

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)
Cursos Gerais e Cursos Tecnológicos — Programa «antigo»

Duração da prova: 120 minutos
2000

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

VERSÃO 1

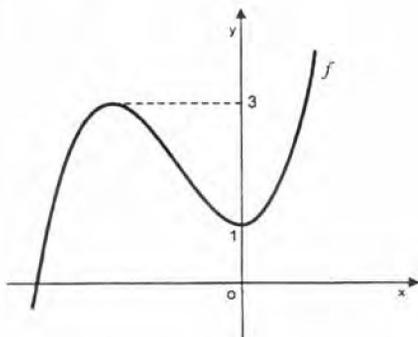
Deve indicar claramente na sua folha de respostas a versão da prova.

A ausência desta indicação implicará a anulação de toda a primeira parte da prova.

Primeira Parte

- As nove questões desta primeira parte são de escolha múltipla.
- Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas a letra correspondente à alternativa que seleccionar para responder a cada questão.
- Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- Não apresente cálculos.

1. Seja f uma função polinomial de terceiro grau, cujo gráfico se encontra parcialmente representado na figura.



Quantas são as soluções da equação $f(x) = 2$?

- (A) uma (B) duas (C) três (D) quatro
2. Considere a função h definida em \mathbb{R} por $h(x) = \sin x$
- Qual das seguintes equações pode definir uma recta tangente ao gráfico de h ?
- (A) $y = 2x + \pi$ (B) $y = -2$
(C) $y = \sqrt{2}x - 9$ (D) $y = x$

3. O coeficiente de ampliação A de uma certa lupa é dado, em função da distância d (em decímetros) da lupa ao objecto, por

$$A(d) = \frac{5}{5-d}$$

Indique a que distância do objecto tem de estar a lupa para que o coeficiente de ampliação seja igual a 5.

- (A) 2 dm (B) 4 dm (C) 6 dm (D) 8 dm

4. Sejam f e g duas funções de domínio \mathbb{R} .

Sabe-se que:

- o gráfico de g é uma recta, que designamos por s
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - g(x)) = 0$

Qual das afirmações seguintes é **necessariamente verdadeira** ?

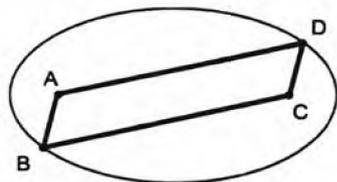
- (A) A recta s é tangente ao gráfico de f
(B) A recta s é secante ao gráfico de f
(C) A recta s não intersecta o gráfico de f
(D) A recta s é uma assíntota do gráfico de f

5. Na figura junta estão representados uma elipse e um paralelogramo $[ABCD]$.

Os vértices A e C são os focos da elipse.

Os vértices B e D são pontos da elipse.

O perímetro do paralelogramo é 30.



Qual é o comprimento do eixo maior da elipse?

- (A) 12 (B) 15 (C) 18 (D) 20

6. Considere um vector \overrightarrow{AB} tal que $\|\overrightarrow{AB}\| = 1$

Qual é o valor do produto escalar $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BA}$?

- (A) 1 (B) -1 (C) 0 (D) 2

7. Num referencial o.n. $Oxyz$, considere os planos definidos pelas equações $z = 1$ e $z = 5$.

Qual das equações seguintes define uma superfície esférica tangente aos dois planos?

(A) $x^2 + y^2 + (z - 3)^2 = 25$

(B) $x^2 + y^2 + (z - 4)^2 = 25$

(C) $x^2 + y^2 + (z - 3)^2 = 4$

(D) $x^2 + y^2 + (z - 4)^2 = 4$

8. Três rapazes e duas raparigas vão dar um passeio de automóvel.

Qualquer um dos cinco jovens pode conduzir.

De quantas maneiras podem ocupar os cinco lugares, dois à frente e três atrás, de modo a que o condutor seja uma rapariga e a seu lado viaje um rapaz?

- (A) 36 (B) 120 (C) 12 (D) 72

9. Lança-se duas vezes um dado equilibrado, com as faces numeradas de 1 a 6.

Qual é a probabilidade de sair face 6 em exactamente um dos dois lançamentos?

- (A) $\frac{1}{36}$ (B) $\frac{5}{36}$ (C) $\frac{1}{18}$ (D) $\frac{5}{18}$

Segunda Parte

Nas questões desta segunda parte apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações necessárias.

