

Jorge Nuno Silva
Universidade de Lisboa
jnsilva@cal.berkeley.edu

# QUADRADOS E CUBOS

David Wells, um autor bem conhecido entre nós, já que algumas das suas obras foram editadas em português, tem um novo livro: *Games and Mathematics – Subtle Connections* (Cambridge UP 2012). Wells propõe uma viagem fascinante por problemas e teoremas, mostrando como as ligações entre os jogos abstratos e a matemática são profundas e variadas. Desta reflexão que, se bem que filosófica, é também matemática, retiramos um resultado para partilhar com os leitores.

Pouco após aprender que a soma dos primeiros $n$ naturais é dada por $n(n+1)/2$, muitos de nós encontrámos uma fórmula para a soma dos cubos dos primeiros naturais:

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}\,.$$

Ora, combinando as duas relações mencionadas acima, obtemos a igualdade surpreendente

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2\,.$$

Wells pergunta-se "será isto uma coincidência, ou tratar-se-á de algo profundo?" O que se entende por coincidência, em matemática, é discutido no livro em apreço, assim como o que caracteriza a profundidade de um resultado.

As expressões conhecidas para as somas das potências dos primeiros naturais não costumam apresentar esta, chamemos-lhe assim, simetria. Será que se trata da ponta de algum *iceberg*, será que alguma outra área matemática está aqui a espreitar?...

Wells chama a nossa atenção para um resultado de Louville de 1857. Para o exibir relembremos que os divisores de um número natural incluem o 1 e o próprio número. Por exemplo, os divisores de 12 são 1, 2, 3, 4, 6, 12. Assim, 12 tem seis divisores, o que também se escreve $d(12) = 6$.
Calculemos o número de divisores de cada destes números. Temos $d(1) = 1$, $d(2) = d(3) = 2$, $d(4) = 3$, $d(6) = 4$, $d(12) = 6$ e um pequeno cálculo dá-nos

$$1^3 + 2^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 6^3 = (1 + 2 + 2 + 3 + 4 + 6 + 12)^2 = 324\,.$$

O que o Teorema de Liouville diz é exatamente que este tipo de igualdade se verifica sempre que consideramos os divisores de um natural $n$ qualquer. No caso de $n$ ser uma potência de 2, digamos $n = 2^{k-1}$, tem-se $d(n) = k$ e os divisores de $n$ são $1, 2, 2^2, \ldots, 2^{k-1} = n$, donde $d(1) = 1$, $d(2) = 2$, $d(4) = 3$, $\ldots$, $d(2^{k-1}) = k$ e $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2$.

Como caracterizar os conjuntos de números $x, y, \ldots, z$ tais que $x^3 + y^3 + \cdots + z^3 = (x + y + \cdots + z)^2$?

Não se sabe se esta igualdade só se verifica neste caso particular de Liouville, em que os números em questão são os números de divisores dos divisores de um dado natural. Aqui fica um problema aberto para os nossos leitores...

Soluções para os problemas do último número: