



BERNARDO MOTA
Universidade de Lisboa
bernardomota@campus.ul.pt

UM NOVO OLHAR SOBRE OS ESPELHOS DE EUCLIDES

A tradição atribui a Euclides um pequeno tratado sobre reflexão de raios em espelhos; contudo, a incoerência que caracteriza o tratado afasta-o da perfeição lógica dos *Elementos*. Como entender esta discrepância?

O estudo da catóptrica antiga (reflexão de raios visuais e solares em espelhos planos, convexos e côncavos) está repleto de dificuldades. As fontes que chegaram até nós são em número reduzido, sofreram inúmeras alterações ao longo dos séculos e apresentam sinais de contaminação mútua. Entre os textos sobreviventes, conta-se uma miscelânea de proposições atribuídas a Diocles, um excerto intitulado *Liber De Speculis* (*Livro sobre os Espelhos*), que se considera uma tradução de um original de Herão, os livros 3 e 4 da *Óptica* de Ptolemeu e um fragmento pertencente a Antémio de Trales, autor do séc. VI d.C.

A estes deve acrescentar-se a *Catóptrica* atribuída a Euclides, o único tratado aparentemente completo transmitido em grego, mas cujas especificidades representam um quebra-cabeças para o leitor. Tanto a coerência interna como a correção dos resultados, como ainda a qualidade dos argumentos, estão muito aquém do que encontramos nos *Elementos*, o que obscurece a interpretação da obra. As dificuldades começam logo com os postulados e definições, traduzidos em baixo:

- [1] Um raio visual é uma linha reta, cujas partes intermédias cobrem as extremidades.
- [2] Os objetos que se veem, veem-se em linha reta.
- [3] Colocado um espelho num plano e avistada uma altura perpendicular ao plano, ficam em proporção: como a reta entre o espelho e o observador para a que está entre o espelho e a altura perpendicular, assim a linha reta da altura do observador para a altura levantada perpendicularmente ao plano.

[4] Em espelhos planos, tomado o lugar onde cai o cateto [=a perpendicular] do objeto avistado, o objeto avistado deixa de se ver.

[5] Em espelhos convexos, tomado o lugar por onde passa a linha reta que vai do objeto avistado ao centro da esfera, o objeto avistado deixa de se ver. O mesmo acontece em espelhos côncavos.

[6] Se se lançar algo para um recipiente e se se tomar uma distância tal, que deixa de se ver; se se vaziar a água mantendo-se a distância, o objeto lançado ver-se-á novamente.

Como se pode ver, o primeiro é um princípio de visão direta e não reflexa. O segundo parece redundante, à primeira vista. O terceiro dificilmente pode ser considerado um princípio; trata-se de um complicado expediente para permitir concluir, na primeira proposição, a igualdade dos ângulos de incidência e de reflexão (ver fig. 1). O último é sobre refração (e não reflexão) e nem sequer é utilizado no tratado.

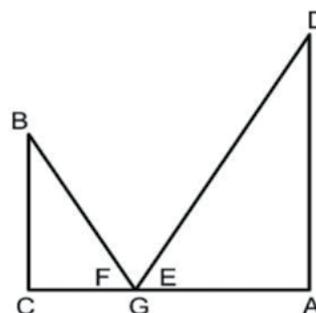


Figura 1: *Catóptrica*, post. 3: $GC:GA=BC:DA$ (B =observador; D =objeto; BG =raio direto; GD =raio refletido; G =ponto de reflexão, BC/DA =perpendiculares ao plano do espelho). Em *Catóptrica*, prop. 1, tira-se a igualdade dos ângulos F e E por *Elementos* 6.6.

O quarto (tal como o quinto) simplesmente não faz qualquer sentido, só sendo válido no caso específico de o observador se encontrar na perpendicular traçada do objeto para o espelho, como quando alguém observa a sua própria imagem num espelho colocado perpendicularmente à sua frente (na fig. 1, *A* só deixa de ser visível quando se coloca *B* entre *D* e *A*, ou atrás de *D*). Já na Antiguidade o princípio causava surpresa. Herão, por exemplo, corrigiu este disparate, substituindo a expressão “lugar onde cai o cateto” pela expressão “ponto de reflexão” (cf. fig. 1: a imagem deixa de ser visível, tapando-se, por exemplo, com cera, o ponto *G*, e não o ponto *A*). É difícil perceber o que o autor do texto da *Catóptrica* tem em mente.

