Dual de espaços $L^p(p>1)$ de funções vectoriais(*)

por Neyde F. Martins Ribeiro
Instituto de Matemática; Universidade Federal do Rio de Janeiro, Brasil

Introdução

O objectivo deste trabalho é apresentar uma exposição didática da caracterização do dual de $L^p(0, T; X)$, $p>1$ onde X é um espaço de Banach. Ele foi motivado pelo uso frequente que se faz de tal resultado em equações diferenciais parciais, no caso particular em que o espaço de Banach X é um espaço de Sobolev. De modo mais preciso, demonstra se que se o dual X^* de X gozar da propriedade de que toda função de variação limitada $f: X^* \to \mathbf{C}$ possui uma derivada quase sempre, então o dual de $L^p(0, T; X)$ será $L^q(0, T; X^*)$ sendo $p^{-1}+q^{-1}=1$. Tal resultado é devido a S. BOCHNER e A. E. TAYLOR [3].

Esta condição imposta ao dual é satisfeita, por exemplo, pelos espaços H^m de Sobolev conforme § 4.

A apresentação que fazemos aqui é auto suficiente, sendo acessível a leitores com conhecimentos elementares da geometria dos espaços normados. Ela foi dividida em três parágrafos, dos quais o primeiro baseia-se essencialmente no trabalho de S. BOCHNER e A. E. TAYLOR [3].

Esta redacção contém parte das exposições que fizemos no Seminário de Equações Diferenciais Parciais, que vem se realizando no Instituto de Matemática da UFRJ, sob a orientação de L. A. MEDEIROS, G. PERLA MENZALA e P. HUMBERTO RIVERA.

Queremos agradecer ao Prof. L. A. MEDEIROS pela sugestão deste trabalho e pela orientação necessária a sua realização, e aos Profs. G. PERLA MENZALA e P. HUMBERTO RIVERA pelas valiosas sugestões durante a execução do mesmo.

1 — Preliminares

No que segue X é um espaço de Banach tal que X^* satisfaz à condição: toda função de variação limitada tem uma derivada quase sempre. A definição de «variação limitada» é dada abaixo.

Estudaremos o dual de espaços $L^p(p>1)$ quando os elementos são funções definidas em um intervalo $[0, T]$ da recta $\mathbf{R}$, com valores em X. Para $u:[0, T] \to X$ e $f: X^* \to \mathbf{C}$ escreveremos também $<f, u(t)>$ em lugar de $f(u(t))$.

Faremos uso das seguintes notações:

$V^p(0, T; X)$ será a classe das funções u com valores em X, definidas quase sempre em $[0, T]$ e tais que as somas

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{\|u(t_\nu)-u(t_{\nu-1})\|^p}{|t_\nu - t_{\nu-1}|^{p-1}}$$

são limitadas para todas as partições $\{t_\nu\}$, $0=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_n=T$. O supremo destas somas é anotado por $V^p(u)$.

(*) Este trabalho foi financiado pelo Fundo Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (FNDCT) e CEPG-UFRJ.

Definimos

$$\| u \|_{V^p(0,T;X)} = \| u(0) \| + \{ V^p(u) \}^{1/p} .$$

Com esta norma $V^p(0,T;X)$ é um espaço de Banach. Funções deste espaço são ditas de variação p limitadas e no caso de $p=1$ dizemos simplesmente «funções de variação limitada».

$V_0^p(0,T;X)$ será a subclasse de $V^p(0,T;X)$ para a qual os elementos u tem a propriedade $u(0)=0$.

$L^p(0,T;X)$ será a classe das funções u Bochner-integráveis tais que a função: $s \to \| u(s) \|$ pertence a $L^p(0,T;\mathbf{R})$.

$C(0,T;X)$ será a classe das funções de $[0,T]$ em X que são contínuas, normado por $\| u \| = \sup_{t \in [0,T]} \| u(t) \|$.

Com estas definições, prova-se que $C(0,T;X)$ é denso em $L^p(0,T;X)$ na norma de $L^p(0,T;X)$ que é dada por $\| u \|^p_{L^p(0,T,X)} = \int_0^T \| u(s) \|^p ds$.

2. Uma primeira caracterização de $(L^p(0,T;X))^*$

Para cada $x \in X$ e cada real s, $0 \leq s \leq T$, definimos:

se $s>0$, $u_{s,x} : [0,T] \to X$

$$t \to \begin{cases} x, & 0 \leq t \leq s \\ 0, & s < t \leq T \end{cases}$$

e $u_{0,x} : [0,T] \to X$

$$t \to 0 .$$

É imediato que, para cada $s \in [0,T]$ e para cada $x \in X$, $u_{s,x} \in L^p(0,T;X)$.

Seja $U \in (L^p(0,T;X))^*$.

Consideremos para cada $s \in [0,T]$, a seguinte função:

$$\begin{aligned} \Phi(s) : X &\to \mathbf{C} \\ x &\to U(u_{s,x}) . \end{aligned}$$

Mostraremos que $\Phi \in V_0^q(0,T;X^*)$, o que nos permitirá definir:

$$\begin{aligned} S : (L^p(0,T;X))^* &\to V_0^q(0,T;X^*) \\ U &\to \Phi \end{aligned}$$

i) $\Phi(s) : X \to \mathbf{C}$ é linear.

