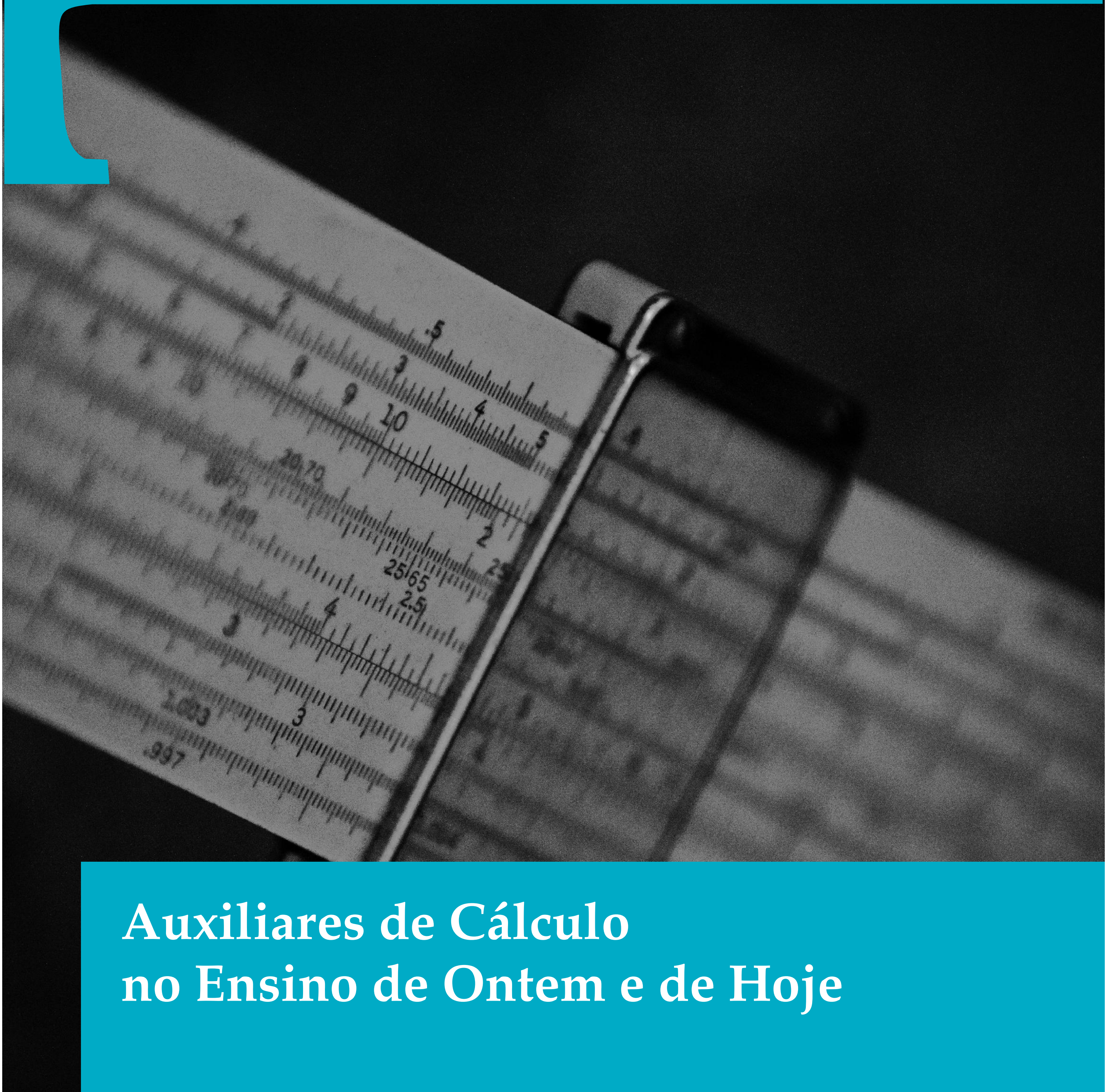


Auxiliares de Cálculo no Ensino de Ontem e de Hoje

Ana Eliete Reis
Escola Básica Integrada de Apelação
anaeliete@gmail.com

Quem não se lembra de esconder as mãos por baixo da mesa para calcular uma tabuada mais difícil? Ou de fazer risquinhos para ajudar a contar alguma coisa? Quase todos nós trilhámos esse caminho – o de procurar meios para rapidamente calcular um resultado. Esses meios, essas ferramentas, vão evoluindo com o passar dos anos. No entanto, antigos ou recentes, todos eles têm um princípio básico em comum: agilizar processos de cálculo. Neste pequeno artigo, viajamos através do tempo. Lembramos o que antes se fazia e espreitamos o que por cá hoje se faz, enquanto tentamos perceber o que se espera do futuro.

Seguir a evolução dos instrumentos de cálculo é uma aventura apaixonante. O início desta história perde-se no tempo: as mais antigas "máquinas de calcular" podem ter até 30.000 anos de idade. São achados arqueológicos do Paleolítico Superior: ossos de animais com uma ou mais séries de entalhes, com o tipo de contagem mais rudimentar – a cada entalhe corresponde uma unidade [1]. Avançando mais um pouco, até à civilização romana, Horácio (65 a.C. – 8 a.C.), nas suas Sátiras [2], descreve um estudante típico: "… a escola da vila, para a qual os rapazes, (…) costumavam ir com o saco dos livros e tábua de escrever dependurados nos seus braços esquerdos." Esta tábua de escrever não era mais do que um ábaco de cera, uma pequena prancheta de osso ou madeira, untada com uma fina camada de cera negra em que se delimitavam colunas e algarismos com um estilete de ferro.

