

Introdução aos Processos Estocásticos

por *J. Tiago de Oliveira*

Centro de Matemáticas Aplicadas (I. A. C.), Faculdade de Ciências de Lisboa

I — IDEIAS FUNDAMENTAIS

I. 1 — Preliminares

A teoria dos processos estocásticos constitui um esquema de modelos para descrever fenómenos bastante irregulares que se desenvolvem no tempo (e/ou no espaço). Exemplos de tal esquematização frutuosa são a descrição do movimento browniano pelos processos de WIENER-LÉVY e, mais aperfeiçoados, de ORSTEIN-UHLENBEK; dos números de chamadas telefónicas para um certo intervalo de tempo (uma hora, por exemplo) em condições análogas, pelos processos de POISSON; dos processos de substituição de peças de máquinas em fábricas e os seus tempos de paragem, pelos processos de renovamento; dos seguros (número e quantitativo das indemnizações) pela teoria colectiva do risco, etc.

Essencialmente, de modo intuitivo, um processo estocástico (ou função aleatória) é uma função (no sentido crescente dos tempos) em que «o acaso interveio a cada instante» — adiante veremos o significado rigoroso a atribuir a esta frase singela; no caso de não haver uma só variável temos os campos

estocásticos (ou aleatórios) de grande importância, por exemplo, na teoria da turbulência. Não trataremos aqui dos campos aleatórios. Não estudaremos também a Análise Aleatória.

Vamos colocar-nos a nível menos avançado e supor totalmente conhecidas as ideias-base das Probabilidades; podem ver-se o já clássico KOLMOGOROFF (1950) que sistematizou na sua versão inicial (em alemão, 1933) a Teoria das Probabilidades ou TIAGO DE OLIVEIRA (1967). Todavia, como se verá, a teoria clássica é insuficiente para a abordagem de certos problemas relevantes e necessita de complementos adicionais. Textos médios, que não abordam as dificuldades referidas nos processos estocásticos, são os de GIRAULT (1969), MANN (1953) e PARZEN (1964); como textos avançados podemos ainda indicar o excepcionalmente claro texto de CRAMÉR & LEADBETTER (1967) e os pesados de LOÈVE (1960), DOOB (1953) e BLANC-LAPIERRE & FORTET (1953).

I. 2 — Iniciação gráfica

Se representarmos por $N(t)$ o número de chamadas telefónicas recebidas (ou efectuadas) por (ou de) determinado telefone com os seus

inícios em instantes $0 < W_1 < W_2 < \dots$ o gráfico da função $N(t)$ pode ser o da fig. 1; os intervalos de tempo $T_{i+1} = W_{i+1} - W_i$ ($W_0 = 0$) tem valores aleatórios e em cada um dos W_i a função salta de uma unidade.

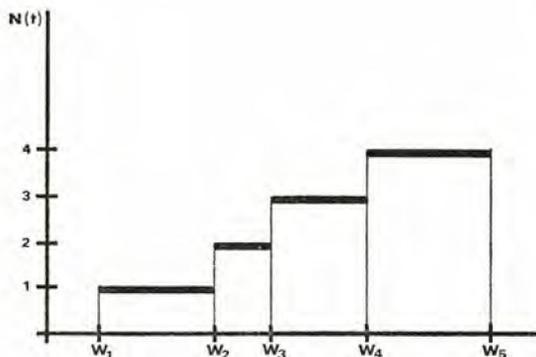


Fig. 1

A trajectória é pois uma trajectória crescente com descontinuidades. Uma tal trajectória obtém-se nos processos de POISSON.

Se considerarmos agora o número de chamadas em processo em dada rede telefónica (ou de pessoas de uma população) vemos que em dados instantes se iniciam chamadas (há nascimentos) e noutros se terminam chamadas (há mortes). A função $N(t)$ tem então saltos inteiros, muitas vezes unitários (pode haver gémeos e mortes múltiplas) e o gráfico pode ser o da fig. 2. Tais são os processos de nascimento e morte.

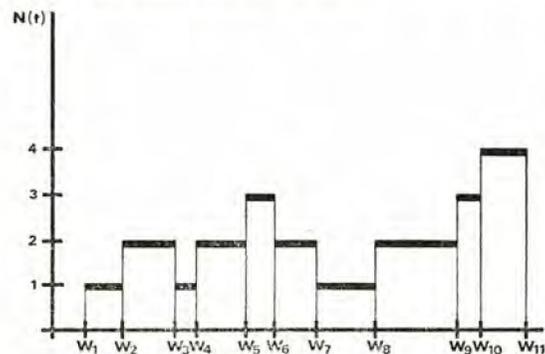


Fig. 2

Finalmente consideremos uma coordenada $X(t)$ de uma partícula grande imersa num meio fluido. Devido aos impactos das moléculas na partícula, vindos aleatoriamente de todas as direcções, ela desloca-se em todas as direcções, descrevendo uma trajectória irregular cuja projecção num eixo fixo pode ser a do gráfico da fig. 3. Tal é a descrição do movimento browniano pelo processo de WIENER-LÉVY.

Dos três exemplos, os dois primeiros são processos de contagem com trajectórias descontínuas; o terceiro tem trajectórias contínuas.

