



Combinatória, Zonogonos e Zonoedros

ILDA PEREZ DA SILVA

UNIVERSIDADE DE LISBOA

isilva@cii.fc.ul.pt

1. INTRODUÇÃO

Neste artigo consideramos uma classe de polígonos e de poliedros convexos, com propriedades de simetria particulares: os zonogonos e os zonoedros. São figuras centralmente simétricas e as suas faces são também centralmente simétricas. Os resultados que veremos a seguir sobre zonogonos e zonoedros, apesar do seu carácter elementar permitem ilustrar diversos resultados, algumas surpresas e até questões em aberto na área da geometria combinatória/topologia.

Zonogonos e zonoedros são os exemplos em dimensão 2 e 3 de poliedros convexos n -dimensionais conhecidos por zonotopos. As propriedades de incidência das faces dos zonotopos estão intimamente relacionadas com certas abstrações combinatórias e topológicas de espaços vectoriais reais – os matroides orientados. A “existência” destes objetos combinatórios foi prevista por J. T. Rockafellar, num artigo de 1969, como a estrutura que permitiria unificar determinados resultados de Teoria de Grafos e de Convexidade.

Cerca de 10 anos mais tarde, em 1978, apareciam, no *Journal of Combinatorial Theory* (série B), os dois artigos fundadores do que hoje é a Teoria de Matroides Orientados: um de Robert Bland e Michel Las Vergnas [3] com axiomas motivadas diretamente por trabalhos na Teoria de Grafos e de Convexidade, e o outro de Jon Folkman e Jim Lawrence [6] em que os mesmos objetos são apresentados como objetos topológicos: certo tipo de esferas combinatórias. O livro [2] é uma introdução muito completa aos primeiros 20 anos da

teoria, que tem sido explorada recentemente em novas direções e aplicações.

Neste artigo, os matroides orientados são motivados com a necessidade de estender o conceito de zonoedro de modo a poder considerar todas as decomposições de zonogonos em paralelogramos como objetos análogos: algumas destas decomposições, mas não todas, são projeções de zonoedros. Todas são projeções de matroides orientados ou pseudo-zonoedros.

Este ponto de vista é mais recente, apareceu na década de 90 do século passado e tem fortes contributos em [9], [4], [10].

2. ZONOGONOS E ZONOEDROS

Um zonogono é um polígono convexo com centro de simetria. A simetria central obriga a que cada aresta tenha uma aresta oposta, paralela e com o mesmo comprimento. Em particular, um zonogono tem um número par de lados. Chamamos n -zonogono a um zonogono com $2n$ -arestas.

Dos polígonos representados na figura seguinte, apenas o segundo e o quarto são zonogonos. O primeiro não tem simetria central e o terceiro não é convexo.

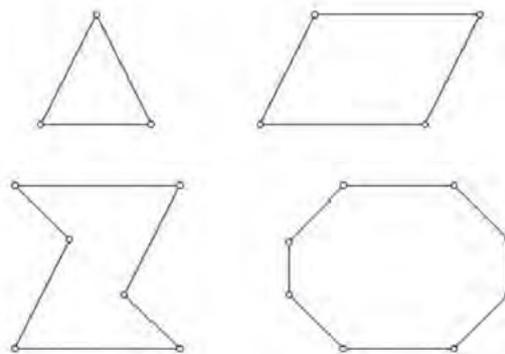


Figura 1: Quais são zonogonos?

A fronteira de um n -zonogono Z é a linha poligonal fechada, $\delta Z = (a_1, \dots, a_n, a'_1, \dots, a'_n)$, descrita pela sequência de $2n$ arestas, que vamos encontrando ao percorrer a fronteira δZ começando num vértice e seguindo no sentido dos ponteiros do relógio (ou no sentido contrário!), ver a figura 2. Repare que os pares $\{a_i, a'_i\}$ correspondem a pares de arestas opostas: cada uma das arestas do par é a imagem da outra pela simetria central do zonogono.

A apresentamos algumas propriedades de polígonos e poliedros com fortes propriedades de simetria central, numa introdução elementar a áreas de investigação atuais: matroides orientados, estudo combinatório e topológico do grupo simétrico.

