Bernardo Mota
Universidade de Lisboa
bernardomota@campus.ul.pt

APOLÓNIO E OS ***ELEMENTOS*** DE **EUCLIDES - 1.ª PARTE**

Proclo atribui a Apolónio de Perga alguns argumentos matemáticos relacionáveis com o conteúdo do livro primeiro dos *Elementos*. Em baixo apresentam-se algumas das suas contribuições, cujo conteúdo tem surpreendido os historiadores da matemática antiga e é pouco conhecido do público em geral.

O matemático Apolónio de Perga, famoso pelas suas *Cónicas*, dedicou parte do seu tempo a tentar clarificar alguns dos princípios e proposições de geometria elementar incluídos no primeiro livro dos *Elementos* de Euclides. A sua contribuição inclui uma reformulação de algumas definições (linha, ângulo, plano), uma tentativa de demonstração da primeira noção comum (coisas iguais a uma terceira são iguais entre si) e diversas provas alternativas correspondentes a *Elementos* 1.10 (bissecção de uma linha finita), 1.11 (erguer uma perpendicular a uma linha a partir de um ponto nesta) e 1.23 (construção de um ângulo igual a outro ângulo numa dada recta). Vale a pena debruçarmo-nos um pouco sobre as propostas deste matemático porque elas colocam em evidência as premissas que assumimos ao estudar a matemática antiga.

A nossa principal (e única!) fonte sobre esta faceta do trabalho de Apolónio é o *Comentário ao Primeiro Livro dos Elementos de Euclides*, da autoria de Proclo (séc. V). Ao ler o texto, ficamos convencidos de que algumas das provas de Apolónio são citadas textualmente. Veja-se, por exemplo, a forma como é apresentada a solução para bissectar uma dada recta (= *Elementos* 1.10), traduzida em baixo (ver figura 1):

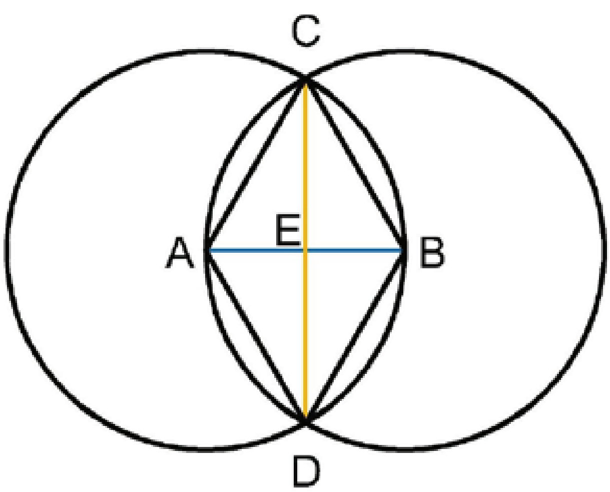

Figura 1: *Elementos* 1.10 na versão de Apolónio.

[Enunciado] Apolónio de Perga bissecta uma dada linha recta [= *Elementos* 1 defs. 3-4] da seguinte maneira. **[Exposição]** "Seja *AB*", diz ele, "a linha recta finita **[Especificação]** que se deseja bissectar". **[Construção]** "Seja descrito um círculo com centro em *A* e distância *AB* [= *Elementos* 1 post. 3]; novamente, seja descrito um outro círculo com centro em *B* e distância *BA* [= *Elementos* 1 post. 3]; e unam-se os pontos de intersecção dos círculos por meio da linha *CD* [= *Elementos* 1 post. 1]. Esta linha bissecta a linha *AB*. Sejam traçadas as linhas *CA* e *CB* [= *Elementos* 1 post. 1]; **[Prova]** então, cada uma delas é igual a *AB; DA* e *DB* são iguais pela mesma razão [= *Elementos* 1 def. 15], e *CD* é uma base comum; portanto, o ângulo *ACD* é igual ao ângulo *BCD* [= *Elementos* 1.8], de forma que *AB* é bissectada de acordo com a quarta" [= *Elementos* 1.4]. **[Conclusão]** Esta é a forma da prova deste problema que é dada por Apolónio.

Proclo cita a versão de Apolónio de *Elementos* 1.11 (traçar uma perpendicular a uma recta a partir de um ponto nesta) de maneira semelhante (veja-se a figura 2):

[Enunciado] Apolónio traça a linha em ângulos rectos da seguinte maneira: [aqui subentende-se a **Exposição**: "Seja *AB* a linha dada e *C* um dos seus pontos"; a ela, segue-se a **[Construção]** "Tome-se um ponto *D* em *AC*, corte-se de *CB* um comprimento *CE* igual a *CD* [= *Elementos* 1.3]; então, com centro em *D* e distância *DE*, descreva-se um círculo [= *Elementos* 1, post. 3], e novamente, seja descrito outro círculo com centro em *E* e distância *DE* [= *Elementos* 1, post. 3]; trace-se uma linha de *F* a *C* [= *Elementos* 1, post. 1]. Afirmo que esta é a linha em ângulos rectos. Com efeito, se traçarmos as linhas *FD* e *FE* [= *Elementos* 1, post. 1], **[Demonstração]** elas serão iguais [= *Elementos* 1 def. 15 e noção comum 1]; ora, *CD* e *CE* também são iguais, e *FC* é comum, de forma que os ângulos em *C* são iguais, pela oitava [= *Elementos* 1.8]. Portanto, são ângulos rectos [= *Elementos* 1 def. 10].