Transportando-nos para épocas mais atuais, a curiosidade leva-nos a procurar que materiais seriam usados nas nossas escolas, desde a implantação da República, em 1910. Assim, analisando diversos programas curriculares para a disciplina de Matemática, podemos constatar que em 1919 apenas se recomendava, no campo dos materiais manipuláveis, o uso de materiais para contagem tais como botões, pedrinhas ou feijões [3]. O objetivo era melhor concretizar aprendizagens. No entanto, estas recomendações eram seguidas num número reduzido de escolas, pois na altura praticava-se um ensino mecanicista baseado na memorização de conceitos, regras e procedimentos abstratos e, neste ponto, a matemática consistia quase exclusivamente na repetição exaustiva de exercícios-tipo. Apresentava-se aos alunos os conteúdos desta disciplina como um objeto acabado, a ser decorado, não estando sujeitos a dúvidas ou questões. Ao surgir a preocupação em adaptar os métodos de ensino aos estudantes, passou a valorizar-se mais a compreensão das matérias em vez da memorização por repetição. Claro que a implementação sólida destas ideias demorou o seu tempo e, durante os 40 anos seguintes, houve poucas ou nenhumas inovações em termos de materiais usados para auxiliar o cálculo (fig. 1) [4].

Figura 1: Livro da 1.ª Classe [5], tendo em atenção a nota de rodapé: "As tabuadas constroem-se à medida que forem necessárias para o desenvolvimento da multiplicação e divisão."

Figura 2: Dons de Fröebel.

O alemão Friedrich Fröebel (1782 – 1852), criador dos jardins-de--infância, inventou um material educativo constituído por círculos, esferas, cubos e outros objetos macios e manipuláveis. Denominavam-se "dons" ou "presentes" e havia regras de utilização que precisavam de ser dominadas para garantir o aproveitamento pedagógico. Os materiais de jogo, "dons" e "jogos", popularizaram-se em todo o mundo no século XIX.

Figura 3: Material Cuisenaire.