Removendo um par de arestas opostas que, sem perda de generalidade, podemos supor ser o par a_n, a'_n , a fronteira do zonogono fica decomposta em duas linhas poligonais disjuntas, cada uma a união de $(n - 1)$ arestas do zonogono, $\mathcal{A} = \{a_1, \dots, a_{n-1}\}$ e $\mathcal{A}' = \{a'_1, \dots, a'_{n-1}\}$. \mathcal{A} e \mathcal{A}' são a imagem uma da outra pela simetria central do zonogono.

Se projetarmos o zonogono Z numa reta r ortogonal à direção definida pelas arestas a_n, a'_n , obtém-se um segmento de reta $[P, P']$ cujos extremos P e P' são as projeções na reta r das arestas a_n e a'_n , respectivamente. As linhas poligonais \mathcal{A} e \mathcal{A}' projetam-se, cada uma, numa decomposição do segmento de reta $[P, P']$ em $(n - 1)$ segmentos de reta. O zonogono inicial pode ser reobtido “levantando” convenientemente qualquer uma destas decomposições do segmento de reta $[P, P']$.

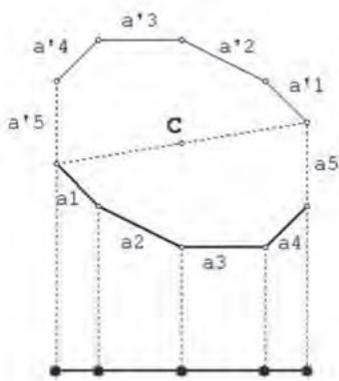


Figura 2: Zonogonos e decomposições de segmentos de reta.

Não é difícil mostrar (descreva um processo geral para o fazer!) que *qualquer que seja a decomposição de um segmento de reta em $(n - 1)$ segmentos, ela pode ser “ortogonalmente levantada” a um n -zonogono com um par de lados opostos ortogonais ao segmento de reta dado.*

Veremos agora como estas observações sobre zonogonos se generalizam a uma classe particular de poliedros convexos: os zonoedros.

Um zonoedro é um poliedro convexo, centralmente simétrico, cujas faces são polígonos centralmente simétricos, isto é, cujas faces são zonogonos.

Na figura 3 estão representados alguns zonoedros.

Devido às simetrias centrais, quer do poliedro quer das suas faces, as direções de arestas de um zonoedro definem *zonas*. A zona definida por uma aresta a é a união de todas as faces do zonoedro que têm arestas com a direção de a . Esta união de faces constitui uma “passadeira fechada de faces” que divide a superfície do poliedro em dois conjuntos de faces disjuntos: \mathcal{F} e \mathcal{F}' sendo um deles a imagem do outro pela simetria central do zonoedro.

Chamamos n -zonoedro a um zonoedro com n -zonas, que tem arestas em exatamente n -direções.

A projeção de um n -zonoedro Z num plano ortogonal a uma aresta a é um $(n-1)$ -zonogono (ver figura 4). A fronteira desse zonogono é a projeção da zona da aresta a . Qualquer dos conjuntos opostos de faces \mathcal{F} e \mathcal{F}' se projeta numa decomposição desse zonogono em zonogonos.

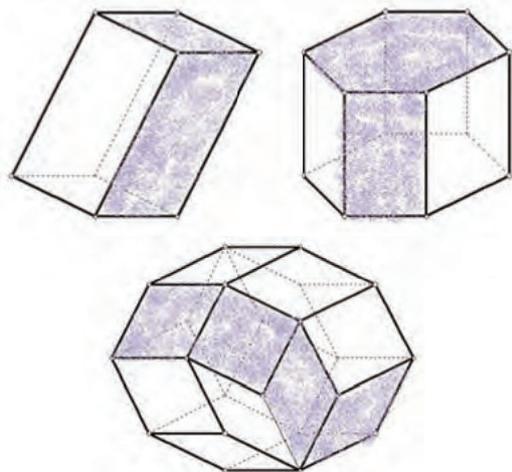


Figura 3: Exemplos de zonoedros com uma zona assinalada.

