Capicuas

Joaquim Eurico Nogueira
Universidade Nova de Lisboa
jen@fct.unl.pt

Que haverá de mais banal do que uma capicua? Será que 1991 tem algo de especial? Ou 2112? À partida, nada! Mas isso é sem contar com a enorme criatividade dos matemáticos, que em tudo conseguem encontrar problemas interessantes! A conjectura das capicuas, referida no texto, ilustra bem esta situação. Formulada há 75 anos, aguarda ainda resolução, a qual, seguramente, demorará muitos anos a chegar!

As *capicuas*[1] (palavra com origem catalã, onde "*cap i cua*" significa "cabeça e cauda") são números cuja disposição dos algarismos é simétrica (ou seja, lidos da direita para a esquerda ou da esquerda para a direita são iguais). Não é difícil dar exemplos:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88 e 99

são todos os que existem entre 1 e 100. Não parece existir nenhuma fórmula simples que gere sequencialmente todas as capicuas existentes, muito embora se note que muitas surgem regularmente espaçadas; pode, no entanto, mostrar-se que, dada uma base n, de entre os números que possuem k algarismos, $n^{(k-2)/2} \times (n-1)$ são capicuas, se k for par, e $n^{(k-1)/2} \times (n-1)$, se k for ímpar.

No caso concreto da base 10, verifica-se então que existem 9 capicuas com um algarismo {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} e outras 9 com dois {11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99}; existem $90 = 10 \times 9$ capicuas com três e quatro algarismos, $900 = 100 \times 9$ capicuas com cinco e seis algarismos, etc.

Existe uma curiosa conjectura, a respeito destes números, à qual Martin Gardner se refere no seu livro *Puzzles From Other Worlds* por meio de uma pequena e interessante história, que seguidamente se reproduz:

No decorrer da longa viagem através da Via Láctea o computador VOZ da nave espacial Bagel estava a sentir-se aborrecido. Para o entreter o comandante da nave, o coronel Ronald Couth, propôs-lhe a seguinte questão:

– Existe um problema que ainda nunca foi resolvido e acerca do qual ainda muito pouco se sabe. Chama-se a conjectura das capicuas.

– O quê? – pergunta Gigo, o seu imediato.

– Ela existe desde os anos 30 do século XX[2] *, e diz que se se começar com um qualquer número, se invertermos a ordem dos seus algarismos a fim de obtermos um outro e somarmos os dois assim obtidos, após um número finito de aplicações sucessivas deste processo chegar-se-á sempre a uma capicua. É claro que se se partir de uma capicua não é preciso fazer contas nenhumas. Vamos experimentar com o número do ano em que estamos: 2058.*

Ronald Couth principiou a fazer cálculos e após sete aplicações sucessivas do processo chegou à capicua 56265.

– Isto funciona sempre?

– Aí é que está o cerne da questão - responde o comandante - ninguém sabe. Se se começar com um número assimétrico de dois algarismos cuja soma for menor do que 10 ou então 11 obtém-se uma capicua aplicando o processo uma única vez. Se a soma for 10, 12 ou 13 é necessário aplicá-lo duas vezes. Para as somas 14 e 15 o número de aplicações é 3 e 4 respectivamente. E se a soma for 16 repete-se o processo 6 vezes.

– E se for 17? – pergunta o imediato.

– O 17 é que é o problema. Só dois números de dois algarismos têm 17 como soma dos seus algarismos: o 89 e o 98. Com qualquer um deles é necessário aplicar 24 vezes o processo para se chegar a uma capicua, que é o 8813200023188.

Ao ser-lhe proposto este jogo, o computador ficou encantado e principiou, de imediato, a verificar todos os inteiros por ordem crescente. Todos eles forneciam capicuas até que chegou ao número 196. Mas com este algo estava mal... Após alguns minutos de cálculos e milhares de operações, não havia ainda capicua. Passaram algumas horas e vários biliões de cálculos e a capicua continuava sem aparecer.