Este material foi criado por um professor do 1.º Ciclo, o belga Georges Cuisenaire, tendo sido divulgado em 1953 à escala mundial por Cuisenaire e Caleb Gattegno, professor universitário londrino considerado o mestre do material Cuisenaire. Baseia-se num sistema de relação entre cores e comprimentos, sendo composto por um conjunto de 241 barras de madeira coloridas, cujo comprimento varia de um a dez centímetros. A cada comprimento está associada uma cor e um valor. Por exemplo, existem 28 barras rosa de valor 4, 20 barras amarelas de valor 5, etc.

Figura 4: Cubos-Barras de Cor de Nabais.

Este material foi adaptado pelo padre Nabais, dando origem aos Cubos – Barras de Cor de Nabais. A primeira edição do material Cubos – Barras de Cor, pela Éduca Material Didáctico, ocorre em 1967. Este material consiste numa adaptação do material Cuisenaire à Matemática Moderna. Ainda se pode encontrar à venda.

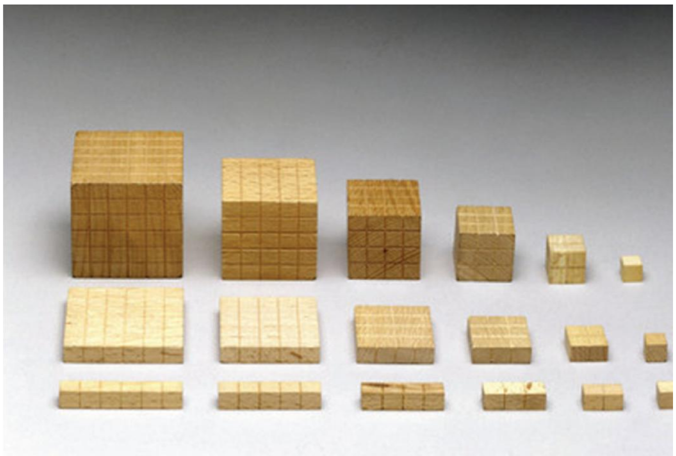


Figura 5: Material Multibásico de Dienes.

É constituído por um conjunto de vários cubos, placas e barras de madeira e tem como objetivo auxiliar o cálculo nas bases 2, 3, 4, 5 e 10.

As mudanças palpáveis nos métodos e materiais utilizados deram-se com o aparecimento do Movimento da Matemática Moderna, nos anos 60, que colocava o aluno como centro do processo de ensino-aprendizagem. Ao dar-se prioridade ao ensino por descoberta [6], as escolas recorriam cada vez mais ao uso de materiais manipuláveis, tais como os Dons de Fröebel (fig. 2), o Material Cuisenaire (fig. 3), o Calculador Multibásico e os Cubos-Barras de Cor de Nabais (fig. 4), o Material Multibásico de Dienes (fig. 5) ou o Ábaco, como forma de auxiliar contagens e/ou para efetuar cálculos simples [7].

Recuando um pouco no tempo, e voltando a nossa atenção para o ensino da matemática em níveis mais avançados, deparamo-nos com cálculos complexos e demorados realizados com lápis, em papel, através de algoritmos.

Assim, uma inovação muito bem-vinda foi a régua de cálculo (fig. 6), que permitia efetuar cálculos com grande rapidez. Sem dúvida que os resultados obtidos através de algoritmos eram muito mais precisos, mas eram também muito mais demorados. Desta forma, sempre que não fosse necessário um grande grau de precisão, a régua de cálculo era a ferramenta a escolher, nomeadamente, nas engenharias. Existia em tamanho de bolso, para uso pessoal, e em tamanho alargado, para demonstração nas salas de aula. A primeira referência feita a este recurso, em programas curriculares, aparece em meados dos anos 50 [8].

Este foi um método de cálculo privilegiado até ao aparecimento da calculadora. As primeiras calculadoras surgiram nas universidades nos anos 70 (fig. 7) e, num piscar de olhos, tornaram obsoleta a régua de cálculo e dispensaram a consulta de tabelas de valores, como, por exemplo, tabelas trigonométricas ou tabelas de logaritmos, usadas até então. Depressa evoluíram, tornando-se uma ferramenta largamente utilizada em todos os níveis de ensino. A calculadora apareceu em força no ensino e instalou-se nas salas de aula nos anos 80, apesar de só ser mencionada oficialmente nos programas curriculares em 1991 [9].