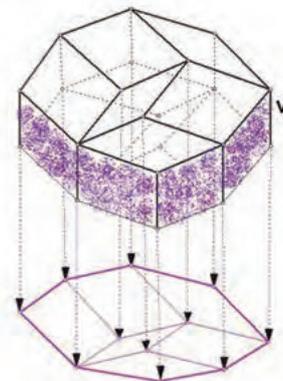


Figura 4: Projetar um zonoedro ortogonalmente a uma zona.

À semelhança do que se passa com as decomposições de um intervalo em n intervalos, é natural pretender descrever um processo geral que permita "levantar a um $(n+1)$ -zonoedro" qualquer decomposição de um n -zonogono em zonogonos. Não vou pedir-lhe que o faça. Não é sempre possível fazê-lo! Há decomposições de um zonogono com zonogonos que não podem ser levantadas a um zonoedro. Na figura 5 está representada uma decomposição que não pode ser levantada a um zonoedro.

Havendo, pois, mais decomposições de um zonogono em zonogonos do que aquelas que se obtêm como projecções de zonoedros, que novos objetos são estes que parecem tão próximo de projecções de zonoedros? São projecções de "pseudo-zonoedros" ou matroides orientados de dimensão 3.

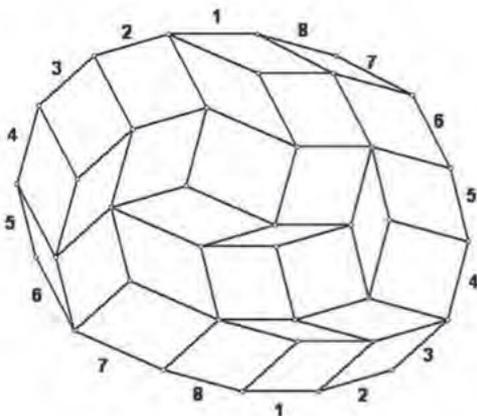


Figura 5: Decomposição que não pode ser "levantada" a um zonoedro.

Estes "pseudo-zonoedros" são objetos combinatórios que podem ser descritos de várias maneiras. Uma delas baseia-se no facto de que os vértices de um n -zonoedro com centro de simetria C se escrevem na forma:

$$V = C + \sum_{i=1}^n \epsilon_i v_i, \quad \epsilon_i \in \{-1, 1\}$$

onde os vetores v_i definem as direções das arestas. Este facto permite identificar os vértices do zonoedro com um subconjunto \mathcal{W} de n -sequências de ± 1 's.

Como saber, dado um conjunto $\mathcal{W} \subseteq \{-1, 1\}^n$ de n -sequências de ± 1 's, se ele corresponde, ou não, aos vértices de um zonoedro? As mais fortes condições conhecidas [10] definem matroides orientados – que podem ver-se como pseudo-zonoedros.

Saber se um pseudo-zonoedro é ou não um zonoedro ou se uma decomposição de um zonogono em zonogonos pode ser levantada a um zonoedro são problemas equivalentes, classificados de *NP*-difíceis, isto é, para os quais, embora haja algoritmos de decisão, mesmo o mais poderoso dos computadores poderá não conseguir dar a resposta em tempo útil.

Concluimos esta secção com a descrição de uma família importante de decomposições de um n -zonogono: as decomposições cíclicas, C_n , que correspondem a projecções de um zonoedro, o "zonoedro cíclico com $n+1$ zonas". São descritas por indução em n : começando num paralelogramo (2 zonas) e acrescentando de cada vez uma nova zona, como indicado na figura 6.

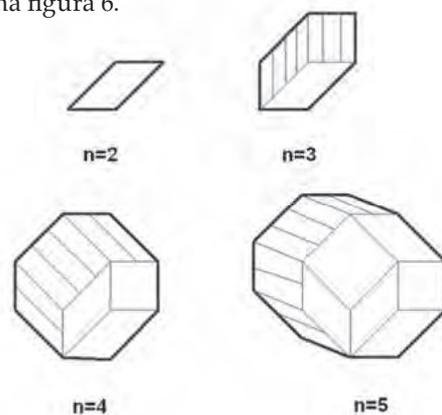


Figura 6: Decomposições cíclicas de n -zonogonos.

