António Machiavelo
Universidade do Porto
ajmachia@fc.up.pt

DÍZIMAS PERIÓDICAS E UMA **CONJETURA** DE **EMIL ARTIN**

Sabe o leitor que 0,99999999999 ... = 1? E porquê? Supondo, é claro, que as reticências significam que os noves não terminam... E sabe que o período da dízima que representa $\frac{1}{p}$, sendo p um número primo, é um divisor de $p-1$? E que há ainda problemas em aberto sobre as dízimas que representam números racionais?

Quando um número racional é expandido em dízima, três coisas diferentes podem ocorrer, como é ilustrado pelos exemplos seguintes:

$$\frac{1}{8} = 0,125 \quad ;$$

$$\frac{1}{7} = 0,142857\,142857\,142857\ldots \quad ;$$

$$\frac{1}{6} = 0,16666666\ldots .$$

A primeira dízima é finita, ao passo que as outras duas são infinitas periódicas, mas na segunda o período – a parte que se repete *ad infinitum* – tem início imediatamente a seguir à vírgula decimal, enquanto na terceira tal não acontece. Diz-se que a segunda é *periódica pura*, enquanto a terceira é *periódica mista*.

De forma a tornar a representação mais compacta e clara, é usual indicar o período colocando-o entre parêntesis. Por exemplo, $\frac{1}{7} = 0,(142857)$. Aqui ficam mais dez exemplos:

$\frac{1}{11} = 0,(09)\,;$ $\quad \frac{1}{13} = 0,(076923)\,;$

$\frac{1}{17} = 0,(0588235294117647)\,;$ $\quad \frac{1}{101} = 0,(0099)\,;$

$\frac{2}{13} = 0,(153846)\,;$ $\quad \frac{3}{17} = 0,(1764705882352941)\,;$

$\frac{19}{20} = 0,95\,;$ $\quad \frac{19}{27} = 0,(703)\,;$

$\frac{1}{28} = 0,03(571428)\,;$ $\quad \frac{443}{520} = 0,851(923076)\,.$

Não é difícil ver que a expansão em dízima de um número racional é necessariamente periódica (considerando as finitas como tendo período constituído pelo algarismo 0) e que, reciprocamente, todo o número representado por uma dízima periódica é um número racional. A primeira afirmação resulta facilmente do que é feito no algoritmo da divisão, como abaixo veremos, enquanto a segunda resulta de uma simples técnica para converter uma dízima periódica numa fração, que se ilustra aqui com um exemplo, o da dízima 1, 8(43). O primeiro passo é dar um nome ao número correspondente: r, por exemplo. De seguida, multiplica-se a dízima pela potência de 10 que faça com que o período se inicie logo após a vírgula (se tal for já o caso, essa potência é 10^0), e depois pela potência necessária para trazer um período inteiro para a esquerda da vírgula:

$$\begin{aligned} 10\,r &= 18,43\,43\,43\ldots \\ 10^3\,r &= 1843,43\,43\,43\ldots \quad . \end{aligned}$$

Daqui resulta:

$$10^3\,r - 10\,r = 1825,$$

portanto $(10^3 - 10)\,r = 1825$ ou seja, $r = \frac{1825}{990} = \frac{365}{198}$.

Quando se aborda este assunto da representação em dízima, deve observar-se que tal representação nem sempre é única. Mais precisamente, as dízimas finitas têm também uma representação infinita, que se obtém retirando uma unidade ao dígito mais à direita e acrescentando a seguir a ele uma infinidade de noves. Por exemplo: 1, 25 = 1, 24(9).

Isto pode ser visto aplicando a técnica acabada de descrever à dízima 1,24(9). Já agora, o mesmo procedimento pode ser aplicado para ver que 0, (9) = 1. No entanto, deve o leitor ficar informado de que o porquê exato por detrás destas igualdades passa por saber o que são exatamente os números reais e qual o significado preciso de uma dízima infinita, para o que se recomenda, como ponto de partida, a página *http://en.wikipedia.org/wiki/Construction_of_the_real_numbers* e as referências aí contidas.

Um facto curioso é que o tamanho do período da dízima de uma fração irredutível (em que o máximo divisor comum do numerador e do denominador é 1) depende apenas do denominador. Para ver que assim é, basta perceber o que é feito quando se usa o algoritmo de divisão habitual para expandir uma fração irredutível $\frac{a}{b}$ ($a, b \in \mathbb{Z}$, $b \geq 2$, $\operatorname{mdc}(a,b) = 1$) em dízima. Ora, esse algoritmo é simplesmente um procedimento para determinar os números inteiros $q, q_1, q_2, q_3, \ldots$ tais que:

$$\begin{aligned} a &= b\,q + r_0 \\ 10\,r_0 &= b\,q_1 + r_1 \\ 10\,r_1 &= b\,q_2 + r_2 \\ &\cdots \\ 10\,r_n &= b\,q_{n+1} + r_{n+1} \\ &\cdots \end{aligned} \tag{1}$$

com $0 \leq r_n < b$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$. A multiplicação por 10 corresponde a "baixar um zero" no algoritmo que se aprende no ensino básico[1].