Esta ferramenta servia na perfeição a uma nova corrente de pensamento no ensino da matemática: a matemática experimental. Permitia que se trabalhasse com facilidade valores com várias casas decimais, abrindo a matemática mais elementar às exigências da vida real, aplicada a situações concretas. Por exemplo, um problema tradicionalmente iniciado por "Uma sala tem dimensões 8 m x 5 m…" era agora formulado "Mede a largura e o comprimento da tua sala de aula. Com os comprimentos que obtiveste ….". As calculadoras de bolso vieram ajudar a testar teorias e hipóteses, a experimentar várias formas de se chegar a um objetivo, com maior rapidez e precisão, levando a uma matemática construída pelo aluno, onde este formulava hipóteses e as testava e procurava ele próprio respostas às suas interrogações.

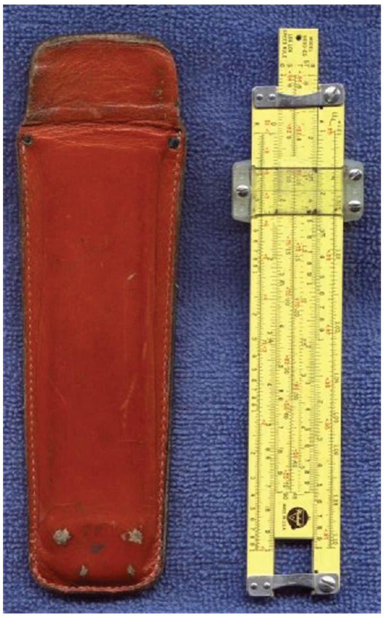


Figura 6: Régua de Cálculo. Existindo desde meados do séc. XIX, permanece em uso até cerca de 1975, altura em que foi substituída pelas calculadoras eletrónicas de bolso. Foram concebidas várias versões, com escalas adaptadas para engenheiros de todas as especialidades.

Figura 7: Hewlett-Packard: HP-35 (versão 1).

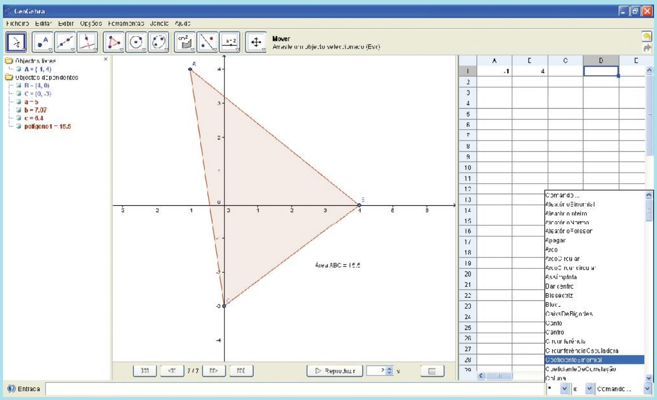


Figura 8: Construção no programa GeoGebra.
Este programa de uso livre que pode ser facilmente obtido por qualquer pessoa com acesso à Internet, e que incorpora, ele próprio, uma folha de cálculo.

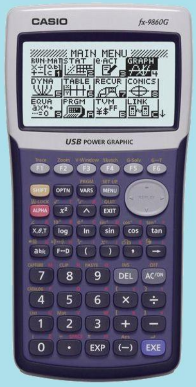


Figura 9: Calculadora gráfica.
É obrigatória atualmente no Ensino Secundário.