Deixamos como exercício ao leitor determinar os números de vértices, arestas e paralelogramos de (um) decomposição cíclica C_n de um n -zonogono. Este resultado é fundamental para estimar o número de jogadas do jogo L'OZ, que apresentamos de seguida.

3. DECOMPOSIÇÕES DE ZONOGONOS EM PARALELOGRAMOS

A relação entre matroides e decomposições foi muito explorada na década de 1990, [9], [4] e [10]. Alguns desses resultados podem ser implementados na forma de um jogo/puzzle que descrevemos nesta secção.

Em 2007, um grupo de alunos de Engenharia Informática da Faculdade de Ciências de Lisboa implementou um protótipo desse jogo, ainda disponível em <http://labmag.di.fc.ul.pt/virtual/LOZ/>. Para detalhes sobre a implementação propriamente dita deve consultar [5].

O jogo consiste no seguinte:

No ecrã aparecem duas decomposições diferentes de um mesmo zonogono com paralelogramos (LOZangos), como na figura 7.

O objetivo do jogo é transformar a decomposição inicial (da esquerda) na decomposição final (da direita) através de uma sequência apropriada de jogadas. Cada jogada consiste em clicar num vértice interior de grau 3 na decomposição da esquerda, o que muda a posição relativa dos três paralelogramos que contêm o vértice de grau 3 da forma representada na figura 8.

Do ponto de vista matemático, o jogo está completamente estudado. Sabemos responder, e a resposta é afirmativa, às perguntas seguintes:

1. Podem ser escolhidas quaisquer duas decomposições para decomposições inicial e final ou há que ter algum cuidado?
2. Existem estratégias para jogar? E são eficazes?

As respostas a ambas as questões baseiam-se no seguinte resultado:

Teorema Dados um n -zonogono Z e uma sua decomposição em paralelogramos, \mathcal{Z} , fixemos um vértice O da fronteira de Z e seja O' o vértice oposto. Identifiquemos de forma habitual a fronteira de Z : $\delta Z = (a_1, \dots, a_n, a'_1, \dots, a'_n)$ e seja $L = (a_{i_1}, \dots, a_{i_n})$ uma qualquer linha poligonal simples (que não repete arestas nem vértices) da decomposição unindo também O a O' . Então:

1. É sempre possível levar a linha poligonal $L_0 = (a_1, \dots, a_n)$ a coincidir com a linha $L = (a_{i_1}, \dots, a_{i_n})$, **passando um lozango da decomposição \mathcal{Z} de cada vez**, ver figura 9.
2. Seja qual for a decomposição \mathcal{Z} , existe uma estratégia para transformar a decomposição cíclica C_n em \mathcal{Z} usando no máximo $\binom{n}{3}$ jogadas.

A demonstração de 1) é deixada ao cuidado do leitor mais interessado. Ela foi feita pela primeira vez, noutros termos, por G. Ringel [7] em 1958. A demonstração dada em [9], por indução em n , é construtiva, fornecendo, em simultâneo, uma estratégia para o jogo e uma estimativa para o número máximo de jogadas necessário.

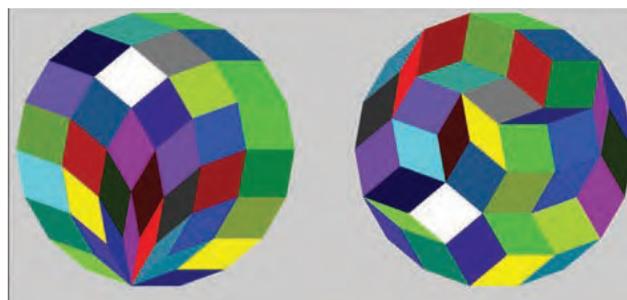


Figura 7: Uma posição inicial de L'OZ.