Como $0 \leq r_n < b$, tem-se que $0 \leq 10\,r_n < 10\,b$ e, por conseguinte, $0 \leq q_{n+1} < 10$. Ou seja, q_n é um dígito (um número de 0 a 9) para todo $n \geq 1$. De (1) resulta, sucessivamente, que:

$$\frac{a}{b} = q + \frac{r_0}{b}$$

$$\frac{r_0}{b} = \frac{q_1}{10} + \frac{r_1}{10b}$$

$$\frac{r_1}{10b} = \frac{q_2}{10^2} + \frac{r_2}{10^2 b},$$

$$\ldots,$$

o que mostra que

$$\frac{a}{b} = q + \frac{q_1}{10} + \frac{q_2}{10^2} + \frac{q_3}{10^3} + \cdots = q, q_1 q_2 q_3 \ldots .$$

Ou seja, (1) realmente determina a dízima de $\frac{a}{b}$, como afirmado.

Vê-se agora porque é que toda a dízima correspondente a um número racional é periódica: como só há um número finito de restos r_k possíveis, estes têm de se repetir, portanto, os q_k também se repetem, periodicamente, a menos que terminem, o que acontece quando algum resto é nulo.

Escrevendo $a \equiv b \pmod{m}$ quando a e b deixam o mesmo resto quando divididos por m, de (1) vem que $10\,r_0 \equiv r_1 \pmod{b}, 10\,r_1 \equiv r_2 \pmod{b}, \ldots, 10\,r_n \equiv r_{n+1} \pmod{b}$ Mas então, para todo $t, n \geq 0$:

$$r_{n+t} \equiv 10\,r_{n+t-1} \equiv 10^2\,r_{n+t-2} \equiv \cdots \equiv 10^t\,r_n \pmod{b}.$$

Note-se que de $\operatorname{mdc}(a,b) = 1$ resulta que $\operatorname{mdc}(b, r_0) = 1$.

Se $\operatorname{mdc}(b, 10) = 1$, então $\operatorname{mdc}(b, r_n) = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Em particular, a dízima é infinita. Se r_n for o primeiro resto a repetir-se, sendo pois $r_{n+t} = r_n$ para algum $t \geq 1$, resulta que $r_n = r_{n+t} \equiv 10^t\,r_n \pmod{b}$. Como $\operatorname{mdc}(r_n, b) = 1$, deduz-se que $10^t \equiv 1 \pmod{b}$ e portanto $r_0 \equiv 10^t\,r_0 \equiv r_t \pmod{b}$. Mas como r_0 e r_n são números positivos menores do que b, conclui-se que $r_0 = r_t$, ou seja, o primeiro resto a aparecer repetido é necessariamente r_0. Daqui se conclui que, no caso em consideração, a dízima é periódica pura. Resulta também que o comprimento do período é igual ao menor inteiro positivo d tal que $10^d \equiv 1 \pmod{b}$. Em particular, $d \mid \varphi(b)$, onde φ é a função de Euler[2].

No caso de se ter $b = 2^\alpha 5^\beta$, para alguns $\alpha, \beta \geq 0$, pondo $n = \max\{\alpha, \beta\}$, tem-se que $b \mid 10^n$. Como $r_n \equiv 10^n\,r_0 \pmod{b}$, resulta que $r_n = 0$, ou seja, a dízima é finita.

Resta o caso em que $b = 2^\alpha 5^\beta c$, com $\alpha, \beta \geq 0$, $\max\{\alpha, \beta\} > 0$, $\operatorname{mdc}(c, 10) = 1$ e $c > 1$. Pondo $n = \max\{\alpha, \beta\} \geq 1$, tem-se

$$\frac{a}{b} = \frac{2^{n-\alpha} 5^{n-\beta} a}{10^n c}.$$

Pelo primeiro caso, sabemos que

$$\frac{2^{n-\alpha} 5^{n-\beta} a}{c}$$

é puramente periódica e que o comprimento do período é independente de a e igual ao menor inteiro positivo d tal que $10^d \equiv 1 \pmod{c}$. Como dividir por 10^n corresponde a deslocar a vírgula n dígitos para a esquerda, resulta que temos neste caso uma dízima periódica mista (que não é pura, resulta de que se tem $\operatorname{mdc}(b, r_0) = 1$ enquanto $\operatorname{mdc}(b, r_n) > 1$, para todo $n \geq 1$).

Resumindo: a dízima de $\frac{a}{b}$ é puramente periódica, mista ou finita consoante se tenha, respetivamente, $\operatorname{mdc}(b, 10) = 1$, $\operatorname{mdc}(b, 10) \neq 1$ e b tem um fator primo $\neq 2, 5$, ou b não tem nenhum fator primo $\neq 2, 5$. Em particular o tipo de dízima e também o comprimento do período não dependem do numerador.