A teoria elementar que vamos fazer permite descrever fenómenos com este tipo de

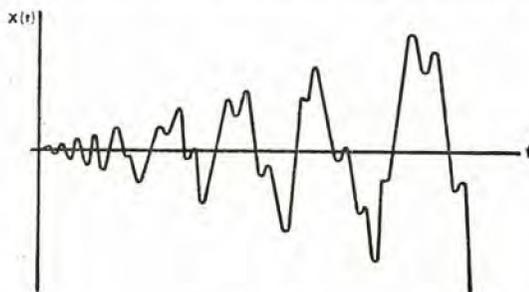


Fig. 3

irregularidade. Exemplos físicos importantes são os dos traçados de barógrafos, termógrafos, sismógrafos, etc., cujas trajectórias contínuas têm flutuações na irregularidade.

I. 3 — As definições básicas, complementos

A noção da função aleatória ou processo estocástico é a generalização natural da de variável aleatória.

Começemos por um exemplo simples: tomemos um dado e tracemos a recta $at + b$ em que a e b são os resultados de duas experiências realizadas com o dado. A função

$at + b$ é aleatória embora, neste exemplo simples, o acaso apenas tivesse entrado como resultado de duas experiências, definindo a posição da recta. Analogamente se poderiam definir polinómios de grau n , em que os coeficientes são o resultado de $n + 1$ experiências aleatórias, ou outras funções com coeficientes aleatórios.

Casos mais complexos, como os de I. 2, são aqueles em que o acaso entra a cada instante. São estas funções, de gráfico essencialmente irregular, que constituem o objectivo da teoria das funções aleatórias que vamos tratar. Convém porém assinalar que a teoria das funções (deterministas) pseudo-aleatórias, de representação formal bastante complexa e bastante irregulares, pode também ser usada na teorização de fenómenos em geral interpretados como devidos à «intervenção do acaso».

No que segue referir-nos-emos sempre ao caso unidimensional; a generalização multidimensional é imediata. Constitue a teoria dos campos aleatórios que se encontra em AGOSTINI & BASS (1960) e BATCHELOR (1960).

Seja (Ω, \mathcal{F}, P) em espaço de probabilidade e $T \subseteq \mathbf{R}$ um subconjunto, finito ou não, da recta real \mathbf{R} . Uma aplicação $X(\omega, t)$ de $\Omega \times T$ em \mathbf{R} diz-se uma *função aleatória* ou *processo estocástico* se para todo o $t_0 \in T$, $X(\omega, t_0)$ é uma variável aleatória. $X(\omega, t)$ pode escrever-se $X_\omega(t)$ ou $X_t(\omega)$ consoante convier parametrizar com respeito a ω ou a t . Os $\{X_t\}$ são variáveis aleatórias e os $\{X_\omega\}$ são funções que se designam por *realizações*, *versões* ou *trajectórias*.

Se não houver lugar a dúvidas escreve-se apenas $X(t)$. Uma função aleatória é pois o feixe das suas versões possíveis, probabilizado pelo parâmetro $\omega \in \Omega$. Alguns autores distinguem entre processo estocástico e funções aleatórias; o primeiro seria um certo subconjunto de funções aleatórias. Não faremos aqui tal distinção.

Começemos por definir em *lei temporal* um

processo estocástico, dita também *definição fraca* ou *temporal*, introduzida por SLUTSKY.

Uma função aleatória está fraca ou temporalmente definida se se conhecem *todas* as funções de distribuição

$$\begin{aligned} F(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_k, t_k) &= \\ &= P(X(t_1) \leq x_1, \dots, X(t_k) \leq x_k) \end{aligned}$$

para todos os $t_1 < t_2 < \dots < t_k$ ($t_i \in T$). Note-se que as funções F tem de satisfazer as condições de compatibilidade como

$$\begin{aligned} F(x_1, t_1; \dots; x_k, t_k; +\infty, t_{k+1}) &= \\ &= F(x_1, t_1; \dots; x_k, t_k) \end{aligned}$$

que traduzem relações de marginação. Nos casos que nos vão interessar, a determinação de todas as funções (compatíveis) é facilmente obtida.

O conhecimento de todas as funções F introduz no espaço \mathbf{R}^T , de todas as aplicações de T em \mathbf{R} , um sistema de probabilidades para um determinado corpo — σ de subconjuntos — é o célebre teorema de KOLMOGOROFF. Para a sua demonstração veja-se KOLMOGOROFF (1950) ou CRAMÉR & LEADBETTER (1967). Repare-se porém que, por este teorema, apenas aqueles acontecimentos (aqui conjuntos de funções) que se podem exprimir numeravelmente por intersecção, união e passagem ao complementar (além da completação à LEBESGUE) à custa dos acontecimentos $\{X_\omega(t_0) \leq x\}$ tem probabilidade atribuída, ainda que de cálculo difícil por vezes. O acontecimento $\{X(t) \leq a, 0 \leq t \leq 1\}$ (se $[0, 1] \subseteq T$), como não se exprime numeravelmente nos acontecimentos indicados, não tem necessariamente probabilidade atribuída. E para este acontecimento, que expressa a não ultrapassagem de nível a pelo processo estocástico, evidentemente importante em certas questões (cheias de rios, níveis de ruído, etc), interessa calcular a sua probabilidade.

Os acontecimentos do teorema de KOLMOGOROFF têm, eles ou os seus complementares,

«demasiadas» funções, o que leva à dificuldade indicada.