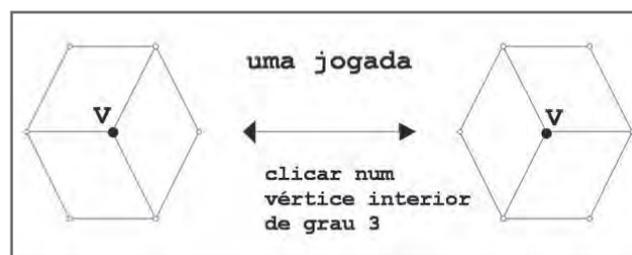


Figura 8: Uma jogada de L'OZ.

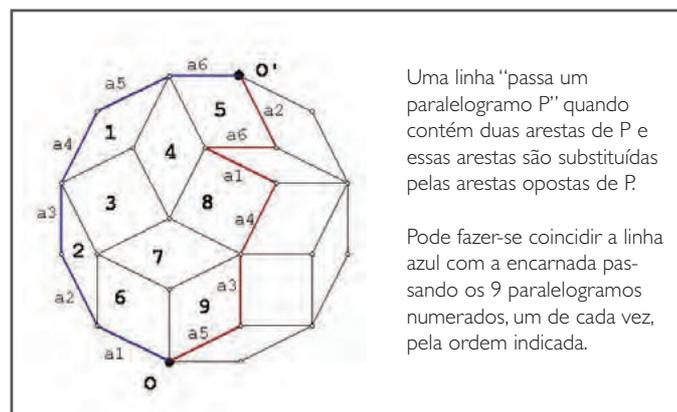


Figura 9

Repare que para $n = 2$, o 2-zonogono é um paralelogramo e a decomposição cíclica C_2 é a única pavimentação.

Para $n = 3$ (ver figura 8) há exatamente duas decomposições em paralelogramos possíveis e uma obtém-se da outra com um clique no único vértice interior.

Exemplificamos agora o passo de indução, mostrando como se joga com $n = 4$, sabendo jogar com $n = 3$.

Considere-se a decomposição cíclica C_4 e uma outra decomposição em paralelogramos, \mathcal{Z} , de um 4-zonogono. Ver figura 10.

Removendo a zona 4 de ambas as decomposições. Obtém-se (fig. 10 ao centro) de um lado C_3 e do outro a restrição \mathcal{Z}_3 , de \mathcal{Z} ao mesmo hexágono regular. Pelo caso anterior, $n = 3$,

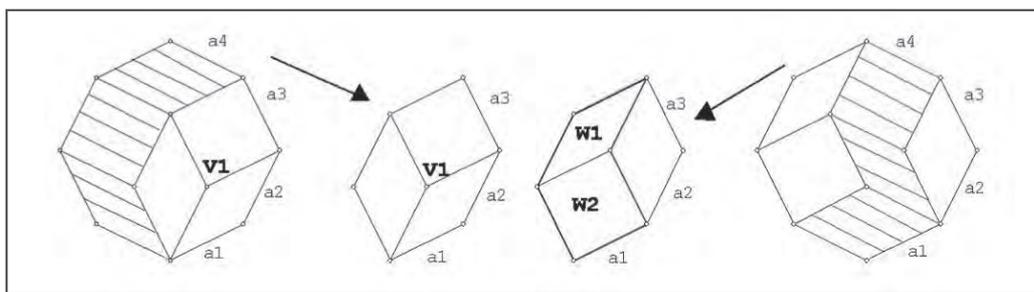


Figura 10

sabemos transformar (no máximo, com uma jogada) C_3 em Z_3 . Seja C'_4 o arranjo obtido de C_4 em que C_3 é substituído por Z_3 .

Para levar C'_4 a coincidir com Z , basta levar a zona 4 de C'_4 a coincidir com a zona 4 de Z . Em Z_3 ambas as zonas são representadas por duas linhas quebradas simples unindo o mesmo par de vértices opostos de Z_3 (figura 10 ao centro), e a parte 1 do teorema anterior garante que podemos levar uma a coincidir com a outra passando um paralelogramo de cada vez, isto é, no máximo em três jogadas (no caso da figura 10 em duas jogadas).