As provas de Apolónio mantêm, de acordo com Proclo, a estrutura rígida das demonstrações euclidianas; os termos técnicos que introduzem cada parte estão omissos, como seria de esperar, mas estão assinalados em cima a negrito ("enunciado", etc.), para que o leitor possa identificar cada etapa da prova. A transcrição de Proclo também é visivelmente esquemática porque é assumido (tanto por Proclo como o seria por um leitor moderno) que Apolónio alude a princípios e proposições dos *Elementos* com os quais o leitor está familiarizado (que também assinalei no trecho acima citado).

A contribuição de Apolónio, tal como descrita por Proclo, é surpreendente a diversos níveis. A primeira nota digna de registo é a de que Apolónio está a tratar de construções e provas muitíssimo elementares, que hoje qualquer criança aprende a fazer logo a seguir à escola primária. A segunda é a de que Apolónio está, sem qualquer dúvida, a ampliar uma tradição muito antiga, visto que os grupos de proposições onde surge o seu nome incluem também, de forma sistemática, o nome de Enópides de Quios. A terceira nota é a de que, se tivermos em atenção o texto dos *Elementos* que possuímos, as alternativas de Apolónio não trazem realmente nada de novo; antes constituem uma paráfrase pouco interessante de Euclides. Com efeito, ambas as provas citadas acima concretizam a construção de um triângulo equilátero de acordo com *Elementos* 1.1, ao passo que o texto euclidiano se limita a remeter para essa proposição; Apolónio repete, portanto, o que já tinha sido

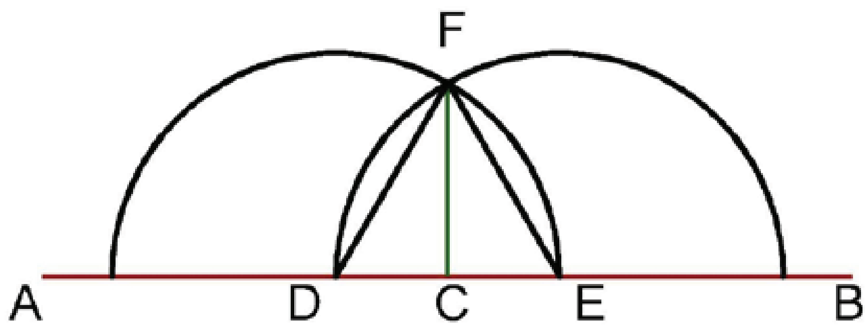

Figura 2: *Elementos* 1.11 na versão de Apolónio

feito antes, além de falhar a indicação de que se construiu um triângulo equilátero. A primeira das provas citadas realiza ainda, além da construção do triângulo equilátero, a bissecção de um ângulo, operação que, nos *Elementos*, também merece tratamento anterior (em *Elementos* 1.9, que constitui, precisamente, um lema para 1.10). Em suma, nos *Elementos* há uma série de operações que merecem tratamento isolado para evitar a sua constante repetição em proposições posteriores e Apolónio parece ignorar esta estratégia.

Proclo não consegue evitar um julgamento negativo sobre as provas de Apolónio. A propósito da bissecção de uma recta, afirma: "Também ela [a prova de Apolónio] parte de um triângulo considerado equilátero, mas em vez de proceder a partir da bissecção do ângulo em *C*, prova que a linha é bissectada por causa da igualdade das bases. A prova dada pelo autor dos *Elementos* é, por conseguinte, muito melhor, porque é mais simples e procede dos princípios." De seguida, afirma, a propósito da versão Apoloniana de 1.11: "Mais uma vez se vê que esta prova, que requer que se desenhem os círculos, é mais complexa do que aquela dada pelo autor dos *Elementos*, uma vez que era possível construir imediatamente um triângulo equilátero em *DE* e provar o teorema." Hoje em dia, quando os estudiosos de matemática antiga se dispõem a apreciar as soluções de Apolónio, acabam limitados pela visão de Proclo. Considera-se que a contribuição de Apolónio para a geometria elementar é trivial e que nenhuma das suas alternativas foi incorporada nos *Elementos*. Considera-se ainda que as suas propostas são inferiores e menos científicas do que as euclidianas porque são menos económicas e porque interferem com a ordem lógica preferida por Euclides. Assim, por exemplo, se Proclo já tinha assinalado, como vimos, que a prova da bissecção de uma dada linha recta não parece tomar como pedra angular a bissecção de um ângulo (= *Elementos* 1.9); hoje em dia costuma assinalar-se que Apolónio assume teoremas provados no livro terceiro dos *Elementos* na demonstração de proposições bem mais elementares do livro primeiro, como é o caso da sua prova alternativa a 1.23.

Esta interpretação difundiu-se de tal maneira que é difícil contradizê-la. No entanto, ela revela aquilo que podemos considerar uma limitação fundamental na nossa maneira de explicar o desenvolvimento da matemática antiga: é que somos fortemente influenciados por uma imagem construída pelos autores da Antiguidade tardia cuja correcção não podemos confirmar. Uma questão, por exemplo, que todos parecem ter ignorado é a seguinte: como entender que um matemático tão reputado como Apolónio apresente notas tão destituídas de valor em relação às propostas euclidianas? Uma tentativa de resposta fica para o próximo número da *Gazeta*, para que o leitor possa ter tempo para pensar no assunto. À laia de cenas dos próximos capítulos, arrisco dizer que ela pode implicar desconstruir e voltar a construir o que sabemos da matemática antiga.