De facto, se $s=0 \Rightarrow \Phi(s) \equiv 0$ logo linear. Se $s \neq 0$, $\forall t \in [0,T]$ $u_{s,\alpha x_1+x_2}(t) = \alpha u_{s,x_1}(t) + u_{s,x_2}(t)$ isto é $u_{s,\alpha x_1+x_2} = \alpha u_{s,x_1} + u_{s,x_2}$ para todo $x_1, x_2 \in X$ e $\alpha \in \mathbf{C}$, o que implica $\Phi(s)[\alpha x_1 + x_2] = U(u_{s,\alpha x_1+x_2}) = \alpha U(u_{s,x_1}) + U(u_{s,x_2}) = \alpha \Phi(s) x_1 + \Phi(s) x_2$.

ii) $\Phi(s) \in X^* \quad \forall s \in [0,T]$.

De facto, $\Phi(0) \equiv 0$ logo $\Phi(0) \in X^*$. Se $s \neq 0$, como

$$\| u_{s,x} \|^p_{L^p(0,T;X)} = \int_0^T \| u_{s,x}(t) \|^p dt = \int_0^s \| u_{s,x}(t) \|^p dt = \| x \|^p s$$

isto é $\| u_{s,x} \|_{L^p(0,T;X)} = s^{1/p} \| x \|$, teremos que $| \Phi(s) x | = | U(u_{s,x}) | \leq \| U \| \, \| u_{s,x} \|_{L^p(0,T;X)} = \| U \| s^{1/p} \| x \|$ logo $\Phi(s) \in X^*$.

iii) $\Phi \in V_0^q(0,T;X^*)$ e

$$V^q(\Phi) \leq \| U \|^q_{(L^p(0,T;X))^*} .$$

Para a prova de tal afirmação precisamos mostrar que

$$\sum_{\nu=1}^n \frac{\| \Phi(t_\nu) - \Phi(t_{\nu-1}) \|^q}{| t_\nu - t_{\nu-1} |^{q-1}} \leq \| U \|^q ,$$

para toda partição $\{t_\nu\}_{0 \leq \nu \leq n}$ de $[0,T]$.

Consideremos o seguinte raciocínio: seja $\varepsilon > 0$ e $b_1, \cdots, b_n$ números reais não negativos. Fixemos ν. Se $b_\nu > 0$ então como $\varepsilon_{/nb_\nu} > 0$ e $\|\Phi(t_\nu) - \Phi(t_{\nu-1})\| = \sup\limits_{\|x\|=1} |\Phi(t_\nu)x_\nu - \Phi(t_{\nu-1})x_\nu|$ existe $\bar{x}_\nu \in X$ com $\|\bar{x}_\nu\| = 1$ tal que $|\Phi(t_\nu)\bar{x}_\nu - \Phi(t_{\nu-1})\bar{x}_\nu| > \|\Phi(t_\nu) - \Phi(t_{\nu-1})\| - \varepsilon_{/nb_\nu} = \|\Phi(t_\nu) - \Phi(t_{\nu-1})\| \|\bar{x}_\nu\| - \varepsilon_{/nb_\nu}$. Multiplicando por b_ν, vem

$$|\Phi(t_\nu) b_\nu \bar{x}_\nu - \Phi(t_{\nu-1}) b_\nu \bar{x}_\nu| >$$
$$> \|\Phi(t_\nu) - \Phi(t_{\nu-1})\| \|b_\nu \bar{x}_\nu\| - \varepsilon_{/n}$$

e fazendo $x_\nu = b_\nu \bar{x}_\nu$ temos

$$|\Phi(t_\nu) x_\nu - \Phi(t_{\nu-1}) x_\nu| >$$
$$> \|\Phi(t_\nu) - \Phi(t_{\nu-1})\| \|x_\nu\| - \varepsilon_{/n}, \quad \|x_\nu\| = b_\nu.$$

Se $b_\nu = 0$ tomamos $x_\nu = 0$, logo podemos afirmar que $\forall \varepsilon > 0$ e números reais não negativos $b_1, \cdots, b_n$, existe $x_\nu \in X$ com $\|x_\nu\| = b_\nu$ tal que $|\Phi(t_\nu) x_\nu - \Phi(t_{\nu-1}) x_\nu| > \|\Phi(t_\nu) - \Phi(t_{\nu-1})\| b_\nu - \varepsilon_{/n}$ (1).