Utilizando a topologia de T ou outras propriedades podem-se introduzir definições mais fortes de função aleatória (separável, mensurável, etc.), ditas definições *completas*. Um processo é *separável* se é definido pelos seus valores num conjunto numerável de pontos denso em T ; para tais processos o conhecimento das funções de distribuição $F(x_1, t_1; \dots; x_k, t_k)$ permite o cálculo das probabilidades dos acontecimentos desejados. Prova-se que todo o processo $X(t)$ é equivalente a outro separável $X^{(s)}(t)$, i. e., $P(X(t) = X^{(s)}(t)) = 1$ para todo o $t \in T$. O cálculo de $P(X(t) \leq a, t \in [0, 1])$ podia agora fazer-se, na versão separável, escolhendo os racionais $\{r_k\}$ de $[0, 1]$, calculando $P(X(r_{\alpha_1}) \leq a, \dots, X(r_{\alpha_n}) \leq a)$ e passando a limite.

Observe-se que, como é natural, a definição temporal não distingue funções aleatórias equivalentes, i. e., tais que $X(t, \omega) = Y(t, \omega)$ excepto para $\omega \in N_t \subseteq \Omega$ com N_t desprezável (probabilidade nula), N_t podendo variar com t .

A classificação de uma função aleatória pode fazer-se de vários pontos de vista: natureza de T , natureza do conjunto das imagens $X(\Omega, T)$ e natureza da intervenção do acaso.

T pode ser um conjunto finito, numerável ou contínuo; se T é finito temos afinal um *vector aleatório*, se T é numerável dispomos de uma *sequência aleatória* ou *crono-série*, se T é contínuo (intervalo finito, semi-recta ou recta) trata-se de um *processo estocástico* ou *função aleatória permanente*.

Doutro lado, a totalidade $X(\Omega, T)$ dos valores de $X(\omega, t)$ pode ser finito ou numerável originando um *processo discreto* ou um contínuo (intervalo, semi-recta ou recta) dizendo-se o *processo contínuo*.

Finalmente, quanto ao modo de intervenção do acaso, se $X(\omega, t) = \varphi(t)$ é independente

de $\omega \in \Omega$ temos uma *função certa*; se $X(\omega, t)$ depende de finitos parâmetros aleatórios (caso dos polinómios de coeficientes aleatórios), como nesse caso basta conhecer o seu valor em um conjunto finito de pontos, o *processo* diz-se *degenerado*, *cripto-determinista* ou *pseudo-indeterminista*; o caso geral é o dos *processos* (própriamente) *estocásticos*.

A noção de *campo aleatório* em que $T \subseteq \mathbb{R}^k$ e $X(\Omega, T) \subseteq \mathbb{R}^p$ pode generalizar-se ainda considerando um espaço de estados S e uma aplicação $\Omega \rightarrow S$ conveniente obtendo-se assim um *elemento* ou *estado aleatório*. S é \mathbb{R}^T no caso das funções aleatórias.

I. 4 — Processos e markovianos estacionários

Na totalidade de processos estocásticos costumam distinguir-se duas grandes classes (que se não excluem): os processos markovianos e os processos estacionários.

Os processos *markovianos* (de 1.^a ordem) são aqueles em que as probabilidades (condicionais) de *transição* gozam da propriedade seguinte (enunciada para processos permanentes): se $t_1 < t_2 < \dots < t_n < t$ então

$$P(X(t) \leq x \mid X(t_1) = x_1, \dots, X(t_n) = x_n) = P(X(t) \leq x \mid X(t_n) = x_n).$$

Costuma dizer-se que, nos processos markovianos (de 1.^a ordem), a probabilidade de um acontecimento futuro (no instante $t > t_n$) só depende do presente (da observação x_n no último instante t_n) sendo completamente independente do passado ($t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1}$).

Os processos markovianos de 2.^a ordem verificam a seguinte propriedade: se

$$t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_n < t$$

então

$$P(X(t) \leq x | X(t_1) = x_1, \dots, X(t_{n-1}) = x_{n-1}, \\ X(t_n) = x_n) = P(X(t) \leq x | X(t_{n-1}) = x_{n-1}, \\ X(t_n) = x_n);$$

analogamente se definem os processos markovianos de ordem mais elevada.

É corrente dizer-se que os processos markovianos traduzem o «determinismo estatístico»; o futuro depende apenas das condições iniciais (presente) e não da história passada — compare-se com o enunciado habitual do princípio do determinismo em Mecânica ou com o princípio de HUYGHENS da Óptica Geométrica. São processos em que não há memória do passado, ou há memória finita no caso dos processos markovianos de 2.^a, 3.^a, ... ordens.

Para os processos markovianos o seu estudo depende apenas do conhecimento de probabilidades iniciais $F(x, t) = P(X(t) \leq x)$ e das probabilidades de transição $P(X(t) \leq x | X(t') = x') = F(x, t | x', t')$ para $t' < t$. No caso contínuo são conhecidas as densidades correspondentes. Todas as outras expressões de lei temporal se podem deduzir delas, o que introduz considerável simplificação. Assim a densidade de

$$X(t_1), X(t_2), X(t_3), \text{ com } t_1 < t_2 < t_3,$$

é dada por

$$f(x_1, t_1; x_2, t_2; x_3, t_3) = f(x_1, t_1) \cdot f(x_2, t_2 | x_1, t_1) f(x_3, t_3 | x_2, t_2).$$

Quando o conjunto dos estados (contido em \mathbf{R}) é discreto (finito ou numerável) e o tempo é discreto o processo markoviano diz-se uma *cadeia de MARKOV*. Foram os processos primeiramente estudados. Neste caso, por ser discreto o espaço de estados, costumam dar-se as probabilidades elementares.