Atenção: quando não é indicada a aproximação que se pede para um resultado, pretende-se sempre o valor exacto.

1. Considere a função f , de domínio \mathbb{R} , definida por $f(x) = 2x - \cos x$

Recorrendo exclusivamente a processos analíticos, ou seja, **sem** utilizar a calculadora, resolva as alíneas seguintes:

- 1.1. Recorrendo ao Teorema de Bolzano, mostre que a função f tem, pelo menos, um zero, no intervalo $]0, \pi[$.
- 1.2. Seja f' a função derivada de f . Mostre que $f'(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, e justifique que o zero de f , cuja existência é garantida pelo enunciado da alínea anterior, é o único zero desta função.
- 1.3. A recta de equação $y = 2x - \frac{1}{2}$ intersecta o gráfico de f em infinitos pontos. A abscissa de um desses pontos pertence ao intervalo $[3\pi, 4\pi]$. Determine-a.
2. A pressão atmosférica de cada local da Terra depende da altitude a que este se encontra. Admita que a pressão atmosférica P (medida em quilopascal) é dada, em função da altitude h (em **quilómetros**), por

$$P(h) = 101 e^{-0,12h}$$

- 2.1. A montanha mais alta de Portugal é o Pico, na ilha do Pico - Açores. A altitude do cume do Pico é 2350 metros.

Qual é o valor da pressão atmosférica, nesse local? Apresente o resultado em quilopascal, arredondado às unidades.



- 2.2. Determine x tal que, para qualquer h , $P(h+x) = \frac{1}{2} P(h)$. Apresente o resultado arredondado às décimas.

Interprete o valor obtido, no contexto do problema.

3. Um baralho de cartas completo é constituído por cinquenta e duas cartas, repartidas por quatro naipes de treze cartas cada: espadas, copas, ouros e paus.

3.1. Num certo jogo de cartas, utiliza-se um baralho completo e dão-se treze cartas a cada jogador.

Imagine que está a participar nesse jogo.

Qual é a probabilidade de, nas treze cartas que vai receber, haver exactamente seis cartas do naipe de espadas? Apresente o resultado na forma de percentagem, arredondado às unidades.

3.2. De um baralho completo extraem-se, sucessivamente e sem reposição, duas cartas.

Qual é a probabilidade de pelo menos uma das cartas extraídas ser do naipe de espadas? Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

4. Na figura abaixo está representada, em referencial o.n. $Oxyz$, uma pirâmide quadrangular regular.

O vértice O é a origem do referencial

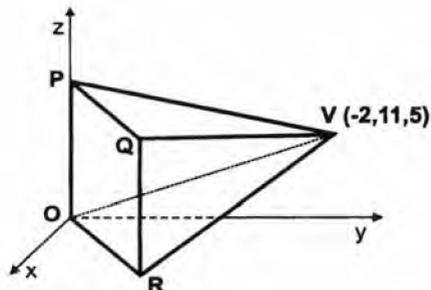
O vértice P pertence ao eixo Oz

O vértice R pertence ao plano xOy

O vértice V tem coordenadas $(-2, 11, 5)$

Uma equação vectorial da recta que contém a altura da pirâmide é

$$(x, y, z) = (7, -1, 5) + k(6, -8, 0), k \in \mathbb{R}$$



4.1. Mostre que a base da pirâmide está contida no plano de equação $3x - 4y = 0$

4.2. Justifique que o centro da base da pirâmide é o ponto de coordenadas $(4, 3, 5)$.

4.3. Determine o volume da pirâmide.

$$\text{Volume da pirâmide} = \frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$$

FIM

COTAÇÕES

Primeira Parte **81**

| | |
|--|-----|
| Cada resposta certa | +9 |
| Cada resposta errada..... | - 3 |
| Cada questão não respondida ou anulada | 0 |

Nota: um total negativo nesta parte da prova vale 0 (zero) pontos.

Segunda Parte **119**

| | |
|-------------------|-----------|
| 1. | 37 |
| 1.1. | 11 |
| 1.2. | 13 |
| 1.3. | 13 |
| 2. | 24 |
| 2.1. | 10 |
| 2.2. | 14 |
| 3. | 22 |
| 3.1. | 11 |
| 3.2. | 11 |
| 4. | 36 |
| 4.1. | 12 |
| 4.2. | 12 |
| 4.3. | 12 |

TOTAL **200**