Por outro lado,

$$\sum_{\nu=1}^{n} |\Phi(t_\nu) x_\nu - \Phi(t_{\nu-1}) x_\nu| =$$
$$= \sum_{\nu=1}^{n} |U(u_{t_\nu, x_\nu}) - U(u_{t_{\nu-1}, x_\nu})| \leq$$
$$\leq \|U\| \sum_{\nu=1}^{n} \|u_{t_\nu, x_\nu} - u_{t_{\nu-1}, x_\nu}\| =$$
$$= \|U\| \sum_{\nu=1}^{n} \cdot$$
$$\cdot \left(\int_0^T \|u_{t_\nu, x_\nu}(t) - u_{t_{\nu-1}, x_\nu}(t)\|^p \, dt \right)^{1/p} =$$
$$= \|U\| \sum_{\nu=1}^{n} \left(\int_0^T \|x_\nu \chi_{(t_{\nu-1}, t_\nu)}(t)\|^p \, dt \right)^{1/p} =$$
$$= \|U\| \left(\sum_{\nu=1}^{n} \|x_\nu\|^p (t_\nu - t_{\nu-1}) \right)^{1/p} \quad (2).$$

Assim, de (1)

$$\sum_{\nu=1}^{n} |\Phi(t_\nu) x_\nu - \Phi(t_{\nu-1}) x_\nu| > \varepsilon +$$
$$+ \sum_{\nu=1}^{n} \|\Phi(t_\nu) - \Phi(t_{\nu-1})\| b_\nu,$$

que com (2) acarreta

$$\sum_{\nu=1}^{n} \|\Phi(t_\nu) - \Phi(t_{\nu-1})\| b_\nu < \varepsilon +$$
$$+ \|U\| \left(\sum_{\nu=1}^{n} b_\nu^p (t_\nu - t_{\nu-1}) \right)^{1/p}.$$

Assim se $b_\nu = \left(\dfrac{\|\Phi(t_\nu) - \Phi(t_{\nu-1})\|}{|t_\nu - t_{\nu-1}|} \right)^{q/p}$, fazendo $a_\nu = \|\Phi(t_\nu) - \Phi(t_{\nu-1})\|$ e $\Delta_\nu = |t_\nu - t_{\nu-1}|$ então $b_\nu = \left(\dfrac{a_\nu}{\Delta_\nu} \right)^{q/p}$ e a desigualdade anterior torna-se:

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu b_\nu = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{a_\nu^{\frac{q+p}{p}}}{\Delta_\nu^{q/p}} \leq \|U\| \left(\sum_{\nu=1}^{n} \frac{a_\nu^q}{\Delta_\nu^{q-1}} \right)^{1/p}$$

isto é,

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{a_\nu^q}{\Delta_\nu^{q-1}} \leq \|U\| \left(\sum_{\nu=1}^{n} \frac{a_\nu^q}{\Delta_\nu^{q-1}} \right)^{1/p}$$

que elevando à potência q, torna-se

$$\left(\sum_{\nu=1}^{n} \frac{a_\nu^q}{\Delta_\nu^{q-1}} \right)^q \leq \|U\|^q \left(\sum_{\nu=1}^{n} \frac{a_\nu^q}{\Delta_\nu^{q-1}} \right)^{q/p}$$

e como $q - q_{/p} = 1$ obtemos

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{a_\nu^q}{\Delta_\nu^{q-1}} \leq \|U\|^q,$$

isto é,

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{\| \Phi(t_\nu) - \Phi(t_{\nu-1}) \|^q}{| t_\nu - t_{\nu-1} |^{q-1}} \leq \| U \|^q ,$$

para toda participação $\{t_\nu\}_{1 \leq \nu \leq n}$ de $[0, T]$. Daí $\Phi \in V_0^q(0, T, X^*)$ com $V^q(\Phi) \leq \| U \|^q$ logo a função

$$S : (L^p(0, T; X))^* \to V_0^q(0, T; X^*)$$
$$U \to \Phi$$

está bem definida, sendo imediato verificar que é linear.

Mostraremos que S é sobrejectiva.

Seja $\Phi \in V_0^q(0, T; X^*)$. Desejamos exibir $U \in (L^p(0, T; X))^*$ tal que $S(U) = \Phi$, isto é, tal que se $s \in [0, T]$ então $\forall x \in X$, $S(U)(s)x = \Phi(s)x$ ou $U(u_{s,x}) = \Phi(s)x$.

Antes porém, precisamos definir um certo tipo de integral, baseado na noção de RIEMANN-STIELTJES.

Se $u \in C(0, T; X)$ e $\Phi \in V^q(0, T; X^*)$, correspondendo a uma partição $D_n : 0 = t_0 < < t_1 < \cdots < t_n = T$ e pontos τ_ν, $t_{\nu-1} \leq \tau_\nu \leq t_\nu$, formamos a soma

$$\delta(D_n) = \sum_{\nu=1}^{n} [\Phi(t_\nu) - \Phi(t_{\nu-1})] \, u(\tau_\nu) ,$$

que é um elemento de $\mathbf{C}$. Seja

$$| D_n | = \max_{1 \leq \nu \leq n} | t_\nu - t_{\nu-1} | .$$

A prova de que, para uma sequência de partições (D_i) com $| D_i | \to 0$, as somas $\delta(D_i)$ tem um limite em $\mathbf{C}$ que independe da sequência (D_i), é feita de maneira usual.

