Fabio Chalub
Universidade Nova de Lisboa
chalub@fct.unl.pt

A TERRA É AZULEJO

Os desenhos das paredes das casas de banho são um pouco entediantes. O motivo é simples: queremos usar azulejos feitos de um, ou poucos, moldes, que se encaixem perfeitamente e preencham completamente a parede. Não são quaisquer figuras que satisfazem estes requisitos. Mas e se fôssemos seres quadridimensinais cercados por ladrilhos em paredes tridimensionais? Seria mais agradável o início do dia?

Considere que queremos usar azulejos obtidos de apenas um molde para cobrir uma parede. Suponha ainda que este azulejo é um polígono regular (aqueles cujos lados e ângulos são todos iguais). De quantas maneiras diferentes podemos decorar a casa de banho? (Suponha que o tamanho do azulejo é irrelevante; falaremos apenas da sua forma.) O número é surpreendentemente pequeno. Apenas três polígonos regulares são capazes de, convenientemente arrumados, preencher o plano: o triângulo, o quadrado e o hexágono. Estes são os chamados ladrilhamentos (ou por vezes pavimentação, ou ainda tesselações) regulares. Permitindo o uso de mais de um polígono regular, temos os 11 ladrilhamentos uniformes do plano (além dos três regulares, existem seis compostos de dois polígonos distintos e dois obtidos a partir de três polígonos regulares). Veja a figura 1.

A classificação acima foi obtida pelo famoso astrónomo alemão Johannes Kepler no seu livro *A Harmonia do Mundo*, publicado em 1619, onde tenta compreender o mundo físico a partir da elegância das figuras geométricas. Apesar de, num sentido estrito, os seus objetivos não terem sido atingidos, um dos importantes legados da obra é o que hoje conhecemos como Terceira Lei de Kepler, a relação entre o período orbital e a distância do planeta ao Sol.

Passados quase quatro séculos, finalmente o problema de ladrilhar o espaço tridimensional tem apresentado avanços notáveis.

Primeiro, uma definição: uma tesselação (num contexto não limitado ao plano esta expressão parece ser mais adequada) é uma partição do domínio em regiões fechadas (ou seja, que incluem a fronteira) cujo interior é disjunto. É uniforme se, quando vista de qualquer um dos seus vértices, parecer a mesma (tecnicamente, dizemos que o grupo de simetria da tesselação comuta com as translações de vértice a vértice).

Um ponto que deve ser percebido é que as tesselações do espaço são muito distintas das do plano. O único exemplo regular é dado pelo cubo, que ao ser colocado um ao lado do outro, produz uma tesselação do $\mathbb{R}^3$. Como existem apenas cinco poliedros regulares, os chamados sólidos platónicos, contra uma infinidade de polígonos regulares, isto não chega a ser uma surpresa.

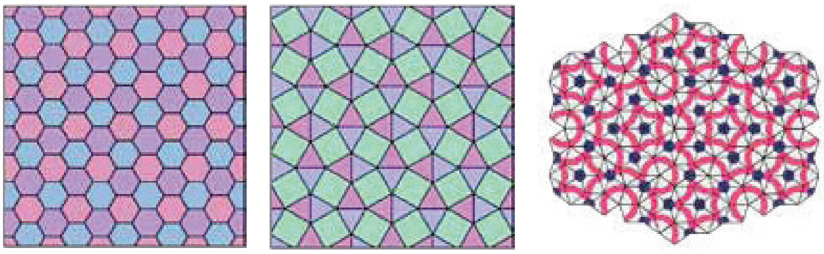

Figura 1: À esquerda, um ladrilhamento regular por hexagonos, no centro, um ladrilhamento uniforme não regular feito por quadrados e triângulos e à direita, um ladrilhamento aperiódico (dito ladrilhamento de Penrose). Não discutiremos aqui este último caso.

