António Machiavelo
Universidade do Porto
ajmachia@fc.up.pt

O QUE É $\mathbb{R}$EALMENTE $\sqrt{2}$?

Os números ditos "reais" estão impregnados de mistérios, entre os quais o de saber qual é exatamente a sua "realidade", ou seja qual é o seu estatuto ontológico. A sua origem é geralmente mal contada, estando a verdade envolta em lendas e puro desconhecimento, por falta de documentos históricos que nos permitam reconstruir muitos dos detalhes do aparecimento e evolução da noção de "número real", que é, sem qualquer dúvida, central em matemática.

Há muito, muito tempo atrás, os números eram apenas os (agora ditos) *naturais*: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ... — abstrações magníficas dos diversos tipos de quantidades discretas —, assim como os (agora ditos) *racionais*, razões de números naturais, como por exemplo $\frac{7}{3}$, $\frac{5}{21}$, ou $\frac{107}{893}$, naturalmente moldados para representar múltiplos de partes de um todo, úteis portanto para lidar com problemas de repartição de fragmentos das mais diversas coisas. Nesse contexto é muito natural pensar que dois quaisquer segmentos são comensuráveis, ou seja, que existe um outro segmento que os mede exatamente, isto é, que ambos são múltiplos inteiros deste terceiro segmento. Dito de um outro modo, escolhendo uma unidade arbitrária, porque não hão-de ser os seus múltiplos, submúltiplos e os múltiplos dos submúltiplos, suficientes para medir todos os segmentos?

Foi presumivelmente algures no século VI A.E.C. e, também presumivelmente na Grécia Antiga, que alguém, ou um grupo de pessoas, descobriu algo de profundamente estranho: a existência de grandezas incomensuráveis. Não se sabe se primeiro se descobriu que a diagonal de um quadrado não é comensurável com o seu lado, ou se foi a descoberta de que a diagonal de um pentágono é incomensurável com o lado deste que deixou perplexos alguns dos nossos mais notáveis antepassados. As histórias que usualmente se contam e repetem até à exaustão não passam de lendas. Nenhum documento historicamente fiável chegou até nós que relate o que de facto aconteceu.

É importante realçar que a conclusão imediata retirada de tal descoberta desconcertante não foi, nem poderia ter sido, a de que "existem outros números", como demasiadas vezes se sugere ao contar (mal) a história dessa descoberta da existência de segmentos incomensuráveis, atribuída aos pitagóricos. Isto é um disparate histórico, assim como um absurdo epistemológico. Como se criam números a partir da constatação de que existem segmentos incomensuráveis? Como foram de facto criados (descobertos?) os números ditos irracionais? Para que o leitor perceba melhor as questões que aqui se colocam, considere a seguinte pergunta: o que é $\sqrt{2}$? É o número positivo que elevado ao quadrado dá 2? Mas será que existe? O problema é que ao dizer "é o número" já se está a supor que tal número existe! Compare o leitor com a seguinte frase "o Pai Natal é a pessoa que na véspera de Natal deixa presentes a todas as crianças que se portaram bem". Só porque se diz "é a pessoa" não quer dizer que ela exista, pois não? Repito pois a questão: $\sqrt{2}$ existe? Então, dirá porventura o leitor, não é a medida do comprimento da diagonal de um quadrado de lado unitário? Mas o que é "a medida"? Seja lá o que for, é uma noção ligada à de número, depois de escolhida uma unidade... E voltamos ao início: mas tal número existe?

Não, a conclusão não poderia ser outra para além da óbvia, embora intrigante ilação: "os números não servem para medir todos os tipos de segmentos"! Mas então como comparar segmentos, ou outras grandezas, como superfícies ou sólidos, se não existem números suficientes para tal? Uma solução genial é atribuída a Eudoxo de Cnido, que terá vivido no século IV A.E.C., talvez um dos mais notáveis matemáticos de todos os tempos. Apesar de nenhuma das suas obras ter sobrevivido, sabemos que Eudoxo é responsável pela denominada *teoria das proporções* exposta no livro V dos *Elementos* de Euclides. Aí define-se vagamente *razão*, na definição 3, como *uma espécie de relação no que diz respeito ao tamanho relativo entre duas grandezas do mesmo tipo* (duas *grandezas do mesmo tipo* são, por exemplo, dois segmentos, duas superfícies ou dois sólidos), para depois introduzir, na definição 5, uma relação de equivalência entre tais razões abstratas, do seguinte modo:

Grandezas dizem-se estar na mesma razão, a primeira para a segunda e a terceira para a quarta, quando, tomando equimúltiplos arbitrários da primeira e da terceira, assim como equimúltiplos arbitrários da segunda e da quarta, os primeiros equimúltiplos ou são ambos maiores, ou ambos iguais ou ambos menores que os segundos.