De facto,

$$| \delta(D_n) | = \left| \sum_{\nu=0}^{n} [\Phi(t_\nu) - \Phi(t_{\nu-1})] \, u(\tau_\nu) \right| \leq$$

$$\leq \sum_{\nu=1}^{n} \| \Phi(t_\nu) - \Phi(t_{\nu-1}) \| \, \| u(\tau_\nu)) \| =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\| \Phi(t_\nu) - \Phi(t_{\nu-1}) \|}{| t_\nu - t_{\nu-1} |^{\frac{1}{p} = \frac{q-1}{q}}} \, | t_\nu - t_{\nu-1} |^{1/p} \, \| u(\tau_\nu) \| \leq$$

$$\leq \left(\sum_{\nu=1}^{n} \frac{\| \Phi(t_\nu) - \Phi(t_{\nu-1}) \|^q}{| t_\nu - t_{\nu-1} |^{q-1}} \right)^{1/q} \cdot$$

$$\cdot \left(\sum_{\nu=1}^{n} \| u(\tau_\nu) \|^p \, | t_\nu - t_{\nu-1} | \right)^{1/p} .$$

Mas $\Phi \in V^q(0, T; X^*)$ e $t \to \| u(t) \|$ é contínua então passando limite quando $n \to \infty$, $| D_n | \to 0$ teremos

$$\lim_{|D| \to 0} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\| \Phi(t_\nu) - \Phi(t_{\nu-1}) \|^q}{| t_\nu - t_{\nu-1} |^{q-1}} = V^q(\Phi)$$

e

$$\lim_{|D| \to 0} \sum_{\nu=1}^{n} \| u(\tau_\nu) \|^p \, | t_\nu - t_{\nu-1} | = \int_0^T \| u(t) \|^p \, dt ,$$

logo a série $\sum_{\nu \geq 0} | \Phi(t_\nu) - \Phi(t_{\nu-1}) | \, u(\tau_\nu)$ é absolutamente convergente e daí convergente e anotamos seu limite por $\int_0^T u(t) \, d\Phi(t)$.

Pela desigualdade estabelecida, teremos que:

$$\left| \int_0^T u(t) \, d\Phi(t) \right| \leq \{ V^q(\Phi) \}^{1/q}$$

$$\left(\int_0^T \| u(t) \|^p \, dt \right)^{1/p} = \{ V_q(\Phi) \}^{1/q} \, \| u \|_{L^p(0, T; X)} .$$

É fácil ver que

$$U : C(0, T; X) \to \mathbf{C}$$

$$u \to \int_0^T u(t) \, d\Phi(t)$$

é um funcional linear sobre $C(0, T; X)$ de norma $\{V^q(\Phi)\}^{1/q}$ e, como $C(0, T; X)$ é denso em $L^p(0, T; X)$ com a norma de $L^p(0, T; X)$, ele admite uma única extensãa a um funcional linear sobre $L^p(0, T; X)$ com a mesma norma, que continuaremos anotando por U.

Definimos então para $u \in L^p(0, T; X)$, $\int_0^T u(t)\, d\,\Phi(t)$ por esta extensão. Assim está bem definido

$$U : L^p(0, T; X) \to \mathbf{C}$$

$$u \to \int_0^T u(t)\, d\,\Phi(t)$$

e

$$|U(u)| = \left| \int_0^T u(t)\, d\,\Phi(t) \right| \leq$$

$$\{V^q(\Phi)\}^{1/q} \| u \|_{L^p(0, T; X)} .$$

Provaremos agora que $S(U) = \Phi$, isto é, $\forall\, s \in [0, T]\ U(u_{s,x}) = \Phi(s)x$, $\forall\, x \in X$.

De facto, se $s = 0 \Rightarrow u_{0,x} \equiv 0$ logo $U(u_{0,x}) = 0 = \Phi(0)x$ já que $\Phi(0) \equiv 0$ pois $\Phi \in V_0^q 0\, T; X^*)$.

Se $s > 0$, definimos para $x \in X$,

$$u_n(t) = \begin{cases} x, 0 \leq t \leq s \\ -n(t - s - \dfrac{1}{n})x, s \leq t \leq s - \dfrac{1}{n} \\ 0, s + \dfrac{1}{n} \leq t \leq T. \end{cases}$$

Então $\forall\, n \in \mathbf{N}$, $u_n \in C(0, T; X)$ e

$$\int_0^T \| u_n(t) - u_{s,x}(t) \|^p\, dt = \int_s^{s + \frac{1}{n}}$$

$$\left\| -n\left(t - s - \frac{1}{n}\right)x \right\|^p dt \to 0, n \to \infty .$$

Assim (u_n) converge em $L^p(0, T; X)$ para $u_{s,x}$ e como $U \in (L^p(0, T; X))^*$ temos que $U(u_n) \underset{n \to \infty}{\to} U(u_{s,x})$. Mas $U(u_n)$ também converge para $\Phi(s)x$, conforme provamos abaixo, logo $U(u_{s,x}) = \Phi(s)x$ isto é $S(U) = \Phi$.