Repare-se que um processo markoviano continua markoviano quando se muda de relógio, i. e., se substitue o tempo t pelo tempo $\tau = \Phi(t)$ em que Φ é uma bijecção. Tal não é válido para os processos estacionários definidos adiante.

O processo de POISSON e o processo de WIENER-LÉVY são exemplos de processos markovianos. Os processos markovianos são importantes não apenas em si mas pelo facto de grande número de processos estocásticos poderem ser «mergulhados» (à custa do aumento de dimensões do espaço dos estados) em processos markovianos.

Do ponto de vista físico, os processos markovianos costumam traduzir os processos evolutivos.

A observação de certos gráficos sugere que, apesar da irregularidade essencial, o seu evoluir não se alterou no decurso do tempo, embora apresentando flutuações devidas ao acaso. É o caso dos processos (estacionários) do ruído de fundo de um rádio, da dimensão de peças em produção em série, de preços de bens em certas condições e se se corrigiu a desvalorização da moeda, etc.

Duas definições porém costumam dar-se:

a) Um processo permanente é *fortemente estacionário* (DOOB) se para $t_1 < t_2 < \dots < t_k$ e todo o $h(t_i, t_i + h \in T)$ se tem

$$P(X(t_1 + h) \leq x_1, \dots, X(t_k + h) \leq x_k) = \\ = P(X(t_1) \leq x_1, \dots, X(t_k) \leq x_k),$$

i. e., as probabilidades da lei temporal não variam com uma translação no tempo;

b) um processo permanente de 2.^a ordem, i. e., com valor médio $\mathcal{M}(X(t))$ e variância $\mathcal{V}(X(t))$, e subsequentemente com covariância $\mathcal{C}(X(t), X(s))$ pela desigualdade de SCHWARZ, diz-se *fracamente estacionário* (KHINTCHINE) se o seu valor médio $\mathcal{M}(X(t))$ for indepen-

dente do tempo (constante) e a covariância $c(X(t), X(s))$ apenas depende de $|t - s|$; costuma denotar-se por $\mathcal{R}(h) = c(X(t), X(t+h)) = \mathcal{R}(-h)$ a covariância; a variância $\mathcal{V}(X(t)) = c(X(t), X(t)) = \mathcal{R}(0)$ é então uma constante.

É evidente que um processo de 2.^a ordem fortemente estacionário é fracamente estacionário mas a definição forte não implica sempre a definição fraca pois o processo pode não ter valor médio ou variância.

A definição fraca de estacionariedade é o mais usado no estudo dos fenómenos naturais não-evolutivos. Para a maior parte dos processos fracamente estacionários é possível substituir o cálculo de $\mathcal{M}(X(t))$ (valor médio em fase) pela média temporal ao longo de qualquer trajectória do processo, à excepção de um conjunto desprezável de trajectórias — *teorema ergódico*.

Os processos simultaneamente markovianos e fortemente estacionários são homogéneos no tempo, i. e., a distribuição de $(X(t), X(s))$ apenas depende de $|t - s|$, mas nem todo o processo markoviano homogéneo é fortemente estacionário.

Adiante se definirão os processos de incrementos independentes e de incrementos estacionários. Iremos só tratar de processos de 2.^a ordem.

I. 5 — Processos de Poisson

Os processos de POISSON servem para descrever probabilisticamente o número de chamadas telefónicas, o número de raios α emitidos por uma fonte, o número de electões recebidos no ânodo de tubo de vácuo, o número de automóveis que passam em dado ponto, o número de falhas ou acidentes, etc, para um dado intervalo de tempo. São

dos mais importantes processos de contagem, de que vários outros se podem compor, mas não os únicos. Das várias caracterizações axiomáticas dos processos de POISSON (cf. PARZEN (1964)) vamos utilizar a seguinte: Consideremos acontecimentos que se podem dar no tempo $t \geq 0$. Seja $N(t)$ o número de acontecimentos observados no intervalo $]0, t]$; $N(t)$ será pois uma função aleatória não-decrescente do tempo. Postulamos então:

P 1) $N(t)$ está definida em $[0, +\infty[$ e $N(0) = 0$;

P 2) $N(t)$ tem *incrementos independentes*, i. e., se $0 \leq t_1 < t_2 \leq t_3 < t_4$ então $N(t_2) - N(t_1)$ e $N(t_4) - N(t_3)$ são independentes;

P 3) $N(t)$ tem *incrementos estacionários*, i. e., se $0 \leq t_1 < t_2 \leq t_3 < t_4$ e $t_4 - t_3 = t_2 - t_1$ então $N(t_2) - N(t_1)$ e $N(t_4) - N(t_3)$ tem a mesma distribuição;

P 4) Para todo o $t > 0$ é válido

$$0 < P(N(t) = 0) < 1;$$

P 5) Para todo o $t \geq 0$ é válido

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{P(N(t+h) - N(t) \geq 2)}{P(N(t+h) - N(t) = 1)} = 0.$$

P 1) resulta de se considerar $N(t)$ uma contagem começada em $t = 0$; o significado de P 2) e P 3) já foi esclarecido; P 4) quer dizer que, para qualquer intervalo de tempo de duração t (está-se a usar a estacionariedade dos incrementos), há uma probabilidade não-nula, mas não há quase-certeza, de que um acontecimento, pelo menos, se dê; P 5) mostra que em intervalos de tempo muito pequenos ocorre no máximo um acontecimento, i. e., não há acontecimentos simultâneos.

