



ANTÓNIO MACHIAVELO
Universidade do Porto
ajmachia@fc.up.pt

PONTOS, LINHAS E A ESTRUTURA DO UNIVERSO

É verdadeiramente impressionante a quantidade de matemática que pode ser gerada por simples considerações sobre despreziosos arranjos de pontos e linhas. Para além disso, resultados muito humildes sobre estes objectos são excelentes exemplos de como, através da matemática, se acede à estrutura interna do Universo.

Informalmente, um *grafo* é simplesmente um arranjo de um certo número de pontos, em que alguns (possivelmente nenhum ou, num outro caso extremo, eventualmente todos) estão ligados entre si por linhas (ver figura 1). É irrelevante a localização dos pontos ou qual a forma dessas linhas, se são rectas ou curvas. O que é importante é saber se, dados dois quaisquer pontos, estes estão ou não ligados por uma linha. Um modo de formalizar este conceito é definir um grafo como um conjunto finito \mathcal{P} juntamente com um subconjunto \mathcal{L} do conjunto constituído pelos subconjuntos de \mathcal{P} com exactamente dois elementos. O leitor poderá querer reler a última frase. O conjunto \mathcal{P} correspondente aos pontos, também designados por vértices, e o conjunto \mathcal{L} correspondente às linhas, a que também se chamam arestas.

Vou limitar-me aqui a descrever um resultado muito simples sobre grafos, mas que não deixa de ter algumas implicações curiosas. Para o fazer, é conveniente introduzir a nomenclatura seguinte. O *grau* (ou *valência*) de um ponto (ou vértice) é o número de linhas (ou arestas) que dele "irradiam", ou seja, o número de pontos a que ele está ligado. O resultado é então:

**A SOMA DOS GRAUS DE TODOS OS PONTOS É IGUAL
AO DOBRO DO NÚMERO DE LINHAS.**

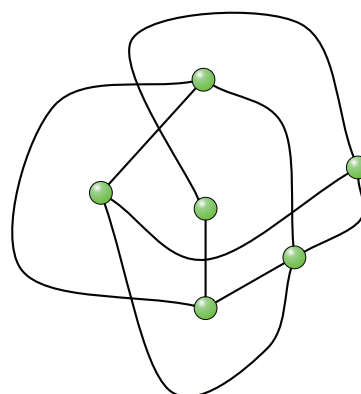


Figura 1: Um grafo com seis vértices e nove arestas

A razão é simples: ao somar os graus de todos os pontos, cada linha é somada duas vezes, dado que cada linha "irradia" de dois pontos, nomeadamente as suas duas extremidades. No exemplo da figura 1, a soma dos graus é $2+3+3+3+3+4 = 18$ e o número de linhas é 9.

Suponhamos agora que o leitor encontra alguém que tenta descobrir uma maneira de ligar cinco coisas de tal modo que cada uma esteja conectada a três outras. É irrelevante o que tais coisas possam ser, assim como é irrelevante saber em que consistem exactamente essas ligações. Poderiam, por exemplo, ser filiais de uma empresa que se pretendiam ligar por

cabos de fibra óptica de altíssima qualidade, ou então uma companhia aérea que planeava estabelecer ligações entre cinco capitais de forma a que houvesse voos de cada uma para três das outras. Ou poderiam ser muitas outras coisas.

Munido do resultado acima, o leitor poderá agora explicar à tal pessoa que, por mais que tente, não conseguirá nunca executar essa tarefa. Porquê? Simplesmente porque o que está a tentar fazer corresponde a um grafo em que a soma dos graus seria um número ímpar, 15, o que é impossível. Atente-se bem na imensidão de casos concretos a que o resultado acabado de descrever se aplica! Limitei-me a dar dois exemplos, mas o leitor facilmente poderá imaginar muitos mais. Além disso, escolhi os números cinco e três simplesmente a título de exemplo. Facilmente se percebe que o resultado implica que não existe nenhum grafo com um número ímpar de pontos tal que cada um esteja ligado a um número ímpar de outros pontos. E isto é ainda apenas um conjunto de casos especiais!