- Eu poderia repetir este processo alguns biliões de vezes - disse VOZ - mas acho que seria pura perda de tempo. Já fiz correr sofisticados algoritmos probabilísticos e as possibilidades de vir a encontrar uma capicua desta maneira para este número são praticamente nulas. Vou tentar escrever um programa para testar se a conjectura é ou não falsa.

[1] Por vezes também são designadas de capicuas as palavras cuja disposição das letras é simétrica, como: anona, sopapos, mexem, marram, salas, socos, seres, matam, ovo, rapar, rasar… Por motivos óbvios, neste artigo restringimo-nos apenas aos números.

[2] Foi D. H. Lehmer (1905-1991) o primeiro a formular a conjectura, em 1938, num artigo publicado na revista belga *Sphinx*. Um ano depois, na mesma revista, D. C. Duncan mostrou que a conjectura era falsa em bases que sejam potências de 2. Para mais detalhes consultar [4].

Não sabemos como é que a história acabou. Afinal ela passou-se no futuro...

Investigações feitas por vários matemáticos parecem indicar, embora não de forma conclusiva, que a conjectura é falsa. A aplicação deste processo a todos os números inferiores a 10^5 mostra que a percentagem daqueles que originam uma capicua em menos de 10.000 iterações tende a diminuir, e isto de forma regular.

São as seguintes as percentagens de naturais que, nos intervalos considerados, e em menos de 10.000 iterações do referido processo, convergem para uma capicua:

$$
\begin{array}{ll}
1 \leq n \leq 9 & \rightarrow 100\% \\
10 \leq n \leq 99 & \rightarrow 100\% \\
100 \leq n \leq 999 & \rightarrow 98,6\% \\
1000 \leq n \leq 9999 & \rightarrow 97,4\% \\
10000 \leq n \leq 99999 & \rightarrow 93,5\%
\end{array}
$$

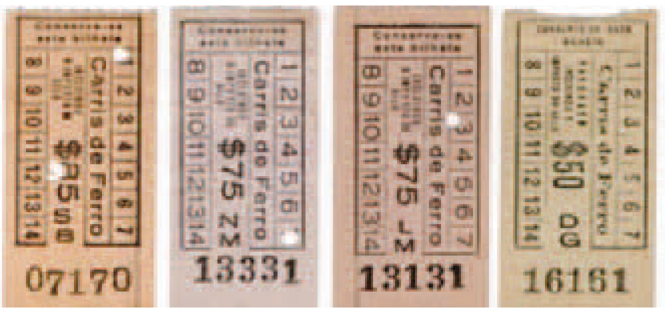
Dentre os números que vão de 100 a 10.000 há 249, que se agrupam em cinco sequências distintas (cada elemento de uma sequência é obtido do anterior por aplicação do algoritmo atrás descrito), e que parecem não convergir para nenhuma capicua; dentre aqueles que vão de 10.000 a 100.000 há 5.842 com o mesmo comportamento, e que se agrupam em 69 sequências distintas. Estes números integrantes de sequências que não parecem convergir para nenhuma capicua são habitualmente designados por *Números Lychrel*, termo criado em 2002 pelo matemático Wade Van Landingham, que os estudou aprofundadamente, baseado nas letras do nome da sua namorada, Cheryl; por sua vez, o conjunto formado pelos primeiros elementos destas sequências (que, como é óbvio, é um subconjunto dos Lychrel) é designado, simplesmente, por *geradores* (assinale-se que estas notações não são consensuais pois alguns puristas preferem atribuir a designação de números Lychrel apenas aos geradores). Os números Lychrel inferiores a 2000 são:

196, 295, 394, 493, 592, 689, 691, 788, 790, 879, 887, 978, 986, 1495, 1497,1585, 1587, 1675, 1677, 1765, 1767, 1855, 1857, 1945, 1947, 1997.