De P 3) resulta que

$$P(N(t+s) - N(s) = k) = P(N(t) = k).$$

Denotemos por

$$p_k(t) = P(N(t) = k).$$

Temos

$$\begin{aligned} p_0(t+s) &= P(N(t+s) = 0) = \\ &= P(N(t) = 0) \cdot P(N(t+s) - N(t) = 0) = \\ &= P(N(t) = 0) P(N(s) = 0) = p_0(t)p_0(s), \end{aligned}$$

em que se usou P2) e P3).

A solução desta equação funcional é

$$p_0(t) = e^{-\nu t}$$

visto que $p_0(t)$ é não-crescente⁽¹⁾; ν diz se *intensidade* do processo e $1/\nu$ é o valor médio dos intervalos entre acontecimentos.

Designemos agora por $0 < W_1 < W_2 < \dots < W_n < \dots$ os instantes (aleatórios) em em que se dão os acontecimentos (um em cada instante por P5) e por $T_1 = W_1$, $T_2 = W_2 - W_1$, \dots , $T_n = W_n - W_{n-1}$, \dots os intervalos entre acontecimentos (também aleatórios). Da estacionariedade vem que

$$\begin{aligned} P(T_n \leq t) &= P(T_1 \leq t) = P(W_1 \leq t) = \\ &= 1 - P(N(t) = 0) = 1 - e^{-\nu t} \end{aligned}$$

pelo que os intervalos entre acontecimentos tem a distribuição exponencial. Como

$$W_n = T_1 + \dots + T_n$$

(1) Para m inteiro positivo é óbvio que $p_0(mt) = p_0(t)^m$ e portanto $p_0(m) = p_0(1)^m$; como para n inteiro positivo é $p_0(1/n)^n = p_0(1)$ vem $p_0(1/n) = p_0(1)^{1/n}$ e portanto é imediato que $p_0(m/n) = p_0(1)^{m/n}$. Ora $p_0(t)$ é não-crescente por definição; então tomando duas sucessões de racionais $\{r'_n\}$ e $\{r''_n\}$ convergindo para t e tais que $r'_n < t$ e $r''_n > t$ vem $p_0(r'_n) \geq p_0(t) \geq p_0(r''_n)$ e portanto passando a limite vem

$$p_0(t) = p_0(1)^t$$

por P4) terá de ser $p_0(1) = e^{-\nu}$ ($\nu > 0$) o que prova o resultado indicado.

para $n \geq 1$ temos

$$\{N(t) \leq n\} = \{W_{n+1} > t\}$$

e

$$\{N(t) = n\} = \{W_n \leq t\} \cap \{W_{n+1} > t\}$$

e portanto

$$P(N(t) = n) = P(W_n \leq t) - P(W_{n+1} \leq t).$$

Mas

$$P(W_n \leq t) = 1 - e^{-\nu t} \left(1 + \nu t + \dots + \frac{(\nu t)^{n-1}}{(n-1)!} \right)$$

pois W_n , soma de n variáveis aleatórias exponenciais de função de distribuição $1 - e^{-\nu t}$, tem a distribuição gama e portanto

$$P(N(t) = n) = e^{-\nu t} (\nu t)^n / n!$$

o que mostra que $N(t)$ (ou $N(s+t) - N(s)$) tem a distribuição de POISSON. Consequentemente é $\mathcal{M}(N(t)) = \nu t$ e $\mathcal{V}(N(t)) = \nu t$. Daí que seja válido um teorema de tipo ergódico

$N(t)/t \xrightarrow{mq} \nu$ quando $t \rightarrow \infty$ pois

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(N(t)/t) &= \nu \text{ e } \mathcal{M}(N(t)/t - \nu)^2 = \\ &= \mathcal{V}(N(t)/t) = \mathcal{V}(N(t))/t^2 = \nu/t \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Observe-se então que $\mathcal{C}(N(t), N(s)) = \nu \min(s, t)$ dada a decomposição $N(t) = N(s) + (N(t) - N(s))$ se $s \leq t$.

Visto que $N(t) - N(0) = N(t)$ e $N(t+s) - N(t)$ são independentes, $N(t+s)$, conhecido $N(t)$ e valores de N para instantes anteriores a t , só depende de $N(t)$ pelo que o processo é markoviano. Uma mudança do relógio $\tau = \Phi(t)$, com Φ não linear, faz intervir as diferenças $\Phi^{-1}(\tau) - \Phi^{-1}(\tau')$ pelo que o processo, não dependendo de $\tau - \tau'$, deixa de ser homogéneo; em geral, homogeneiza-se o tempo por comodidade.