Se A, B, C, D, representarem quatro grandezas, sendo A do mesmo tipo que B, e C do mesmo tipo que D, então, denotando a razão abstrata entre duas grandezas X e Y por $X : Y$, a definição acima citada pode ser reescrita da maneira seguinte:

$$A : B \;=\; C : D,$$

se e só se, para todos os $m, n \in \mathbb{N}$,

$$(mA > nB \wedge mC > nD) \vee (mA = nB \wedge\; mC = nD) \vee (mA < nB \wedge mC < nD).$$

O leitor que queira perceber isto bem, não poderá fazer melhor do que consultar a excelente edição *online* da obra imortal de Euclides elaborada por D. E. Joyce, do Departamento de Matemática e Ciência de Computadores da Clark University, disponível em:
http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/Euclid.html, e, depois de ler um pouco do livro V, deve ler com cuidado a demonstração da proposição 1 do livro VI, assim como as demonstrações das proposições VI.33, XI.25 e XII.13.

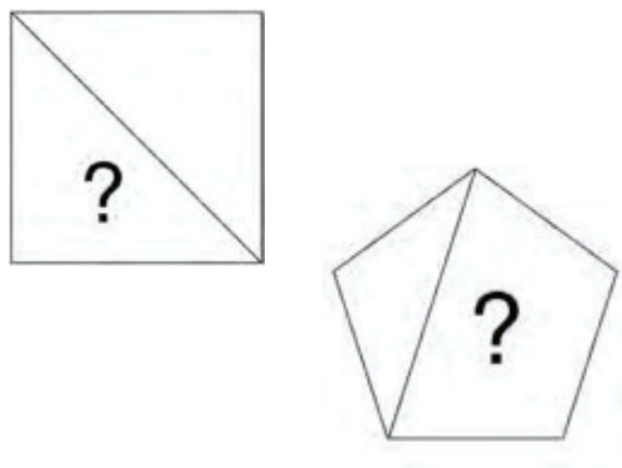
Matemáticos árabes dos séculos X a XIII, tais como al-Karajī, Omar Khayyām e Naṣīr al-Dīn al-Ṭūsī irão criticar o facto de Euclides não definir precisamente o que é a razão entre duas grandezas de um mesmo tipo e, nesse período, essas entidades abstratas irão sofrer uma transfiguração que as transformará em outras entidades abstratas a que hoje chamamos *números reais*[1]. Desde a constatação de que não era possível medir todos os segmentos usando números (racionais) até à construção de novos números, ditos *irracionais*, houve por conseguinte, e como é natural, um longo período de lenta metamorfose que conduzirá uma ideia abstrata de razão a um conceito que hoje achamos concreto, mas que não é menos abstrato, de número, tendo sido o seu estatuto ontológico satisfatoriamente esclarecido (pelo menos do ponto de vista interno da matemática) apenas no século XIX por, entre outros, Cantor e Dedekind, sendo que este último se inspirou, justamente, na construção de Eudoxo!

Não deixa de ser curioso que esses números chamados *irracionais* formem, juntamente com os racionais e via a Análise dita Infinitesimal, a base de teorias físicas que descrevem fenómenos reais com uma aproximação extraordinária, isto apesar de essas mesmas teorias nos descreverem um universo que parece ser discreto, desde a energia ao espaço e talvez mesmo ao tempo: ver *http://en.wikipedia.org/wiki/Planck_time* e *http://en.wikipedia.org/wiki/Chronon*. Temos aqui um intrigante enigma filosófico sobre o qual apenas é certa a nossa ignorância.

Mas regressemos à questão colocada no título: o que é mesmo $\sqrt{2}$? Não conheço melhor resposta que a dada por Newton, na sua *Arithmetica Universalis*[2], de 1707, incluída na definição que este dá de número:

Por Número entendemos não tanto uma Multitude de Unidades, como a Razão abstraída de qualquer Quantidade em relação a uma outra Quantidade da mesma Espécie, que tomamos como Unidade.

Assim, $\sqrt{2}$ não será mais do que a relação que existe, por exemplo, entre a diagonal e o lado de um quadrado! E o sucesso da matemática talvez se explique por tornar, para nós seres humanos, essas relações, de algum modo, concretas.



[1] Ver p. 554 de Victor Katz (ed.), *The Mathematics of Egypt, Mesopotamia, China, India, and Islam*, Princeton University Press 2007, e p. 15 de J. L. Berggren, *Episodes in the Mathematics of Medieval Islam*, Springer 1986.

[2] Disponível em *http://archive.org/details/universalarithm00hallgoog*.