Por sua vez, a sequência gerada pelo 196 começa assim

196, 887, 1675, 7436, 13783, 52514, 94039, 187088, 1067869, 10755470, ... ;

em finais de 2012 já haviam sido calculadas 1000 milhões de iterações, e já havia sido alcançado um número com quase 414 milhões de algarismos... e ainda sem se conseguir alcançar uma capicua!



As figuras acima mostram exemplos de capicuas no quotidiano.

Outro aspecto curioso é o facto de, até 10.000, de entre os números que de facto convergem, não haver nenhum que necessite de mais de 24 passos para alcançar uma capicua, sendo este valor atingido pelos números 89 e 98. Até 100.000, o número que mais iterações necessita é o 10.911: após 55 aplicações deste método, finalmente surge a capicua

4.668.731.596.684.224.866.951.378.664.

O mais recente recorde de que tenho conhecimento (datado de 28 de Março de 2007) pertence ao número com 20 algarismos 10.200.000.000.065.287.900 que *gera* uma capicua após 257 iterações!

Repare-se ainda que alguns dos números que, usando este método iterativo não originam capicuas, falham esse objectivo por muito pouco. Vejam-se os exemplos (entre parênteses está referida a ordem da iteração; as falhas estão a sublinhado):

$$\begin{aligned}
196(16) &= 897\underline{1}0\underline{0}798\\
7059(6) &= 46\underline{9}2\underline{8}64\\
879(8) &= 88\underline{8}4\underline{7}88\\
10911(55) &= 466\underline{4}7315966842248669513\underline{7}8664\\
1997(15) &= \underline{9}3\underline{5}2322\underline{6}3\underline{8}\\
8029(22) &= 279988\underline{6655}889972
\end{aligned}$$

De seguida apresenta-se o quadro completo das capicuas obtidas pelo referido processo, a partir dos números 1 a 100. Entre parênteses indica-se o número de iterações necessárias para se alcançar o resultado:

$1(0) \rightarrow 1$	$2(0) \rightarrow 2$
$3(0) \rightarrow 3$	$4(0) \rightarrow 4$
$5(0) \rightarrow 5$	$6(0) \rightarrow 6$
$7(0) \rightarrow 7$	$8(0) \rightarrow 8$
$9(0) \rightarrow 9$	$10(1) \rightarrow 11$
$11(0) \rightarrow 11$	$12(1) \rightarrow 33$
13 e $31(1) \rightarrow 44$	14 e $41(1) \rightarrow 55$
15 e $51(1) \rightarrow 66$	16 e $61(1) \rightarrow 77$
17 e $71(1) \rightarrow 88$	18 e $81(1) \rightarrow 99$
19 e $91(2) \rightarrow 121$	$20(1) \rightarrow 22$
$22(0) \rightarrow 22$	23 e $32(1) \rightarrow 55$
24 e $42(1) \rightarrow 66$	25 e $52(1) \rightarrow 77$
26 e $62(1) \rightarrow 88$	27 e $72(1) \rightarrow 99$
28 e $82(2) \rightarrow 121$	29 e $92(1) \rightarrow 121$
$30(1) \rightarrow 33$	$33(0) \rightarrow 33$
34 e $43(1) \rightarrow 77$	35 e $53(1) \rightarrow 88$
36 e $63(1) \rightarrow 99$	37 e $73(2) \rightarrow 1221$
38 e $83(1) \rightarrow 121$	39 e $93(2) \rightarrow 363$
$40(1) \rightarrow 44$	$44(0) \rightarrow 44$
45 e $54(1) \rightarrow 99$	46 e $64(2) \rightarrow 121$
47 e $74(1) \rightarrow 121$	48 e $84(2) \rightarrow 363$
49 e $94(2) \rightarrow 484$	$50(1) \rightarrow 55$
$55(0) \rightarrow 55$	56 e $65(1) \rightarrow 121$
57 e $75(2) \rightarrow 363$	58 e $85(2) \rightarrow 484$
59 e $95(3) \rightarrow 1111$	$60(1) \rightarrow 66$
$66(0) \rightarrow 66$	67 e $76(2) \rightarrow 484$
68 e $86(3) \rightarrow 1111$	69 e $96(4) \rightarrow 4884$
$70(1) \rightarrow 77$	$77(0) \rightarrow 77$
78 e $87(4) \rightarrow 4884$	79 e $97(6) \rightarrow 44044$
$80(1) \rightarrow 88$	$88(0) \rightarrow 88$
89 e $98(24) \rightarrow 8813200023188$	$90(1) \rightarrow 99$
$99(0) \rightarrow 99$	$100(1) \rightarrow 101$