No entanto, aquilo que para nós parece absurdo, não deve tê-lo sido para os autores antigos, cujos textos apresentam formulações equivalentes utilizadas no estudo de fenómenos astronómicos, como, por exemplo, dos eclipses. O eclipse do sol era muitas vezes definido como obstrução do nosso raio visual pela lua; o eclipse da lua, como a interseção, pela terra, da reta que vai do centro do sol ao centro da lua quando os três se encontram alinhados. Eis, a título de exemplo, um interessante passo de Gémino (séc. I d.C.), que aplica a linguagem dos postulados num contexto de visão direta:

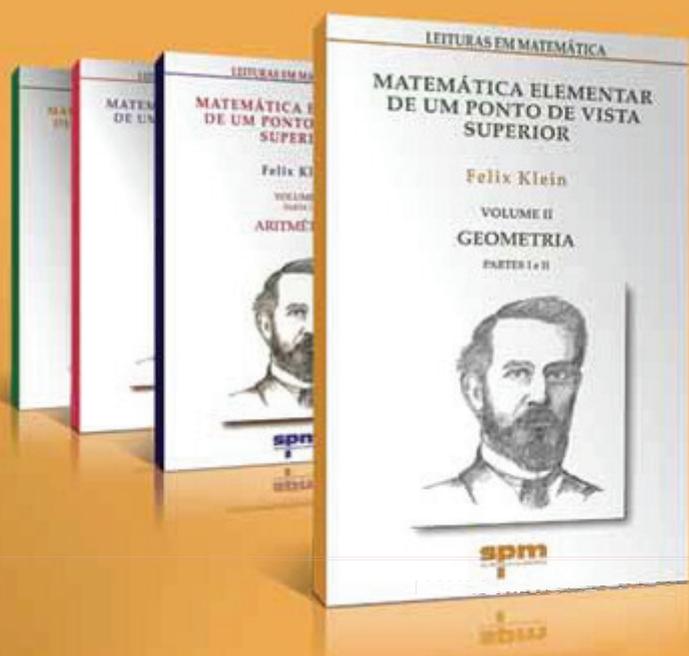
...os eclipses não são iguais para todos os observadores, antes havendo grandes variações na grandeza dos eclipses, de acordo com as diferenças dos climas. Ao mesmo tempo, o sol está completamente eclipsado para alguns, meio-eclipsado para outros, menos de meio para outros; para outros ainda, nenhuma parte do sol se vê eclipsada. Para os que se encontram no cateto debaixo da obstrução, o sol está completamente invisível, para os que se encon-

tram parcialmente fora da obstrução, uma parte do sol fica eclipsada, para os que estão fora da obstrução, nenhuma parte do sol se vê eclipsada (*Introdução aos Fenómenos*, c. 10).

As fontes antigas sugerem que os matemáticos antigos (como Aristarco, segundo afirmação de Vitruvius) consideravam a lua como um espelho. Nada mais natural, portanto, do que tentar ler no pequeno tratado de Euclides (seja nos princípios, seja nas proposições) argumentos elaborados para servirem também no domínio da astronomia. E isto faz parte da investigação em história da matemática antiga: alargar o contexto para lá dos textos estritamente matemáticos, porque os menos técnicos podem, por vezes, ser surpreendentemente informativos.

REFERÊNCIAS:

O texto grego de referência da *Catóptrica* de Euclides continua a ser o de J.L. Heiberg e Heinrich Menge (*Euclidis Opera Omnia*. Vol. 7. *Optica, Opticorum Recensio Theonis, Catoptrica cum scholiis antiquis*, Leipzig, Teubner, 1895). Sobre a catóptrica antiga, dois dos títulos fundamentais (com bibliografia completa sobre o tema) são os de A. Mark Smith (*Ptolemy's Theory of Visual Perception*, Philadelphia, American Philosophical Society, 1996) e Ken'ichi Takahashi (*The Medieval Latin Traditions of Euclid's Catoptrica*, Kyushu University Press, 1992). Gémino mereceu atenção recentemente, tendo sido traduzido para inglês (Evans, James; Berggren, J. Lennart, *Geminus's Introduction to the Phenomena*, Princeton University Press, 2006) e francês (Aujac, Germaine, *Geminus. Introduction aux Phénomènes*, Paris, Les Belles Lettres, 2002).



Novo Volume
**Matemática
Elementar de um
Ponto de Vista
Superior**
Felix Klein
Geometria

Adquira toda a coleção
a um preço especial
Loja SPM



*O desconto será efetuado após a encomenda.