Vamos agora fazer considerações de análise aleatória, mais ou menos intuitivas, mos-

trando o seu aspecto mais complexo que análise habitual.

O processo tem quase-certamente trajectórias descontínuas, como o mostra o aspecto em escada do seu gráfico; ao mesmo tempo, como $P(W_k = t) = 0$ para todo o t pois W_k tem uma distribuição contínua (gama), as trajectórias são quase-certamente contínuas em qualquer ponto; a aparente contra-dição explica-se pelo facto de as descontinuidades serem móveis (aleatórias) e nula a probabilidade de o salto se observar num dado instante do tempo. Observe-se ainda que a probabilidade de que $N(t)$ seja efectivamente contínua (constante em $]0, t_0]$ ou seja que $N(t_0) = 0$ é $P(N(t_0) = 0) = e^{-\nu t_0}$, probabilidade positiva, decrescente com t_0 . Embora tenha quase-certamente trajectórias descontínuas, o processo é derivável quase certamente em cada ponto e tem derivada nula pois $P(W_k = t) = 0$.

O integral do processo no intervalo $[0, t]$, supondo que houve k saltos nos pontos

$$W_1 = T_1 \leq W_2 = T_1 + T_2 \leq \dots \leq W_k = T_1 + \dots + T_k \leq t,$$

é dado por $kt - \sum_1^k (k+1-j)T_j$, representando uma poligonal aleatória que tem inclinações $0, 1, 2, \dots$, nos intervalos

$$\begin{aligned} &]0, T_1[, \quad]T_1, T_1 + T_2[, \\ &]T_1 + T_2, T_1 + T_2 + T_3[, \dots \end{aligned}$$

Convém ainda fazer duas observações importantes. O carácter poissoniano do processo e os tempos entre acontecimentos exponenciais são asserções equivalentes. Além disso, pode mostrar-se que se houver k acontecimentos no intervalo $[0, t]$ os tempos $W_1 \leq W_2 = T_1 + T_2 \leq \dots \leq W_k = T_1 + \dots + T_k \leq t$ tem a distribuição das estatísticas ordinais de uma amostra de k observações uniformes no intervalo $[0, t]$.

I. 6 - Processo de Wiener-Lévy

O processo de WIENER-LÉVY, como primeiro modelo do movimento browniano, foi abordado por EINSTEIN e SMOLUCHOWSKI por 1905 e desenvolvido por WIENER e LÉVY nos anos 20; BACHELIER, no princípio do século também estudou este processo de passeio aleatório, mas sem grande rigor. Os trabalhos fundamentais estão em WAX (1954).

A função aleatória $X(t)$ que descreve, em primeira observação, uma coordenada de uma partícula browniana pode ser caracterizada pelos seguintes axiomas:

WL 1) $X(t)$ está definida em $[0, +\infty[$ sendo $X(0) = 0$;

WL 2) $X(t)$ tem incrementos independentes, isto é, se $0 \leq t_1 < t_2 \leq t_3 < t_4$ então $X(t_2) - X(t_1)$ e $X(t_4) - X(t_3)$ são independentes;

WL 3) Se $0 \leq t_1 < t_2$ então $X(t_2) - X(t_1)$ têm uma distribuição normal de valor médio nulo e variância contínua $\sigma^2(t_2 - t_1)$ pelo que os incrementos são estacionários.

Como $X(0) = 0$ é imediato que $X(t)$ e o incremento $E(t, s) = X(t+s) - X(t)$ ($s > 0$) são independentes por WL 2).

Vamos agora determinar a função $\sigma^2(t)$. Da decomposição

$$X(t_2) = X(t_1) + (X(t_2) - X(t_1)) \quad (0 \leq t_1 < t_2)$$

o cálculo da variância, atendendo ao resultado anterior, leva à equação funcional

$$\sigma^2(t_2) = \sigma^2(t_1) + \sigma^2(t_2 - t_1).$$

De modo análogo ao que se usou para estudar a equação funcional do processo de POISSON, ou escrevendo $p(t) = e^{\sigma^2(t)}$, verifica-se que a solução é da forma $\sigma^2(t) = At$, $t \geq 0$. Como $A = \sigma^2(1) > 0$, $\sigma^2(t)$ têm a forma $\sigma^2 \cdot t$; quando o desvio padrão σ é

conhecido passa-se ao tempo $t' = \sigma^2 \cdot t$ o que equivale a tornar $\sigma^2 = 1$.

Vamos ainda mostrar que

$$e(X(t_1), X(t_2)) = \sigma^2 \min(t_1, t_2).$$

Supondo $0 \leq t_1 \leq t_2$ temos como

$$X(t_2) = X(t_1) + (X(t_2) - X(t_1))$$

por WL 2)

$$\begin{aligned} e(X(t_1), X(t_2)) &= e(X(t_1), X(t_1)) = \\ &= v(X(t_1)) = \sigma^2 t_1. \end{aligned}$$

Na impossibilidade de gerar em computador digital o processo permanente, discretizou-se o tempo e geraram-se números aleatórios normais $E(1), E(2), \dots$, calculando-se os valores

$$\begin{aligned} X(0) &= 0 \\ X(1) &= E(1) \\ X(1) &= X(1) + E(2) \\ &\dots \dots \dots \\ X(k) &= X(k-1) + E(k). \end{aligned}$$

Uma sequência gerada, em computador IBM 1620, deu o seguinte gráfico (fig. 4).