De facto,

$$U(u_n) = \int_0^T u_n(t)\, d\,\Phi(t) = \int_0^s x\, d\,\Phi(t) +$$

$$+ \int_s^{s + \frac{1}{n}} \left[-n\left(t - s - \frac{1}{n}\right) x \right] d\,\Phi(t) +$$

$$+ \int_{s + \frac{1}{n}}^T 0\, d\,\Phi(t) .$$

A 3.ª parcela é zero e

$$\int_0^s x\, d\,\Phi(t) = \lim_{|D| \to 0} \sum_{\nu=1}^n [\Phi(t_\nu) - \Phi(t_{\nu-1})]\, x =$$

$$= \lim_{|D| \to 0} [\Phi(t_1)x - \Phi(0)x + \Phi(t_2)x - \cdots -$$

$$- \Phi(t_{n-1})x + \Phi(s)x] = \Phi(s)x$$

e daí,

$$|U(u_n) - \Phi(s)x| =$$

$$\left| \int_s^{s + \frac{1}{n}} \left[n\left(s + \frac{1}{n} - t\right) x \right] d\,\Phi(t) \right| \leq$$

$$\leq \lim_{|D_k| \to 0} \sum_{\nu=1}^k \| \Phi(t_\nu) - \Phi(t_{\nu-1}) \| \cdot$$

$$\cdot \left\| n\left(s + \frac{1}{n} - \gamma_\nu\right) x \right\| =$$

$$= \| x \| \lim_{|D_k| \to 0} \sum_{\nu=1}^k \| \Phi(t_\nu) - \Phi(t_{\nu-1}) \|$$

$$\left| n\left(s + \frac{1}{n} - \gamma_\nu\right) \right|,$$

onde

$$s \leq \gamma_\nu \leq s + \frac{1}{n}$$

o que implica

$$0 \leq n\left(s + \frac{1}{n} - \gamma_\nu\right) \leq 1$$

e daí

$$\left| \int_s^{s+\frac{1}{n}} \left[n\left(s + \frac{1}{n} - t\right) x \right] \right| \leq$$

$$\leq \| x \| \lim_{|D_k| \to 0} \sum_{\nu=1}^{k} \| \Phi(t_\nu) - \Phi(t_{\nu-1}) \| \leq$$

$$\leq \|x\| \left\{ \text{variação de } \Phi \text{ sobre } \left(s, s + \frac{1}{n}\right) \right\} \underset{n \to \infty}{\to} 0$$

ou seja $\lim\limits_{n \to \infty} | U(u_n) - \Phi(s) x | = 0$.

Provaremos agora que S preserva a norma, isto é

$$\| S(U) \|_{V_0^q(0,T;X^*)} = \| U \|_{(L^p(0,T;X))^*}.$$

Ora, se $U \in (L^p(0,T;X))^*$ conforme já vimos

$$\| S(U) \|_{V_0^q(0,T;X^*)} = \| \Phi \|_{V_0^q(0,T;X^*)} =$$

$$\| \Phi(0) \|_{X^*} + \{ V^q(\Phi) \}^{1/q} \leq \| U \|_{(L^p(0,T;X))^*}.$$

Resta-nos mostrar que

$$\| U \|_{(L^p(0,T;X))^*} \leq \| S(U) \|_{V_0^q(0,T;X^*)}.$$

Seja $u_n : [0, T] \to X$ função simples que toma valor x_ν para $t_{\nu-1} < t \leq t_\nu$.

Mas

$$\sum_{\nu=1}^{n} [u_{t_\nu, x_\nu}(t) - u_{t_{\nu-1}, x_\nu}(t)] = x_j, \; t \in (t_{j-1}, t_j]$$

e daí

$$u_n(t) = \sum_{\nu=1}^{n} [u_{t_\nu, x_\nu}(t) - u_{t_{\nu-1}, x_\nu}(t)] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^T \| u_n(t) \|^p dt = \sum_{\nu=1}^{n} \int_{t_{\nu-1}}^{t_\nu} \| x_\nu \|^p dt =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{n} \| x_\nu \|^p | t_\nu - t_{\nu-1} |$$

e

$$| U(u_n) | = \left| \sum_{\nu=1}^{n} U(u_{t_\nu, x_\nu}) - U(u_{t_{\nu-1}, x_\nu}) \right| =$$

$$= \left| \sum_{\nu=1}^{n} \Phi(t_\nu) x_\nu - \Phi(t_{\nu-1}) x_\nu \right| \leq$$

$$\leq \sum_{\nu=1}^{n} \| \Phi(t_\nu) - \Phi(t_{\nu-1}) \| \, \| x_\nu \| \leq$$

$$\leq \left(\sum_{\nu=1}^{n} \frac{\| \Phi(t_\nu) - \Phi(t_{\nu-1}) \|^q}{| t_\nu - t_{\nu-1} |^{q-1}} \right)^{1/q}$$

$$\left(\sum_{\nu=1}^{n} \| x_\nu \|^p | t_\nu - t_{\nu-1} | \right)^{1/p} \leq$$

$$\leq \{ V^q(\Phi) \}^{1/q} \| u_n \|_{L^p(0,T;X)}.$$

Assim, se $u \in L^p(0,T;X)$ e u_n é escolhida tal que $u_n \to u$ na norma de $L^p(0,T;X)$ teremos que

$$| U(u) | \leq \{ V^q(\Phi) \}^{1/p} \| u \|_{L^p(0,T;X)}$$

e daí

$$\| U \|_{(L^p(0,T;X))^*} \leq \{ V^q(\Phi) \}^{1/q} =$$

$$= \| S(U) \|_{V_0^q(0,T;X^*)}.$$

Concluimos pois que

$$S : (L^p(0,T;X))^* \to V_0^q(0,T;X^*)$$

$$U \to \Phi$$

é linear, sobre e preserva a norma, o que implica $(L^p(0,T;X))^*$ equivalente a $V_0^q(0,T;X^*)$ sempre que X é um espaço de Banach e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $1 < p < \infty$.