Terá esta conjectura alguma hipótese de ser verdadeira? É extremamente improvável, dado que os elementos de cada uma das anteriores sequências que parecem não produzir capicuas atingem um número de algarismos cada vez maior, enquanto que, simultaneamente, a percentagem de capicuas relativamente ao total de números que possuem 3, 4, 5, ..., 10, ..., 20, ..., etc., algarismos está sempre a diminuir!...

Algo de que já se tem a certeza é que a conjectura das capicuas é falsa em base 2, pois nessa situação foi possível obter um contra-exemplo: o número 101010 (ou 42, em notação decimal). Após quatro aplicações do processo obtemos $10\underline{11}01\underline{00}$, após oito obtemos $10\underline{111}01\underline{000}$, após doze tem-se $10\underline{1111}01\underline{0000}$, isto é, cada quatro aplicações do processo iterativo aumentam as sequências sublinhadas em um elemento. O irmão[3] Alfred Brousseau provou que este facto se repete indefinidamente, o que impossibilita o aparecimento de capicuas. Basta reparar no seguinte: considerando que 1_n e 0_n significam n uns consecutivos e n zeros consecutivos, respectivamente, verifica-se, na base 2, o seguinte processo iterativo, que não produz capicuas:

$$\begin{aligned}
\ldots &\rightarrow 101_n010_n \rightarrow 110_{n-2}01 \rightarrow 101_n010_{n+1}\\
&\rightarrow 110_n101_{n-1}01 \rightarrow 101_{n+1}010_{n+1} \rightarrow \ldots
\end{aligned}$$

[3] Pertencia à ordem dos irmãos das escolas cristãs, Fratres Scholarum Christianarum.

Repare-se agora que esta sequência não é um contra-exemplo isolado, pois foi possível obter mais alguns, descobertos por David Seal, noutras bases. O exemplo representado na tabela 1 generaliza-se facilmente a qualquer base que seja potência de 2 (E e F são os algarismos que, em base 16, representam os números decimais 14 e 15, e U e V são os que, em base 32, representam os decimais 30 e 31) ou então os exemplos esporádicos na tabela 2 (em base 26 tem-se a correspondência com os números decimais $A = 11$, $B = 12$, ..., $J = 20$, $K = 21$, $L= 22$, ...), para além de outros nas bases 11, 17 e 20. Como curiosidade, refira-se que os menores números que, desde a base 2 até à 19 originam sequências que *parecem não produzir capicuas* (em alguns casos isso foi provado) são os seguintes, escritos em notação decimal:

2	22	**8**	1021	**14**	361
3	100	**9**	593	**15**	447
4	255	**10**	196	**16**	413
5	708	**11**	1011	**17**	3297
6	1079	**12**	237	**18**	519
7	2656	**13**	2196	**19**	341

Uma possível generalização deste problema poderia ser a seguinte: admitindo que numa dada base existem números que, por aplicação do método atrás descrito, nunca originam capicuas, qual será a menor base onde isso já sucede? É óbvio que uma base nestas condições existe: basta tomar a base n+1 se o número em questão for n (pois nessa base n é escrito usando um único algarismo, o qual, trivialmente, é capicua); mas só excepcionalmente esta será a menor base onde tal fenómeno ocorre. Haverá algum método que nos permita determiná-la?

