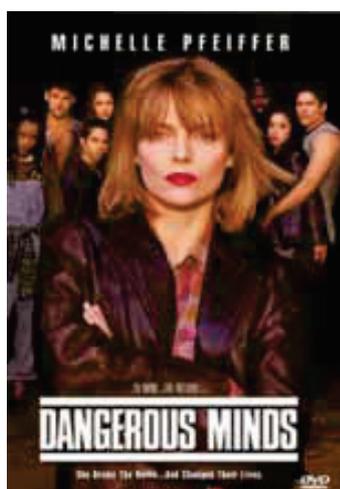




JORGE NUNO SILVA
Universidade de Lisboa
jnsilva@cal.berkeley.edu

OUTROS HERÓIS OLÍMPICOS: OS PROBLEMAS!

Um Convite à Matemática: das Competições à Investigação é o título de um livro recente da Springer. Nele vários autores mostram como alguns problemas das Olimpíadas Internacionais de Matemática (IMO) conduzem naturalmente a problemas de investigação, necessariamente com outro nível de complexidade e profundidade. Escolhemos os problemas iniciais de Simon Norton, Stanislav Smirnov e Béla Bollobás pela simplicidade dos respectivos enunciados.



Michelle Pfeiffer no papel de professora.

O problema inicial apresentado por Norton conduz rapidamente a uma viagem por várias áreas da matemática pura. Contudo, tudo se passa numa turma de uma escolinha...

Problema 1: *Uma professora tem a seu cargo uma turma. Ela quer escolher dois estudantes à sorte e reparou que a probabilidade de serem do mesmo sexo é de 50%.*

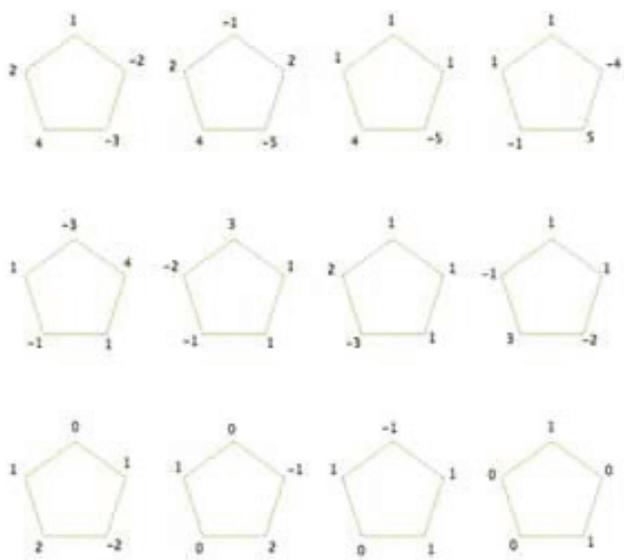
Quantos estudantes tem a turma e quantos são de cada sexo?

A generalização para o caso em que há três sexos em vez de dois é o próximo passo... Mas passemos ao problema de Smirnov. Trata-se de um problema da IMO de 1986, proposto por Elias Wegert.

Problema 2. A cada um dos cinco vértices de um pentágono regular faz-se corresponder um número inteiro, de maneira a que a soma dos cinco números seja positiva.

Se os números de três vértices consecutivos forem x , y e z em que $y < 0$, podemos substituí-los, respetivamente, pelos números $x+y$, $-y$ e $z+y$. Esta operação é repetida enquanto existir pelo menos um vértice com um número negativo.

Será que este processo é sempre finito?



Um exemplo a partir dos números 1, -2, -3, 4, 2.
Após onze passos, o processo termina.

O problema de Bollobás é dinâmico, trata-se de uma instância da *caça ao cristão*...

Problema 3. Imaginemos um circo romano circular com um leão e um cristão capazes de correr à mesma velocidade. Admitamos que o leão quer comer o cristão, e que este pretende sobreviver.

O que deve cada um deles fazer para atingir o seu objectivo? O leão apanha necessariamente o cristão?

Para simplificar, sem alterar a essência da questão, imaginemos que o leão está no centro da arena, que é um disco circular fechado, e que o cristão está noutro ponto

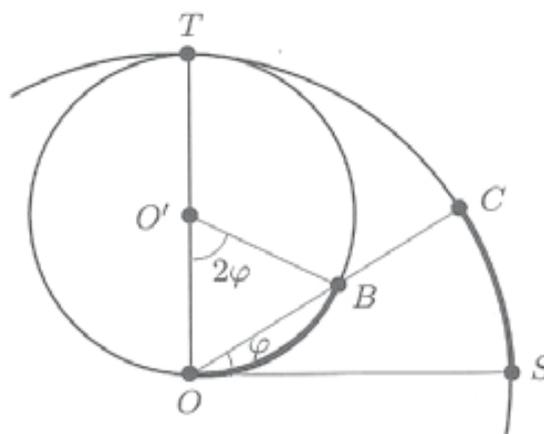
qualquer. Uma possibilidade natural para o cristão é deslocar-se rapidamente para a circunferência circundante e dar à sola. . .



O cristão corre pela periferia e . . . sobrevive. S é a posição do cristão após uma volta, T a do leão.

Se o leão optar por se deslocar sempre à velocidade máxima em direção do cristão, este salva-se, porque a circunferência é assíntota da curva traçada pelo leão, mas nunca se tocam. . .

Acontece que se o leão decidir perseguir o cristão a velocidade máxima, mas sempre sobre o raio que une o centro à posição do cristão, então caça-o rapidamente! Este dá um quarto de volta e é surpreendido pelo felino.



O cristão corre pela periferia e . . . morre. S é a posição inicial do cristão, B a posição típica do leão. Chegam a T ao mesmo tempo.

Em que ficamos? Quem ganha, e como, este jogo de vida ou de morte?