Do que ficou exposto, conclui-se que, no caso particular das frações da forma $\frac{1}{p}$ com p primo, p o comprimento do período é um divisor de $p - 1$. Determinar que divisor é exatamente é que parece ser difícil. Sabemos que é o menor inteiro positivo d tal que $10^d \equiv 1 \pmod{p}$, mas a nossa ignorância sobre a relação que tal inteiro tem com o primo p é atestada pelo facto de não se saber se há ou não uma infinidade de primos para os quais tal inteiro é $p - 1$. Dito de um outro modo, não se sabe se existe ou não uma infinidade de primos p para os quais o comprimento do período da dízima de $\frac{1}{p}$ é $p-1$, como é o caso de $\frac{1}{17}$ dado acima como exemplo.

Esta última questão prende-se com uma conjetura feita por Emil Artin em 1927, ainda em aberto. Para a descrever, é necessário explicar que um número $a \in \mathbb{Z}$ se diz uma *raiz primitiva* de um primo p se o menor inteiro positivo k tal que $a^k \equiv 1 \pmod{p}$ para $p-1$. A conjetura de Artin em causa afirma que, se a não for -1 nem um quadrado perfeito, então a é raiz primitiva para uma infinidade de primos. A conjetura inclui ainda uma previsão para a percentagem de primos para os quais a é uma raiz primitiva: cerca de 37,4%. O mais surpreendente é que tal percentagem não depende do número a. Para mais detalhes ver *http://www.math.ucsb.edu/~agboola/teaching/2005/winter/old-115A/murty.pdf.* A figura 1 dá, para os primeiros 500, 000 primos, o número e as percentagens daqueles em que os períodos da dízima correspondente a $\frac{1}{p}$ são os nela indicados.

Em 1986 Roger Heath-Brown mostrou, com base em trabalhos de Rajiv Gupta and M. Ram Murty, que há no máximo dois números para os quais a conjetura de Artin é falsa. É um resultado fabuloso. Mas, apesar disso, ainda não se conhece nenhum número para o qual a conjetura seja verdadeira! Em particular, não se sabe se 10 é ou não uma raiz primitiva para uma infinidade de primos, o que se prende com a expansão em dízima das frações $\frac{1}{p}$ com p primo. Não é curioso?

[1] O 10 aparece aqui simplesmente por ser essa a base que usamos para representar números. Tudo o que estamos a descrever se aplica a uma outra qualquer base, trocando apenas o número 10 pelo número correspondente.

[2] Ver *http://www.cut-the-knot.org/blue/Euler.shtml*, assim como *http://www.cut-the-knot.org/blue/Modulo.shtml* e *http://www.cut-the-knot.org/blue/Fermat.shtml*. Em alternativa, consultar *http://www.math.uconn.edu/~kconrad/blurbs/ugradnumthy/modarith.pdf* e *http://www.math.uconn.edu/~kconrad/ blurbs/ugradnumthy/eulerthm.pdf*

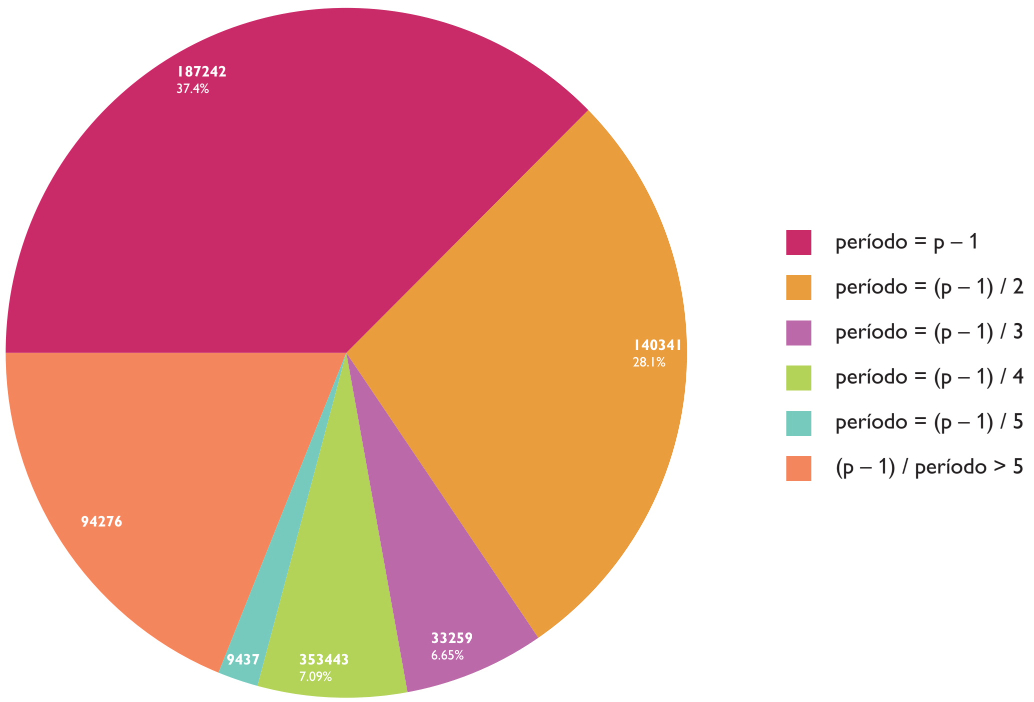

Figura 1: Percentagens de primos tais que a dízima de $\frac{1}{p}$ tem um dado período.