3 — O espaço dual de $L^p(0,T;X)$

Seja Y um espaço de Banach tal que toda função de variação limitada tenha uma derivada quase sempre.

Mostraremos que a função

$$L : V_0^p(0\,,T;\,Y) \to L^p(0\,,T;\,Y)$$
$$u \to u'\,.$$

(1) Está bem definida
(2) Preserva a norma
(3) É linear
(4) É sobrejectiva

(1) L **está bem definida.**

Seja $u \in V_0^p(0\,,T;\,Y)$. Mostraremos que $t \to u'(t)$ é fortemente mensurável e $t \to \|u'(t)\|$ pertence a $L^p(0\,,T;\,\mathbf{R})$.

Consideremos uma sequência de conjuntos finitos de pontos no intervalo $[0\,,T]$, o m-ésimo conjunto sendo $t_{m,1}\,, t_{m,2}\,, \cdots, t_{m,n}$ e tais que $\lim\limits_{m\to\infty}\max\limits_{\nu}(t_{m,\nu+1}-t_{m,\nu})=0$ [por exemplo dividimos o intervalo em 2^m partes iguais].

Definimos

$$u_m(t) = \frac{u(t_{m,\nu+1})-u(t_{m,\nu})}{t_{m,\nu+1}-t_{m,\nu}}$$

em cada intervalo $t_{m,\nu} \leq t < t_{m,\nu+1}$.

Se t não é um dos pontos $t_{m,\nu}$, $t_{m,\nu} < t < t_{m,\nu+1}$ podemos escrever:

$$u_m(t) = \frac{u(t_{m,\nu+1})-u(t)}{t_{m,\nu+1}-t}\cdot\frac{t_{m,\nu+1}-t}{t_{m,\nu+1}-t_{m,\nu}} + \frac{u(t_{m,\nu})-u(t)}{t_{m,\nu}-t}\cdot\frac{t-t_{m,\nu}}{t_{m,\nu+1}-t_{m,\nu}} =$$
$$= \{u'(t)+o_1(t)\}\cdot\frac{t_{m,\nu+1}-t}{t_{m,\nu+1}-t_{m,\nu}} + \{u'(t)+o_2(t)\}\cdot\frac{t-t_{m,\nu}}{t_{m,\nu+1}-t_{m,\nu}} =$$
$$= u'(t)+o_3(t)$$

onde $\|o_3(t)\| \leq \|o_1(t)\| + \|o_2(t)\|$, $\|o_1(t)\|$ e $\|o_2(t)\|$ tendem a zero quando $t_{m,\nu+1} - t_{m,\nu} \to 0$. Assim, $\lim\limits_{m\to\infty}\|u_m(t)-u'(t)\|=0$ quase sempre isto é, existe uma sequência de funções simples convergindo fortemente para u' quase sempre, logo u' é fortemente mensurável.

Para cada m, $u_m \in L^p(0\,,T;\,Y)$ logo $t \to \|u_m(t)\|$ pertence a $L^p(0\,,T\,,\mathbf{R})$ e

$$\int_0^T \|u_m(t)\|^p\,dt = \sum_{P_m}\frac{\|u(t_{m,\nu+1}-u(t_{m,\nu})\|^p}{|t_{m,\nu+1}-t_{m,\nu}|^{p-1}} \leq$$
$$\leq \sup_P \sum_{\nu=1}^{n_P}\frac{\|u(t_\nu)-u(t_{\nu-1})\|^p}{|t_\nu - t_{\nu-1}|^{p-1}} = V^p(u)\,.$$

Pelo Lema de Fatou para funções reais, vem que $t \to \|u'(t)\|$ é integrável e

$$\int_0^T \|u'(t)\|^p\,dt \leq V^p(u)$$

isto é,

$$\|u'\|^p_{L^p(0,T;Y)} \leq V^p(u)\,,$$

assim L está bem definida e

$$\|L(u)\|_{L^p(0,T;Y)} = \|u'\|_{L^p(0,T;Y)} \leq \|u\|_{V^p(0,T;Y)}\,.$$

(2) L **preserva a norma.**

Pela desigualdade anterior, resta-nos mostrar que $\|u\|_{V^p(0,T;Y)} \leq \|u'\|_{L^p(0,T;Y)}$.

Iniciaremos definindo

$$v : [0\,,T] \to Y$$
$$t \to u(0) + \int_0^t u'(s)\,ds$$

e mostrando que $v(t) = u(t)\ \forall\, t \in [0\,,T]$, para $u' \in L^p(0\,,T;\,Y)$.

Seja $f \in Y^*$ qualquer. Então:

$$[0\,,T] \to \mathbf{R}$$
$$t \to \langle f\,, u(t)\rangle$$

é quase sempre derivável, isto é, existe $\frac{d}{dt} < f, u(t) >$ quase sempre. De facto, para os $t's$ tais que existe $u'(t)$, temos que

$$\lim_{h \to 0} \left\langle f, \frac{u(t+h) - u(t)}{h} \right\rangle =$$

$$= \left\langle f, \lim_{h \to 0} \frac{u(t+h) - u(t)}{h} \right\rangle = < f, u'(t) >$$

isto é,

$$\frac{d}{dt} < f, u(t) > = \left\langle f, \frac{d}{dt} u(t) \right\rangle .$$

Notemos que: $t \to < f, u(t) >$ é absolutamente contínua, pois se $\varepsilon > 0$ e $I_n =]\alpha_n, \beta_n[$ é uma sequência de intervalos dois a dois disjuntos, definindo $\delta = \left(\frac{\varepsilon}{\| f \| (V^p(u))^{1/p}} \right)^q$ teremos que:

$$\Sigma | < f, u(\beta_n) > - < f, u(\alpha_n) > | \leqq$$
$$\leqq \| f \| \, \Sigma \, \| u(\beta_n) - u(\alpha_n) \| \leqq$$
$$\leqq \| f \| \left(\sum \frac{\| u(\beta_n) - u(\alpha_n) \|^p}{| \beta_n - \alpha_n |^{p-1}} \right)^{1/p} .$$
$$(\Sigma | \beta_n - \alpha_n |)^{1/q} < \varepsilon \quad \text{se} \quad \Sigma | \beta_n - \alpha_n | < \delta .$$

Daí

$$< f, u(t) > = < f, u(0) > +$$
$$+ \int_0^t \frac{d}{dt} < f, u(s) > ds =$$
$$= < f, u(0) > + \int_0^t \left\langle f, \frac{d}{dt} u(s) \right\rangle ds =$$
$$= < f, v(t) > .$$

Assim, $\forall f \in y^*$ e $\forall t \in [0, T]$,

$$< f, u(t) > = < f, v(t) >$$

logo $u = v$, isto é:

$$u(t) = u(0) + \int_0^t u'(s)\, ds = \int_0^t u'(s)\, ds .$$

Seja agora P uma partição qualquer do intervalo $[0, T]$. Então

$$\| u(t_{\nu+1}) - u(t_\nu) =$$
$$= \left\| \int_0^{t_{\nu+1}} u'(s)\, ds - \int_0^{t_\nu} u'(s)\, ds \right\| \leqq$$
$$\leqq \int_0^{t_{\nu+1}} \| u'(s) \| \, ds \leqq$$
$$\leqq \left(\int_0^{t_{\nu+1}} \| u'(s) \|^p ds \right)^{1/p} \cdot \left(\int_0^{t_{\nu+1}} ds \right)^{1 - \frac{1}{p}} ,$$

logo

$$\frac{\| u(t_{\nu+1}) - u(t_\nu) \|}{| t_{\nu+1} - t_\nu |^{\frac{p-1}{p}}} \leqq \left(\int_{t_\nu}^{t_{\nu+1}} \| u'(s) \|^p ds \right)^{1/p} .$$

Daí para toda participação P de $[0, T]$

$$\sum_{\nu=1}^{n_P} \frac{\| u(t_{\nu+1}) - u(t_\nu) \|^p}{| t_{\nu+1} - t_\nu |^{p-1}} \leqq \int_0^T \| u'(s) \|^p ds ,$$

$$\| u \|_{V_0^p(0, T; Y)} = \} V^p(u) \{^{1/p} \leqq$$
$$\leqq \| u' \|_{L^r(0, T; Y)} = \| L(u) \|_{L^p(0, T; Y)}$$

(3) L é linear.

Omitiremos tal prova por ser demais conhecida.

(4) L é sobrejectiva.

Seja $u \in L^p(0, T; Y)$. Devemos mostrar que existe $v \in V^p(0, T; Y)$ tal que $L(v) = v' = u$.

Definimos

$$v(t) = \int_0^t u(s)\, ds , \quad 0 \leqq t \leqq T .$$

Como $u \in L^p(0, T; Y)$ temos, por definição, que existe uma sequência $(\varphi_n)_{n \geq 0}$ de funções simples tal que (φ_n) converge fortemente para u quase sempre e tal que

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^T \| \varphi_n(s) - u(s) \| \, d s = 0 .$$

Mas

$$\left\| \frac{1}{h} | v(t+h) - v(t) | - u(t) \right\| =$$

$$= \left\| \frac{1}{h} \left[\int_0^{t+h} u(s) \, d s - \int_0^t u(s) \, d s \right] - u(t) \right\| \leq$$

$$\leq \left\| \frac{1}{h} \left[\int_0^{t+h} (u(s) - \varphi_n(s)) \, d s - \right. \right.$$

$$\left. \left. - \int_0^t (u(s) - \varphi_n(s)) \, d s \right] \right\| +$$

$$+ \left\| \frac{1}{h} \left[\int_0^{t+h} \varphi_n(s) \, d s - \int_0^t \varphi_n(s) \, d s \right] - \right.$$

$$\left. - \varphi_n(t) \right\| + \| \varphi_n(t) - u(t) \| \leq$$

$$\leq \left| \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \| u(s) - \varphi_n(s) \| \, d s \right| +$$