Outra ferramenta hoje essencial em qualquer escola é o computador. É mencionado nos programas curriculares pela primeira vez em 1990, no Programa do Ensino Básico do 1.º Ciclo [10], nomeadamente, a utilização da linguagem de programação LOGO. No entanto, as primeiras referências ao computador e à sua utilização em ambiente escolar (apesar de as escolas ainda não terem acesso aos mesmos) tinham já sido feitas em 1975, por José Sebastião e Silva: "… *chegando a ser necessário resolver sistemas com mais de 100 incógnitas, o que seria impossível num prazo razoável, antes da era dos computadores*." [11]

Hoje em dia, o ensino da matemática já não dispensa o uso do computador. O estudo da estatística com recurso ao uso da folha de cálculo e o da geometria, com uso do GeoGebra (fig. 8), são opções tomadas em quase todas as escolas. A calculadora gráfica (fig. 9) é essencial para frequentar a disciplina de matemática no Ensino Secundário. Todas as máquinas fazem representação gráfica e estudo de funções, são programáveis e têm um modo estatístico. Atualmente já podemos encontrar modelos que contêm uma folha de cálculo e que permitem uma fácil ligação entre todas estas opções.

Hoje, as tecnologias são bastante exploradas na sala de aula e todas as escolas têm acesso à Internet, o que traz imensas vantagens a nível de ensino. Há uma vastidão de recursos disponíveis *online*, nomeadamente aplicações (*applets*) que nos permitem ir ao encontro das necessidades e expetativas dos alunos. O *e-mail* permite o envio e a receção de trabalhos, sugestões, comentários e a plataforma Moodle permite um ensino/uma aprendizagem à distância, com disponibilização de materiais, submissão de trabalhos e esclarecimento de dúvidas. A Fundação Calouste Gulbenkian criou um portal para professores de ciência, denominado Casa das Ciências, como um meio de integrar a utilização das tecnologias da informação no processo de ensino/aprendizagem. Podemos encontrar aqui materiais de apoio, assim como uma página com *links*[1] para diversas *applets*. No domínio das *applets*, é importante referir a NLVM[2], uma biblioteca *online* de materiais manipuláveis, na qual podemos trabalhar, por exemplo, com os Base Blocks (versão virtual do material multibásico de Dienes) ou encontrar uma demonstração geométrica de alguns algoritmos de multiplicação (fig. 10). Existem, ainda, programas (*online* ou não) que apresentam uma forma interativa de aprender matemática, dirigidos a estudantes de matemática, que podem ser utilizados por uma turma, por alunos individuais numa escola ou por estudantes em casa. Promovem uma aprendizagem individualizada, ao ritmo de cada aluno, em que é este a escolher quando e para onde avançar.

Relativamente a cálculos matemáticos mais avançados, o portal Wolfram|Alpha[3] é uma ferramenta muito utilizada, por exemplo, por estudantes, pois tem secções dedicadas a diversas áreas da matemática, permitindo fazer desde cálculos elementares até à resolução de integrais, equações diferenciais ordinárias, fatorização em números primos, análise estatística e gráficos em 3D (fig. 11), entre muitas outras aplicações. Com a evolução das tecnologias, com o

