GROTHENDIECK


PEDRO J. FREITAS
Universidade de Lisboa
pedro@ptmat.fc.ul.pt

MANUEL SILVA
Universidade Nova de Lisboa
mnas@fct.unl.pt

"A própria ideia de esquema é de simplicidade infantil – tão simples, tão humilde, que ninguém antes de mim se tinha atrevido a descer tão baixo."

No passado dia 13 de novembro, uma notícia percorreu vários jornais: a da morte de Alexander Grothendieck, um dos maiores matemáticos do século XX, considerado por muitos o maior de todos. A sua vida, para além da matemática, presta-se a ser relembrada também pelo seu percurso, pelas suas opções políticas e sociais, pelo seu recolhimento radical nos Pireneus no fim da sua vida. Aqui vamos falar um pouco da matemática que Grothendieck nos deixou. Dada a vastidão da sua obra, vamos concentrar-nos apenas num dos maiores problemas do seu tempo, que ele resolveu em grande parte: a demonstração das conjeturas de Weil.

Antes, porém, de entrarmos em detalhes matemáticos, queremos falar do método que Grothendieck preferia para fazer matemática, o método do "mar que sobe", envolvendo os problemas e fazendo-os suavemente desaparecer. Citamos a sua autobiografia.

> "Consideremos, por exemplo, a tarefa de demonstrar um teorema que ainda permanece hipotético (coisa que, para alguns, parece resumir todo o trabalho matemático). Vejo duas maneiras de o fazer. [...]
>
> A imagem que me apareceu há algumas semanas era a seguinte. [A] coisa desconhecida pareceu-me ser como uma porção de terra, uma greda compacta relutante em permitir a entrada. Podemos atacá-la com picaretas ou pés-de-cabra ou mesmo martelos pneumáticos: esta é a primeira abordagem, correspondente ao 'escopro' (com ou sem martelo).
>
> A outra é a do mar. O mar avança gradual e silenciosamente, nada se parece quebrar, nada mexe, a água está tão longe que mal a ouvimos... No entanto, ela acaba por cercar a substância indómita, esta torna-se gradualmente uma península, em seguida uma ilha e depois uma ilhota, que acaba por ser submersa por sua vez, como se se tivesse finalmente dissolvido no oceano que se estende até ao horizonte..."
>
> *Récoltes et Semailles*

Deligne também corrobora este ponto de vista. Segundo ele, nas palestras de Grothendieck, apresentavam-se "pequenos passos e definições, nada parece acontecer, mas no fim da palestra aparece um teorema claramente não trivial."

Depois de estudar mais ou menos autonomamente, nos anos 50 Grothendieck dedica-se à análise funcional, no seguimento da tese de doutoramento que escreveu, aos 25 anos, sob a orientação de Schwarz. É em 1957 que começa a dedicar-se mais intensamente a questões de geometria algébrica, instalando-se no Institut des Hautes Études Scientifiques (IHES), então recentemente fundado. Nesse instituto a investigação é feita em seminários, que funcionam efetivamente como grandes grupos de trabalho intensivo, com discussões que chegam a durar mais de dez horas.

Nesses anos, Grothendieck ganhou fama ao demonstrar o teorema de Riemann-Roch-Hirzebruch, sobre a co-homologia de variedades complexas compactas. Uma co-homologia é uma sucessão de grupos abelianos que pode associar-se a uma determinada estrutura e que contém informação importante sobre essa estrutura, e foi uma das ferramentas de investigação mais frutíferas dentro do trabalho de Grothendieck. Pode definir-se uma co-homologia para qualquer espaço topológico, e esta descreve algumas características desse espaço, como, por exemplo o número e a posição relativa dos seus "buracos". Por exemplo, a co-homologia de um plano é diferente da co-homologia de um plano ao qual se retira um ponto.

Um dos objetos que Grothendieck criou (embora baseando-se em ideias já conhecidas) e usou no seu trabalho de forma central foram os famosos *esquemas*, objetos muito abstratos que generalizam o conceito de variedade algébrica.

Uma variedade algébrica é o conjunto de zeros comuns a uma família de polinómios, geralmente em várias variáveis. São exemplos de variedades: circunferências, elipses, cónicas ou quádricas (neste caso, usando apenas polinómios de grau dois). A definição destas variedades depende do lugar onde procuramos os zeros: por exemplo, em $\mathbb{R}^2$, a variedade definida pelo polinómio $x^2 + y^2 + 1 = 0$ é vazia, mas isso não acontece se a considerarmos definida sobre $\mathbb{C}^2$. Um esquema é um conceito mais abstrato que generaliza este.

Um dos seus companheiros de trabalho foi Jean-Pierre Serre, que, segundo Grothendieck, preferia o método de atacar os problemas a escopro e martelo, ainda que com grande elegância, indo diretamente à resposta. Foi Serre que, num seminário, apresentou uma demonstração parcial de uma das conjeturas de Weil, baseada justamente no estudo de um dos grupos de co-homologia de certas estruturas. Serre achava que tinha "forçado" a demonstração para obter os grupos de co-homologia, mas Grothendieck achou que os conceitos poderiam ser mais frutíferos, podendo ser trabalhados no sentido de se obter todos os grupos de co-homologia.