Gastaremos assim, no caso geral, para $n = 4$, no total, um máximo $1 + 3 = \binom{4}{3}$ jogadas para transformar C_4 numa qualquer decomposição Z do mesmo zonogono.

Repare que, se sabemos que $\binom{n}{3}$ jogadas são suficientes para transformar a composição cíclica C_n numa qualquer decomposição Z do mesmo n -zonogono, então gastaremos no máximo $2 \times \binom{n}{3}$ jogadas para transformar qualquer decomposição Z numa outra Z' (passando primeiro de Z para C_n e depois de C_n para Z'). O número máximo de jogadas necessário para concluir qualquer jogo é, pois, polinomial em n (da ordem de n^3). Isto significa que o algoritmo para jogar o jogo tirado da demonstração é eficiente.

4. OBSERVAÇÕES FINAIS

Vimos como os matroides orientados permitem descrever de forma semelhante objetos análogos – as decomposições de zonogonos em zonoedros.

Vimos depois como relacionar através de uma operação simples – clicar num vértice de grau 3 – duas quaisquer decomposições de zonogonos.

A extensão destes resultados a dimensões mais altas não está ainda totalmente percebida.

Para concluir, chamamos a atenção para o facto de que, como consequência do teorema da secção anterior, uma decomposição de um n -zonogono em paralelogramos pode identificar-se (como sugere a figura 9) com uma sequência de permutações que leva de $e = 123 \dots n$ a $e' = n(n-1) \dots 21$, passando um paralelogramo de cada vez, o que corresponde a dizer invertendo a posição dos números em dois lugares consecutivos de cada vez.

Deste ponto de vista, os matroides orientados aparecem no contexto de estudo das propriedades topológicas e combinatorias do grupo simétrico, e mais geralmente dos Grupos de Coxeter. Para uma introdução recente da investigação nesta área consulte [1].

REFERÊNCIAS

- [1] A. Björner, F. Brenti, "Combinatorics of Coxeter Groups", *Graduate Texts in Mathematics* 231, Springer 2005.
- [2] A. Björner, M. Las Vergnas, B. Sturmfels, N. White, G. Ziegler, "Oriented Matroids", *Encyclopedia of Mathematics and its Applications* 46, 2nd edition, Cambridge University Press 1999.
- [3] R. Bland and M. Las Vergnas, "Orientability of Matroids", *J. Combinatorial Theory, Ser. B*, 24 (1978), 94-123.
- [4] J. Bohne, "Eine Kombinatorische Analyse zonotopaler Raumaufteilungen", PhD thesis, Univ. Bielefeld, 1992.
- [5] A. P. Cláudio, I. Perez da Silva, N. Pinto, N. Prehaz, J. Soares, "Implementing L'OZ, Proceedings of Recreational Mathematics" 09, Évora 2009.

[6] J. Folkman, J. Lawrence, "Oriented Matroids", *J. Combinatorial theory*, Ser.B, 25, 199-236.

[7] G. Ringel, "Teilungen der Ebene durch Geraden oder Topologische Geraden", *Math.Z.* 64 (1956), 79-102.

[8] R. T. Rockafellar, "The elementary vectors of a subspace of \mathbb{R}^n ", *Proceedings of the Conference Combinatorial Mathematics and its Applications*, Chapel Hill, North Carolina, 1969.

[9] I. P. F. da Silva, "On Fillings of $2n$ -gons with Rhombi", *Discrete Math.* 111(1993), 137-144.

[10] I. P. F. da Silva, "Axioms for Maximal Vectors of an Oriented Matroid, a Combinatorial Characterization of the Regions of a Pseudo-hyperplane Arrangement", *Europ. J. Combinatorics* 16 (1995), 125-145.

SOBRE A AUTORA

Ilda Perez da Silva, doutorada pela Universidade de Paris VI, é professora de Matemática na Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa e membro do Centro de Estruturas Lineares Combinatórias. O seu trabalho científico situa-se na área da Combinatória. Interessa-se também por História da Matemática, em particular pelo período dos anos 40 do século XX em Portugal.



LOJA
spm

Consulte o catálogo e faça a sua encomenda online em www.spm.pt