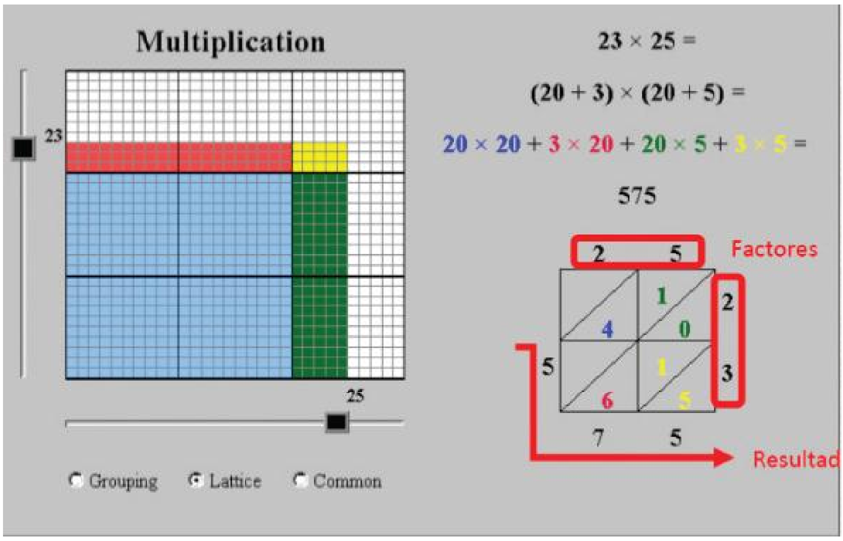


Figura 10: Multiplicação em gelosia – método utilizado na Europa do séc. XII.

É usada uma grelha quadriculada, dividindo-se os quadrados pela sua diagonal. Neste caso temos 25x23, logo teremos uma grelha de 2x2. Em cada quadrado é colocado o produto dos algarismos que lhe correspondem: na parte inferior coloca-se o algarismo das unidades e na parte superior o das dezenas. Para encontrar o produto final, basta adicionar os algarismos em cada linha oblíqua. Assim, 23x25=575.

uso em grande escala das calculadoras e dos computadores, ganha-se tempo para trabalhar o raciocínio, a interpretação e as possíveis soluções, deixando os cálculos morosos para as máquinas. Com o avanço e a modernização dos *softwares*/programas de computador, há menor possibilidade de erro nas atividades de descoberta que, por vezes, conduziam a conclusões erradas. A tecnologia vem abrir uma infinidade de novas possibilidades.

Contudo, é preciso ter em atenção que, no uso da tecnologia, surgem por vezes resultados inesperados que é necessário identificar e corrigir. Um dos erros mais comuns efetuados com uma calculadora básica resulta da ordem pela qual são introduzidas as operações. Por exemplo, quando se efetua 2+3×3, a calculadora não apresenta o resultado 11, mas sim o resultado 15, pois não reconhece a prioridade da multiplicação sobre a adição. Também a calculadora gráfica pode induzir o estudante em erro: no estudo da função módulo, ao calcular o valor da derivada da função num ponto, a calculadora apresenta um valor para a derivada em todos os pontos do domínio, inclusive no ponto de quebra de ramos, onde não existe derivada. No domínio dos computadores, no programa GeoGebra, ao se estudar a convergência da função, quando se pede a representação do gráfico de *f(x)* para valores de *x* até 10^{14}, surge um gráfico de uma função que, em vez de convergir, diverge.

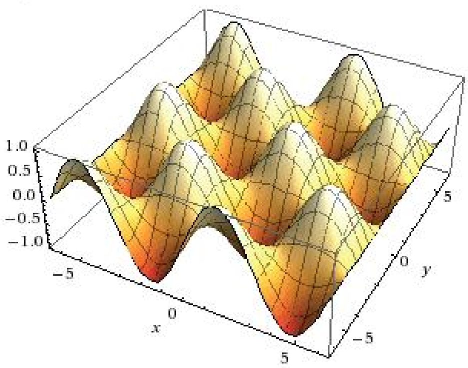


Figura 11: Gráfico de f(x,y) = sin(x).cos(y)

Estes são alguns de muitos exemplos que é importante não deixar passar em branco, pois são uma oportunidade de aprendizagem única. Os percalços podem e devem ser aproveitados para despertar no aluno o espírito crítico, tão em falta nos dias atuais. É absolutamente necessário alertar os estudantes para a falibilidade das máquinas e mostrar-lhes que, para retirar proveito de todas as potencialidades que as novas tecnologias têm para nos oferecer, é conveniente saber mais matemática. É preciso ter o cuidado de não se perder o rigor matemático no meio das facilidades tecnológicas e de se fazer perceber aos estudantes o porquê e o como. É funda-

[1] *http://www.casadasciencias.org/index.php?option=com_weblinks&view=category&id=3670&Itemid=31&menu=5*

[2] *http://nlvm.usu.edu/en/nav/vlibrary.html.*

[3] Em *http://www.wolframalpha.com/examples/*

mental desenvolver o espírito crítico face aos resultados fornecidos pelas máquinas, pois um utilitário não deve comandar o caminho, mas sim melhorar as condições de trabalho.