Fig. 4

A análise aleatória de $X(t)$ mostra aspectos interessantes: tem trajectórias quase-certamente contínuas e contínuas quase-certamente em todos os pontos t (não há pois descontinuidades móveis). Todavia o processo não tem derivada, sendo pois um exemplo, como PERRIN supôs, de função contínua sem derivada.

O processo é obviamente markoviano. Por WL 3) como $X(0) = 0$ vê-se imediatamente

que $X(t)$ tem a densidade de probabilidade

$$f(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma\sqrt{t}}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{x^2}{\sigma^2 \cdot t}\right)$$

e a densidade de transição para $0 \leq t_1 < t_2$

$$\begin{aligned} f(x_2, t_2 | x_1, t_1) &= \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma\sqrt{t_2-t_1}}} \exp - \frac{1}{2} \frac{(x_2 - x_1)^2}{\sigma^2 \cdot (t_2 - t_1)}. \end{aligned}$$

I. 7 — Outros processos estocásticos

Os dois processos estocásticos (de POISSON e de WIENER-LÉVY) embora difiram em certas características têm de comum o serem markovianos não estacionários porque de incrementos independentes e estacionários.

Vamos agora considerar o processo de ORSTEIN-UHLENBECK das velocidades. Por integração obtém-se o processo de ORSTEIN-UHLENBECK das posições, assintoticamente equivalente ao processo de WIENER-LÉVY. Tem-se assim uma descrição do movimento browniano que agora já dispõe de velocidade, ao contrário do modelo anterior. O texto já citado de WAX (1954) trata deste processo.

Um processo $V(t)$ diz-se de ORSTEIN-UHLENBECK de velocidades se verifica os seguintes axiomas:

- OU 1) $V(t)$ está definida em $]-\infty, +\infty[$ e tem variância constante; $V(0)$ é normal de valor médio nulo;
- OU 2) $V(t_2) = \alpha(t_2 - t_1) V(t_1) + E(t_1, t_2 - t_1)$, se $0 \leq t_1 \leq t_2$, em que para $t > 0$ $0 < \alpha(t) < 1$ e $\alpha(t)$ é uma função contínua; $V(t_1)$ e $E(t_1, t_2 - t_1)$ são independentes;
- OU 3) $E(t_1, t_2 - t_1)$ ($0 \leq t_1 \leq t_2$) tem distribuição normal de valor médio nulo e variância contínua $v(t_2 - t_1)$;

OU4) Se $0 \leq t_1 < t_2 \leq t_3 < t_4$ então $E(t_1, t_2 - t_1)$ e $E(t_3, t_4 - t_3)$ são independentes.

A função $a(t)$ representa o atrito médio sobre a partícula em movimento no intervalo de tempo t , reduzindo a sua velocidade, redução que pode ser compensada pelo incremento E .

Por ser $V(t) = a(t) V(0) + E(0, t)$ vê-se que $V(t)$ é normal de valor médio nulo e de variância σ^2 (por OU1) verificando a igualdade, já que por OU2) $V(0)$ e $E(0, t)$ são independentes,

$$\sigma^2 = a^2(t) \sigma^2 + v(t)$$

o que dá

$$v(t) = (1 - a^2(t)) \sigma^2.$$

Interessa agora determinar $a(t)$.

Para $t_1, t_2 \geq 0$ temos

$$\begin{aligned} V(t_1 + t_2) &= a(t_2) V(t_1) + E(t_1, t_2) = \\ &= a(t_2) [a(t_1) V(0) + E(0, t_1)] + E(t_1, t_2) \end{aligned}$$

e por outro lado

$$V(t_1 + t_2) = a(t_1 + t_2) V(0) + E(0, t_1 + t_2).$$

Tomando valores médios condicionais em $V(0)$ por OU3) vem

$$a(t_1 + t_2) = a(t_1) a(t_2)$$

equação funcional cuja solução contínua é $a(t) = e^{-\beta t}$. Como por OU2) $a(t) < 1$, vem $a(t) = e^{-\beta t}$ ($\beta > 0$) e subsequentemente, $v(t) = (1 - e^{-2\beta t}) \sigma^2$.

Vamos agora mostrar que

$$\mathcal{C}(V(t_1), V(t_2)) = e^{-\beta |t_1 - t_2|} \sigma^2.$$

Supondo $0 \leq t_1 \leq t_2$ temos

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(V(t_1), V(t_2)) &= \mathcal{C}(V(t_1), a(t_2 - t_1) V(t_1) + \\ &+ E(t_1, t_2 - t_1)) = a(t_2 - t_1) \mathcal{C}(V(t_1)) = \\ &= e^{-\beta(t_2 - t_1)} \sigma^2 \end{aligned}$$

o processo é pois markoviano e estacionário. A densidade de probabilidade de $V(t)$ é

$$f(v|t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{v^2}{\sigma^2}\right)$$

e a densidade de transição para $0 \leq t_1 \leq t_2$ é

$$\begin{aligned} f(v_2, t_2 | v_1, t_1) &= \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma\sqrt{1 - e^{-2\beta(t_2 - t_1)}}} \cdot \\ &\cdot \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(v_2 - e^{-\beta(t_2 - t_1)} v_1)^2}{\sigma^2 (1 - e^{-2\beta(t_2 - t_1)})}\right). \end{aligned}$$

É fácil verificar que para $t \geq 0$ o processo

$$X(t) = \sqrt{t} V\left(-\frac{1}{2\beta} \log t\right)$$

tem a distribuição de um processo de WIENER-LÉVY de parâmetro σ^2 .