$$+ \left| \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \| \varphi_n(s) - \varphi_n(t) \| \, d s \right| +$$

$$\| \varphi_n(t) - u(t) \| .$$

Ora, $(u - \varphi_n) \in L(0, T; Y) \; \forall n$, logo a função $s \to \| u(s) - \varphi_n(s) \|$ pertence a $L(0, T; \mathbf{R})$ e daí

$$\lim_{h \to 0} \left\| \frac{1}{h} \int_t^{s+h} \| \varphi_n(s) - u(s) \| \, d s \right\| =$$

$$= \| \varphi_n(t) - u(t) \|$$

e

$$\lim_{h \to 0} \left\| \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \| \varphi_n(s) - \varphi_n(t) \| \, d s \right\| = 0$$

quase sempre em $[0, S]$.

Agora,

$$\left\| \frac{1}{h} \left[v(t+h) - v(t) \right] - u(t) \right\| \leq$$

$$\leq 2 \| u(t) - \varphi_n(t) \| + o(h)$$

onde $o(h) \underset{h \to 0}{\to} 0$ e como o membro esquerdo independente de n e pelo facto de $\varphi_n \to u$ fortemente temos que $\forall \varepsilon > 0, \exists \, n_\varepsilon \; t q$ se $n \geq n_\varepsilon$ então $\| u'(t) - \varphi_n(t) \| < \varepsilon$, para quase todo t.

Assim, tomando o limite quando $h \to 0$, vem que

$$\lim_{h \to 0} \left\| \frac{1}{h} \left[v(t+h) - v(t) \right] - u(t) \right\| = 0$$

para quase toda $t \in [0, T]$ e pela continuidade da norma temos que existe $v'(t)$ e $v'(t) = u(t)$ para quase todo $t \in [0, T]$.

Seja agora P uma partição qualquer do intervalo $[0, T]$.

Então

$$\| v(t_{\nu+1}) - v(t_\nu) \| = \left\| \int_t^{t_{\nu+1}} u(s) \, d s \right\| \leq$$

$$\leq \left(\int_t^{t_{\nu+1}} \| u(s) \|^p \, d s \right)^{1/p} .$$

$$\left(\int_{t_\nu}^{t_{\nu+1}} d s \right)^{1 - \frac{1}{p}} = | t_{\nu+1} - t_\nu |^{1 - \frac{1}{p}} .$$

$$\cdot \left(\int_{t_\nu}^{t_{\nu+1}} \| u'(s) \|^p \, d s \right) .$$

Daí

$$\frac{\| v(t_{\nu+1}) - v(t_\nu) \|}{| t_{\nu+1} - t_\nu |^{\frac{p-1}{p}}} \leq \left(\int_{t_\nu}^{t_{\nu+1}} \| u(s) \|^p \, d s \right)^{1/p}$$

logo

$$\sum_{\nu=1}^{n_P} \frac{\| v(t_{\nu+1}) - v(t_\nu) \|^p}{| t_{\nu+1} - t_\nu |^{p-1}} \leq \int_0^T \| u(s) \|^p \, d s$$

e como P é qualquer partição de $[0, T]$ temos

$$\sup \sum_{\nu=1}^{n_P} \frac{\| v(t_{\nu+1}) - v(t_\nu) \|^p}{| t_{\nu+1} - t_\nu |^{p-1}} \leq$$

$$\leq \int_0^T \| u(s) \|^p \, d s = \| u \|^p_{L^p(0, T; Y)}$$

portanto $v \in V_0^p(0, T; Y)$ pois $v(0) = 0$ e $L(v) = u$.

Por (1), (2), (3) e (4) temos que $V_0^p(0, T, Y)$ é equivalente a $L^p(0, T; Y)$.

Assim se X é um espaço de Banach tal que X^* satisfaz à condição de que toda função de variação limitada tenha uma derivada quase sempre, teremos que

$$(L^p(0, T; X))^* = L^q(0, T; X^*).$$

Observação: Seja H um espaço de Hilbert com o produto interno anotado por $< | >_H$. Então a função:

$$< | > : L^2(0, T; H) \times L^2(0, T; H) \to \mathbf{C}$$

$$(u, v) \to \int_0^T < u(t) | v(t) >_H d t$$

define um produto interno em $L^2(0, T; H)$ que nos dá

$$\| u \|^2 = \int_0^T \| u(t) \|^2 d t.$$

Assim $L^2(0, T; H)$ é um espaço de Hilbert, logo reflexivo. Segundo [3], Teorema 7. 1, o dual de H, H^* satisfaz a condição exigida no § 1. Daí, teremos por exemplo para os espaços H_0^m de Sobolev que

$$(L^p(0, T; H_0^m))^* = L^q(0, T; H^{-m}).$$

REFERÊNCIAS

[1] E. C. Tichmarsh — *The Theory of Functions* — Oxford, University Press, 1939.

[2] Haim Brezis — *Operateurs Maximaux Monotones — et Semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert*, North Holland, Amsterdan, 1973.

[3] S. Bochner ann A. E. Taylor — Annals of Mathematics — 2, vol. 39 (1938) pág. 913-922.