Para terminar este assunto refiram-se ainda as seguintes curiosidades: é verdade que a maior parte das capicuas, quando elevadas ao quadrado ou ao cubo, deixa de o ser (apesar de haver algumas excepções como $11^2 = 121$, $111^2 = 12321$ ou $111^3 = 1367631$); no entanto, se o quadrado ou o cubo de um número for uma capicua é muito provável que o número inicial também o seja. No caso dos quadrados encontram-se apesar de tudo algumas, raras, excepções, sendo as duas mais pequenas dadas pelos números 676, que admite a raiz quadrada 26 e 698896, que admite a raiz quadrada 836. No caso dos cubos parece existir apenas uma única excepção: foram analisados todos os cubos, que são capicuas, até $2,8 \times 10^{14}$ e só foi descoberta uma única raiz cúbica, que não é capicua: 2201, a raiz cubica de 10662526601.

A situação das quartas potências parece ser ainda melhor: todos os números até $2,8 \times 10^{14}$ que são raízes quartas de alguma capicua foram investigados e descobriu-se não só que também são capicuas, e mais ainda, que são sempre da forma 10000... 00001. Mais *para cima* o panorama parece, subitamente, alterar-se... É que, até agora, não foi encontrada nenhuma capicua que seja quinta, sexta, ..., décima potência, de alguma outra capicua. E por isso mesmo Gustavus J. Simmons conjecturou que todas as potências da forma X^k (onde $k \geq 5$), com X capicua (exceptuando, obviamente, o 1), não são capicuas...

Acrescente-se ainda que, abaixo de 10^{14}, há 310 quadrados que simultaneamente são capicuas e de entre estes apenas sete, ou seja 2,3%, têm um número par de algarismos. Haverá alguma razão para que isso aconteça? Quanto a cubos que simultaneamente são capicuas, há a salientar que, abaixo de $1,102 \times 10^6$, existem apenas trinta.

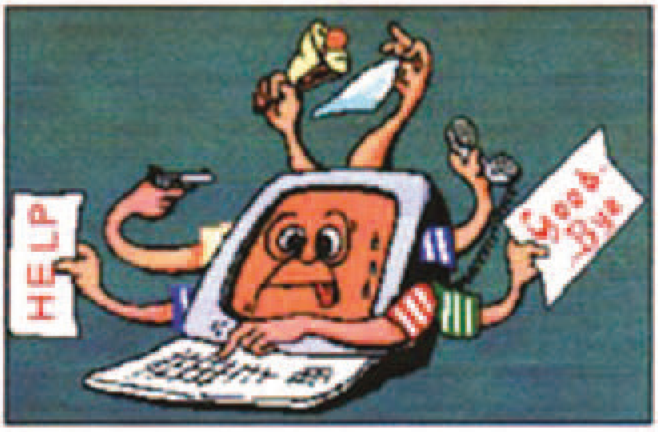
Aproveito para colocar o seguinte problema (da autoria de Mario Borelli e Cecil Mast, Indiana, E.U.A.): chamando *capicuístico* a um número natural n tal que existe uma base b, (com b menor ou igual a $n/2$) onde podemos escrevê-lo como capicua, como poderemos caracterizar este tipo de números?

Tabela 1

Base	Número	Após n iterações obtemos
2	10_n11010_n00	$n = 4 \rightarrow 101_{n+1}11010_{n+1}00$
4	103_n33230_n00	$n = 6 \rightarrow 103_{n+1}33230_{n+1}00$
8	107_n77670_n0	$n = 8 \rightarrow 107_{n+1}77670_{n+1}00$
16	$10F_nFFEF0_n00$	$n = 10 \rightarrow 10F_{n+1}FFEF0_{n+1}00$
32	$10V_nVVUV0_n00$	$n = 12 \rightarrow 10V_{n+1}VVUV0_{n+1}00$

Tabela 2

Base	Número	Após n iterações obtemos
4	$10332020002322_n2302333113230$	$n = 6 \rightarrow 10332020002322_{n+3}2302333113230$
26	$1N5ELA6CP_nP6E70_n0D59ME5N$	$n = 4 \rightarrow 1N5ELA6CP_{n+1}P6E70_n0D59ME5N$



O computador VOZ tentando provar a conjectura das capicuas.