Apesar de todo este *boom* tecnológico, assiste-se a um fenómeno interessante. Os materiais mais clássicos, como o material multibásico, continuam a ser utilizados, evidenciando a sua importância nos processos de aprendizagem. Claro que as sugestões para a sua exploração têm um caráter mais moderno, conjugando as suas potencialidades com os métodos de cálculo atuais, mas a sua essência não se perdeu. Assistimos cada vez mais à procura de um equilíbrio entre o novo e o antigo, não só no nosso país, mas também à escala global. Por exemplo, na América do Sul, investe-se na recuperação de métodos de cálculo tradicionais como o Nepohualtzintzin, um modelo de ábaco de origem azteca [12]. Nas aulas das escolas estatais, as crianças estão a ser ensinadas a usar este instrumento, que permite trabalhar tanto num sistema de base 20 com 5 dígitos, como em base decimal. Para escolher a base, basta alternar entre a posição vertical e horizontal (figs. 12 e 13). Esta simbiose de métodos surpreende não tanto pela ideia em si, mas pela eficiência com que estes materiais são usados para estimular as capacidades do ser humano. Mais um passo para o equilíbrio foi dado no novo programa de Matemática do Ensino Básico, em vigor desde o ano letivo de 2010/2011 [13]. Ali reforça-se a prática do cálculo mental, cuja importância foi diminuída com o aparecimento da calculadora, assim como do treino de competências de cálculo. E o início desse treino faz-se, precisamente, com materiais manipuláveis. Para uma correta interiorização dos processos de cálculo é muito importante a criança, numa fase inicial, poder manusear e sentir os números de uma forma concreta, e, neste momento, a nível de 1.º e 2.º ciclos, o uso da calculadora recomenda-se apenas em situações pontuais.

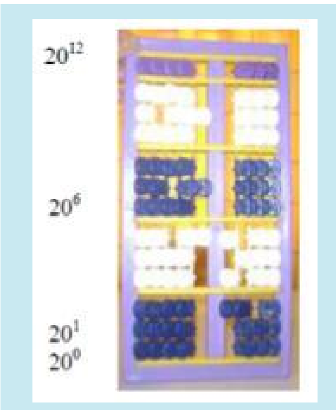
Ver cálculos mentais efetuados a uma velocidade estonteante, com a ajuda de um ábaco imaginário[4], é algo bastante motivador, assim como observar crianças a calcular somas em diversas bases sem a menor dificuldade, através do treino com material multibásico. Da mesma forma que é fascinante a rapidez e a eficiência com que se pode efetuar um estudo, e inferir conclusões, acerca de uma amostra estatística recorrendo a um programa adequado. Ao reforçar as bases, procurar um equilíbrio e aprender a tirar o melhor partido de todas as tecnologias que temos disponíveis, podemos escolher o melhor recurso a utilizar em cada situação, construindo um caminho que contemple as partes benéficas e evite as que, comprovadamente, não obtêm os melhores resultados.

REFERÊNCIAS

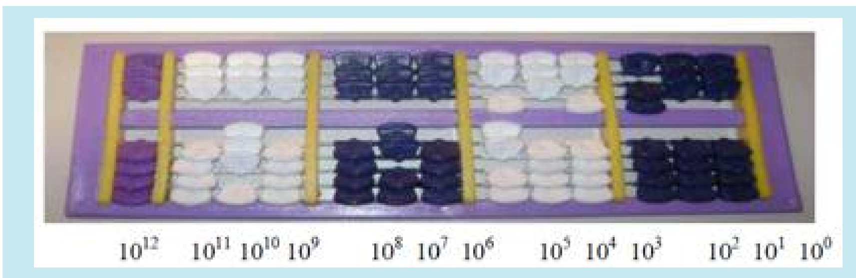
[1] Williams, Michael R. (1997). *A History of Computing Technology* (2ª ed.). Los Alamitos, Califórnia IEEE Computer Society Press.

