhecidos os coeficientes  $J_i$ ,  $J_{ik}$  e  $K_{ik}$  do potencial de atracção terrestre, podemos determinar o movimento dum satélite artificial. Observado este de diferentes pontos duma dada rede geodésica, podemos obter as coordenadas dele no referencial ligado a essa rede e em qualquer instante. A evolução do satélite permite-nos, além disso, determinar a translacção que nos faltava na mudança de referenciais a que nos referimos acima.

Finalmente, conhecidas, em qualquer instante, as coordenadas dum satélite relativamente a uma dada rede podemos, por meio de observações, ligar qualquer ponto de coordenadas desconhecidas a essa rede. O satélite comporta-se neste caso como um mensageiro que leva as coordenadas duma dada rede a qualquer ponto da Terra.

Neste caso, ao contrário do que acontecia no método de triangulação por meio de satélites, as observações não têm de ser simultâneas visto serem conhecidas as coordenadas do satélite observado. A precisão obtida não é contudo tão grande como no referido método, visto o satélite estar sujeito a perturbações que nem sempre são controláveis. Para que a precisão seja o maior possível, importa que as observações sejam realizadas em ocasiões em que as coordenadas do satélite sejam bem conhecidas. Para isso observa-se, do ponto desconhecido, o satélite pouco depois dele ter sido coordenado na rede adoptada. Neste caso o movimento do satélite foi pouco perturbado pelos valores mal conhecidos do potencial. Pode ainda observar-se o satélite depois dele ter dado uma revolução completa pois neste caso só há a considerar, apenas, as perturbações seculares.

O problema da determinação das coordenadas dum ponto terrestre pela observação dum satélite reduz-se então a :

Determinar as coordenadas dum ponto  $P$  quando dele se observaram satélites nas posições  $S_1, S_2, S_3, \dots, S_n$ , conhecidas.

A observação do satélite sobre um campo de estrelas permite determinar os correspon-

dentes vectores direccionais  $e_1, e_2, e_3, \dots$ . O ponto  $P$  será então determinado pelas equações vectoriais

$$\overrightarrow{S_i - P} = |S_i - P| \vec{e}_i.$$

A introdução de coordenadas aproximadas do ponto  $P$  permite formar as equações de observação.

O método que acabamos de indicar foi utilizado pelo Instituto Smithsoniano para interligar as principais redes geodésicas.

#### BIBLIOGRAFIA

- W. A. HEISKANEN and F. A. VENING-MEINESZ, *The Earth and its gravity field*. Bonford Geodesy.
- M. S. MOLODENSKI, V. E. EREMEEV M. I. YURKINA, *Methods for study of the external gravitational field and figure of the Earth*.
- I. I. MUELLER, *Introduction to Satellite Geodesy*.
- G. VEIS, *Geodetic uses of artificial satellites*.
- Comunicações aos congressos da Associação Internacional de Geodesia.
- The use of Artificial Satellites for Geodesy. Contemporary Geodesy.
- Geodesy in Space Age.
- Foram ainda consultados diversos artigos de «Bulletin Géodésique».
- Survey Review.