Por exemplo, 11 não é um número capicuístico, pois

$$11_{10} = 1011_2 = 102_3 = 23_4 = 21_5$$

mas sim o 13, pois $13_{10} = 111_3$. É fácil de provar que os números da forma $b^k \pm 1$, $k \geq 2$ são capicuísticos e que todo o número natural maior ou igual a 7 não capicuístico é primo; mas o contrário já não é verdade, como vimos com o exemplo do 13, atrás referido.

Os primeiros números não capicuísticos são:

4, 6, 11,19, 53,79, 103, 137, 139, 149, 163, 179,
223, 263, 283, 293, 311, 317, 347.

O mexicano Carlos Rivera calculou a soma dos inversos de todas as capicuas (em base 10) inferiores a 10.000.000 e verificou que essa soma converge para um valor muito próximo de 3,36977. Como, para bases m cada vez maiores, os primeiros m números são forçosamente capicuas e se sabe que a soma infinita

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \dots$$

tende para infinito, tem de se concluir que a soma dos inversos das capicuas numa base m tende para infinito à medida que m aumenta. Mas essa soma tende para infinito muito *depressa*, muito *devagar*, tem algum comportamento especial?

São imensos os problemas suscitados pelas capicuas e que nunca se resolveram por falta de linguagem e algoritmos apropriados. Mas não se deve perder a esperança de que isso ainda venha a suceder. Pode ser que no ano 2058 o nosso amigo, o computador VOZ, descubra se estas conjecturas são verdadeiras ou falsas...

E não resisto a colocar um problema: *mostre que toda a capicua com um número par de algarismos é sempre divisível por 11*, e a transcrever uma anedota que encontrei num fórum sobre capicuas: "Sabem os senhores como é que eu aprendi o que era uma capicua? Quando ouvi pela primeira vez, garoto ainda e no Portugal a preto e branco do pré-74, uma anedota palerma que se contava na altura, a meia voz: capicua é um GNR, besta-sela-besta." Memórias[4] do passado!...

BIBLIOGRAFIA:

[1] Delahaye, Jean-Paul, "Déconcertantes conjectures", em *Pour la Science*, nº 169, págs. 92-97.

[2] Gardner, Martin, *Puzzles From Other Worlds: Fantastical Brainteasers from Isaac Asimov's Science Fiction Magazine*, Vintage, 1984.

[3] Nogueira, Joaquim Eurico, *Curiosidades numéricas*, Colecção Leituras em Matemática, editado pela SPM, Sociedade Portuguesa de Matemática, 2001.

[4] Styer, Robert, *The Palindromic conjecture and the Fibonacci sequence*, em *www41.homepage.villanova.edu/robert.styer/index.html*.

SOBRE O AUTOR

Joaquim Eurico Nogueira é autor de artigos científicos sobre grupos e recorrências lineares, e de livros sobre divulgação da matemática.

O autor escreve de acordo com a antiga ortografia.

[4] Com isto não se pense que não tenho admiração e respeito pelos militares da GNR que procuram eficazmente cumprir o seu papel na defesa da ordem e da tranquilidade públicas, da segurança e da protecção das pessoas e bens, assim como na prevenção da criminalidade. Esta anedota tem de ser entendida no contexto da época (anterior à revolução dos cravos), em que a antipatia que parte da população portuguesa tinha pelo Governo se estendia às forças policiais que se encontravam sob a sua alçada.