[2] Milington, R.M. (1869). *A Rhytmical Translation of the First Book of the SATIRES of HORACE*. Livro I, 6, 46. London Longmans, Green, Reader, and Dyer.

[3] Ministério da Educação Nacional (1919, 7 de Novembro). "Linhas orientadoras para o ensino". *Diário do Governo*, 1.ª Série, n.º 227, pp. 2236-2374. Lisboa Imprensa Nacional Lisboa.



◀ Figura 12: Nepohualtzintzin atual, base 20. As fichas do lado esquerdo valem uma unidade e as do lado direito valem 5 unidades.



▲Figura 13: Nepohualtzintzin atual, adaptado à base decimal, representado o número 30.020.706.000. As fichas de baixo valem uma unidade e as de cima valem 5 unidades.

[4] Ministério da Educação Nacional (1926). "Programas do ensino secundário". *Diário do Governo*, 1.ª Série, n.º 243. Lisboa Imprensa Nacional Lisboa.
Ministério da Educação Nacional (1937). "Linhas Orientadoras para o Ensino". *Diário do Governo*, 1.ª Série. Lisboa Imprensa Nacional Lisboa.

[5] Ministério da Educação Nacional (1958). *O Livro da Primeira Classe* (8.ª ed.). Lisboa: Livraria Sá da Costa. (Obra original publicada em 1942).

[6] Borges, R. A. S. (2008) "A Revista Escola Portuguesa na Década de 1960 e a Disseminação da Matemática Moderna no Ensino Primário". Consultado em *www.smmmfloripa.ufsc.br/Borges_art.pdf.*

[7] Candeias, R. P. C. B. B. (2007) "Contributo para a História das Inovações no Ensino da Matemática no Primário: João António Nabais e o Ensino da Matemática no Colégio Vasco da Gama".

[8] Ministério da Educação Nacional (1954, 7 de setembro). "Programas do Ensino Liceal". (ed. 1966), *Diário do Governo*, 1.ª Série, DL nº 39807, nº 198. Lisboa Imprensa Nacional Lisboa.

[9] Ministério da Educação (1991). "Programa de Matemática. Plano de Organização do Ensino-aprendizagem", volume II, Ensino Básico, 2.º ciclo, julho 1991. Lisboa Imprensa Nacional. – Casa da Moeda E.P.

[10] Ministério da Educação (1990). "Programa do Ensino Básico, 1.º ciclo". Despacho nº 139/ME/90.

[11] Silva, J.S. (1975). "Guia para a Utilização do Compêndio de Matemática". Vol. 1, Curso Complementar do Ensino Secundário. Lisboa: Gabinete de Estudos e Planeamento do M.E.

[12] Lara, G. & Sgreccia, N. (2010). "Nepohualtzitzin: un modelo matemático de cualidad". *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, 3(2), pp. 24-54.

[13] Ministério da Educação – D.G.I.D.C. (2007). "Programa de Matemática do Ensino Básico – Direcção-Geral de Inovação e de Desenvolvimento Curricular/Ministério da Educação – Lisboa: Ministério da Educação".

SOBRE A AUTORA

Ana Eliete Reis é mestre em Matemática para Professores pela Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa. Este artigo é parte da sua dissertação de mestrado "Auxiliares de Cálculo no Ensino da Matemática", sob a orientação da Professora Doutora Suzana Metello de Nápoles. Neste momento, Ana Eliete Reis leciona na Escola Básica Integrada da Apelação.

[4] Um entre vários exemplos pode ser visto em *http://www.youtube.com/watch?v=MKVHe0uhoIU*