Em geral tem especial interesse os processos gaussianos estacionários, como o de ORSTEIN-UHLENBECK, em que as distribuições em $t_1 < t_2 < \dots < t_k$ são multinormais de valor médio e variâncias constantes e as covariâncias (e coeficientes de correlação) são funções apenas de $|t - s|$. Para alguns detalhes pode ver-se PARZEN (1964) e a parte II.

Outros processos estocásticos têm sido definidos, além dos que serão tratados na parte II. Citam-se a título de exemplo os processos extremos $X(t)$, definidos em $[0, +\infty[$ que tem funções não-decrescentes, quase-certamente descontínuas com infinitos saltos, não-inteiros, em qualquer intervalo $[0, t]$ e os processos extremos-markovianos-estacionários dos quais o processo de máximos é assintoticamente um processo extremo.

Exercícios

1. $\{X_n, n \geq 1\}$ é uma sucessão de variáveis aleatórias independentes de valor médio μ e variância σ^2 . Mostre que os $\{X_n\}$ formam uma crono-série estacionária nos sentidos forte e fraco. Calcule o seu valor médio, variância e covariância.

2. $\{X_n, n \geq 0\}$ é uma sucessão de variáveis aleatórias independentes de valor médio μ e variância σ^2 . Mostre que

$$Y_n = \varphi(X_{n-1}, X_n), n \geq 1$$

é um processo markoviano estacionário e determine a expressão geral do valor médio e covariância de Y_n . Calcule-os especificamente para o caso de

$$\varphi(x, y) = x + y, x - y, xy.$$

3. Se $X(t), a \leq t \leq b$, é um processo estacionário no sentido forte ou no sentido fraco então $Y(t) = X(\alpha t + \beta)$ é um processo estacionário no mesmo sentido.

4. Seja $N(t), t \geq 0$ um processo de POISSON de intensidade ν . Mostre que para todo o $\alpha > 0$,

$$M(t) = e^{\alpha t} \{N(e^{-2\alpha t}) - \nu e^{-2\alpha t}\}, -\infty < t < +\infty$$

é um processo fracamente estacionário. Determine o valor médio e a covariância de $M(t)$.

5. Qual o efeito de uma mudança de escala dos tempos nos processos de POISSON, de WIENER-LÉVY e ORSTEIN-UHLENBECK? Determine os novos parâmetros.

6. Para os processos que se seguem verifique se são markovianos, se são estacionários (nos sentidos forte ou fraco) e determine, se possível, os seus valores médios e covariâncias:

a) $At + B, A \cos t + B \sin t, A \cos Bt, \operatorname{tg}(At + B)$ em que A e B são variáveis aleatórias independentes;

b) $N(t+1) - N(t)$ se $N(t)$ é um processo de POISSON;

c) $At + N(t)$ se A é uma variável aleatória independente de $N(t)$ (processo de POISSON);

d) $N_1(t) + N_2(t)$ e $N_1(t)N_2(t)$ em que $N_1(t)$ e $N_2(t)$ são processos de POISSON independentes;

e) $X(t+1) - X(t), X^2(t)$ e $|X(t)|$ em que $X(t)$ é um processo de WIENER-LÉVY;

f) $V(t+1) - V(t), V^2(t)$ e $|V(t)|$ em que $V(t)$ é um processo de ORSTEIN-UHLENBECK.

7. Mostre a expressão de $P(W_n \leq t)$ indicada nos processos de POISSON.

REFERÊNCIAS (Parte I)

- L. AGOSTINI & J. BASS, *Les théories de la turbulence*, Publ. Sc. et Tech., Ministère de l'Air, n.º 237 (1960).
 G. K. BATCHELOR, *The theory of homogeneous turbulence*, Cambridge Univ. Press, (1960).
 A. BLANC-LAPIERRE & R. FORTET, *Théorie des fonctions aléatoires*, Paris, Masson, (1953).
 H. CRAMÉR & M. R. LEADBETTER, *Stationary and related Stochastic Processes*, N. Y., Wiley, (1967).
 J. L. DOOB, *Stochastic Processes*, N. Y., Wiley, (1953).
 M. GIRAULT, *Processus aléatoires*, Paris, Dunod, (1969).
 A. N. KOLMOGOROFF, *Foundations of the Theory of Probability*, N. Y., Chelsea, (1959).
 M. LOÈVE, *Probability Theory*, 2nd. ed., Princeton, Van Nostrand, (1960).
 MANN, *An introduction to the theory of Stochastic Processes with continuous parameter*, Nat. Bur. Stand, Appl. Math, Ser., Wash., (1953).
 E. PARZEN, *Stochastic Processes*, 2nd ed., S. Francisco, (1964).
 J. TIAGO DE OLIVEIRA, *Probabilidades e Estatística, Conceitos Fundamentais*, 2 vol., Lisboa, Liv. Escolar Editora, (1967).
 N. WAX, *Noise and Stochastic Processes*, N. Y., Dover Publ., (1954).