Há, pelo menos, duas importantes lições que se podem retirar deste simples exemplo. A primeira é a de que a pretensa dicotomia abstracto/concreto é, em grande parte, disparatada. Quanto mais uma coisa é abstracta, mais aplicações concretas tem! A segunda tem a ver com natureza da própria matemática. Repare-se que o resultado acima evidenciado é como que uma lei da Natureza, em certo sentido, mais profunda do que uma lei da física. Ele mostra que é simplesmente impossível estabelecer ligações entre um dado número de coisas de certas maneiras. É como que uma lei estrutural do Universo.

Para quem queira saber um pouco mais sobre teoria dos grafos, há excelentes livros disponíveis gratuitamente na Internet, nomeadamente o clássico *Graph Theory with Applications*, de John Bondy e Uppaluri Murty, disponível em <http://www.math.jussieu.fr/~jabondy/books/gtwa/gtwa.html>.

Um dos problemas mais famosos nesta área é o chamado "Problema do Caixeiro Viajante". Para uma descrição e algumas das suas inúmeras aplicações, ver: <http://www.tsp.gatech.edu>.

Para algumas relações curiosas entre teoria dos grafos e alguns puzzles, ver: http://www.cut-the-knot.org/do_you_know/graphs.shtml.

Num artigo de Ivan Gutman na revista *The Teaching of Mathematics*, intitulado "The Chemical Formula C_nH_{2n+2} and Its Mathematical Background" e disponível em: <http://elib.mi.sanu.ac.rs/files/journals/tm/21/tm1121.pdf>, o leitor poderá ver como o resultado muito simples acima descrito tem, pelo menos, uma consequência não trivial em química, fazendo parte da *raison d'être* da fórmula molecular geral dos alcanos!

Vale a pena detalhar um pouco algo que já foi acima referido. O resultado da teoria dos grafos atrás exposto é um exem-

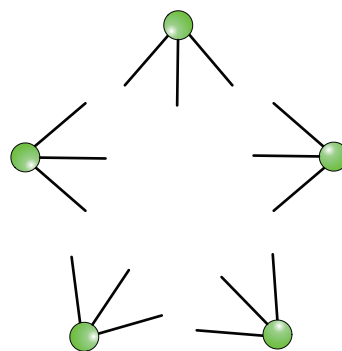


Figura 2: Uma tarefa impossível

plo do seguinte: os resultados, ou teoremas, matemáticos são leis estruturais que fazem parte da própria organização do Universo. São mais profundos que as leis físicas, no sentido em que são subjacentes a elas, uma vez que estas são descritas com base naquelas. Além disso, enquanto é possível imaginar, e mesmo "brincar", com universos em que as leis da física seriam outras, é de todo impossível conceber um universo no qual se possa ligar cinco coisas de modo a que cada uma esteja ligada a outras três. O facto de que a soma dos graus de um grafo é exactamente igual ao dobro do número de arestas é uma lei estrutural, que não só implica a não existência de certas configurações dos mais variados tipos, como delimita as possibilidades da existência de certas estruturas, como no caso dos alcanos. Faz assim parte de uma espécie de textura lógico-matemática do Universo. E é isto mesmo que eu diria ser aquilo em que consiste a matemática: o estudo de uma certa estrutura íntima do Universo, de uma espécie de textura profunda que tem algo a ver com a própria organização interna do Cosmos.

Mas, poder-se-á perguntar, como somos nós capazes de deduzir, aparentemente *à priori*, sem recurso a experiências, factos como os contidos nos teoremas matemáticos? Esta é uma pergunta que intrigou vários filósofos gregos, que deduziram que tal só era possível devido à pré-existência de algo um pouco abstracto e vago chamado alma, como detalhadamente explicado em várias obras de Platão. É Darwin que irá precisar em que consiste essa alma platónica que relembra coisas que "viu" antes de nascermos. Consiste exactamente em toda a herança evolutiva de que somos portadores e contém inúmeras experiências da nossa própria espécie, assim como de todas aquelas de que somos afortunados descendentes, desde os longínquos primórdios da vida neste nosso belo planeta. Como escreveu Darwin no fim de *A Origem das Espécies*, "há grandiosidade nesta visão da vida".