Com a colaboração de Artin, Grothendieck dedica-se à demonstração das conjeturas de Weil, desenvolvendo uma

Alexander Grothendieck no Institut des Hautes Études Scientifiques.

certa co-homologia inspirada no trabalho de Serre. Descrevemos brevemente estas conjeturas.

Seja F_q um corpo finito com q elementos e K o seu fecho algébrico. Seja X uma variedade projetiva sobre K (isto é, é o conjunto de zeros de uma família de polinómios homogéneos de coeficientes inteiros).

Seja N_r o número de pontos de X cujas coordenadas pertencem a F_{q^r}, corpo com q^r elementos, para $r = 1, 2, \ldots$. Com estes números N_r construímos agora uma função, chamada função zeta de X, definida do seguinte modo:

$$Z(t) = \exp\left(\sum_{r=1}^{\infty} N_r \frac{t^r}{r}\right).$$

As conjeturas são então sobre esta função $Z(t)$:

(1) $Z(t)$ é uma função racional de t, isto é, pode ser escrita como quociente de dois polinómios em t,

(2) mais precisamente, se $n = \dim X$, temos

$$Z(t) = \frac{P_1(t)P_3(t)\ldots P_{2n-1}(t)}{P_0(t)P_2(t)\ldots P_{2n}(t)},$$

em que cada raiz de cada $P_i(t)$ é um número complexo de módulo $q^{-i/2}$;

(3) as raízes de $P_i(t)$ são trocadas com as raízes de $P_{2n-i}(t)$ pela substituição $t \mapsto 1/q^n t$,

(4) se X se obtiver como redução, módulo p, de uma variedade $\bar{X}$ definida sobre um subcorpo de $\mathbb{C}$, então $b_i := \text{gr } P_i(t)$ é o i-ésimo número de Betti de $\bar{X}$.

A última parte de (2) é conhecida como a hipótese de Riemann (para esta função zeta, não para a função zeta de Riemann) e a afirmação (3) pode ser reescrita como uma equação funcional, satisfeita por $Z(t)$:

$$Z\left(\frac{1}{q^n t}\right) = \pm q^{nE/2} t^E Z(t),$$

em que E é a característica de Euler de X.

Grothendieck tentou então criar uma co-homologia de certos espaços, de tal modo que, depois de e bem estabelecida e estudada, a demonstração destas conjeturas aparecesse simplesmente, como o mar subindo. O próprio Weil já tinha ensaiado uma co-homologia (chamada co-homologia de Weil), Grothendieck criou a co-homologia *étale*, que viria a ser uma das ferramentas fundamentais da demonstração destas conjeturas. Esta demonstração, em todo o caso, foi apenas terminada por Deligne, seu aluno, que acabou por obter uma demonstração muito subtil e intrincada do resultado, usando indução na dimensão da variedade.

Sobre o seu trabalho acerca das conjeturas de Weil, disse Grothendieck:

> "A coisa mais crucial aqui, do ponto de vista das conjeturas de Weil, é que a nova noção [de espaço] é suficientemente vasta para associar a cada esquema um 'espaço generalizado' ou *topos* (chamado o *topos étale* do esquema em questão). Certos 'invariantes de co-homologia' deste *topos* (infantis na sua simplicidade!) pareciam ter uma boa hipótese de fornecer 'o que seria necessário' para dar às conjeturas o seu significado completo e (quem sabe!) talvez fornecer os meios para a sua demonstração.
>
> A própria ideia de esquema é de simplicidade infantil – tão simples, tão humilde, que ninguém antes de mim se tinha atrevido a descer tão baixo. Em resumo, tão infantil que durante anos, e apesar das evidências, para muitos dos meus colegas eruditos 'não era uma coisa séria'. "
>
> *Récoltes et Semailles*

Estes desenvolvimentos teóricos, abstratos, em geometria algébrica foram postos em livro nos famosos *Éléments de Geometrie Algébrique* (EGA, que alguns matemáticos comparam aos *Elementos* de Euclides), e *Séminaire de Géometrie Algébrique*, escritos com o auxílio de Dieudonné. Estes descrevem a investigação feita no IHES nos anos 50 e 60 e tornaram-se de tal modo centrais na disciplina que Serre abriu uma palestra em Estocolmo em 1962 começando por dizer que, ao falar de Geometria Algébrica, tomava a expressão no sentido "que veio a tornar-se o seu após estes últimos anos: o da teoria dos esquemas". Terminamos com uma frase tirada do início dos EGA que diz algo quer sobre o conteúdo quer sobre o estilo do trabalho de Grothendieck: "É adequado dar à geometria algébrica toda a generalidade e a flexibilidade desejáveis, assentando-a sobre a noção de esquema".