Existe também uma tesselação uniforme do espaço conhecida como *octet truss*, visionada inicialmente por Buckminster Fuller (o mesmo do fulereno, ou *buckyball*) e que consiste num octaedro e até dois tetraedros regulares distintos. A sua visualização é um tanto ou quanto difícil (figura 2), mas algumas animações disponíveis na Internet podem ajudar o leitor (veja, por exemplo, *http://edobobik.kilu.de/octettruss.html* ou *http://www.4dsolutions.net/ocn/graphics/fccanim.gif*). Esta tesselação associa-se naturalmente à estrutura cristalina do sal de cozinha (NaCl), conhecida como "cúbica de face centrada", ou "fcc" e também as tesselações chamadas de Delaunay, que são fundamentais em análise numérica. Somente isto mostra que ladrilhar o espaço não é só uma brincadeira que, aliás, requer muita capacidade de visualização.

Uma variante deste foi descrita inicialmente pelo grande matemático alemão Herman Minkowski ao concluir a forma ótima de empacotamento de octaedros – como colocar o maior número de octaedros de dado tamanho num certo espaço. Os vazios (ou seja, os espaços desocupados deixados entre octaedros), como se concluiu posteriormente, são tetraedros.

Até ao trabalho [1], acreditava-se que estas eram essencialmente as únicas tesselações possíveis do $\mathbb{R}^3$. O que John Conway (mais conhecido por ter criado o "Jogo da Vida"), Yang Jiao e Salvatore Torquato, todos da Universidade de Princeton, nos Estados Unidos, fizeram foi perceber que era possível deformar estas duas últimas tesselações continuamente de uma para a outra, usando sempre um único octaedro e um pequeno número de tetraedros. Num sentido bastante técnico, cada um dos elementos desta família não é equivalente a nenhum outro, fornecendo uma quantidade genuinamente infinita de tesselações do $\mathbb{R}^3$.

Como é comum acontecer em certos ramos mais abstratos da matemática, uma pergunta natural é como é que estes resultados se generalizam a outros espaços. Em dimensão mais alta, a resposta dada é pelos próprios autores: ela não se generaliza. Um raciocínio completamente diferente terá de ser feito para compreendermos as tesselações não triviais de $\mathbb{R}^4$ ou mesmo dimensões superiores. Em espaços não-euclideanos, como por exemplo a superfície de uma esfera, entender formas ótimas de tesselações (no entanto, num sentido mais restrito do que o discutido aqui) é importante para o desenho de algoritmos numéricos eficientes. Uma tesselação da superfície terreste (e que explica a brincadeira do título) está na figura 3.

REFERÊNCIAS

[1] J. H. Conway, Y. Jiao and S. Torquato, "New Family of Tilings of Three-Dimensional Euclidean Space by Teatrahedra and Octahedra", *Proc. Natl. Acad. Science* 2011 108 (27) 11009-11012.

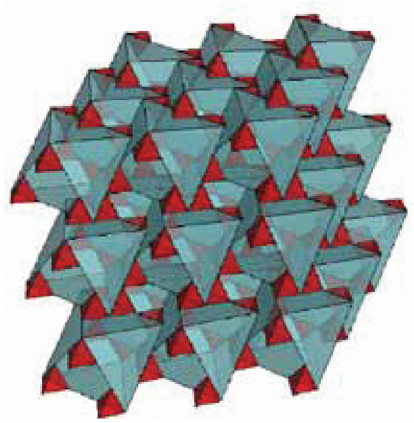

Figura 2: Um *octet truss* com peças semi-transparentes. Ainda está a ser difícil visualizar? Visite os sites referidos no texto. Figura gentilmente cedida pelos autores do artigo [1].

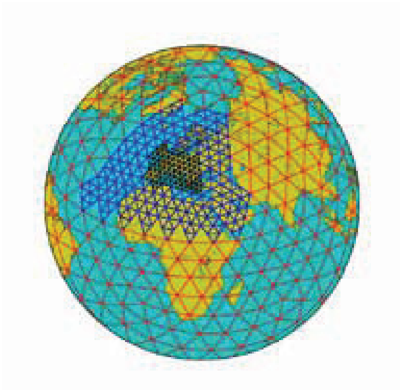

Figura 3: Uma tesselação numa esfera, usada em soluções numéricas de equações às derivadas parciais definidas em superfícies. Figura gentilmente cedida por Luca Bonaventura (Politécnico de Milão e ICON Project - *http://icon.enes.org*).

ERRATUM

Uma figura bidimensional pode ajudar a compreender uma realidade tridimensional, mas por vezes o tiro sai pela culatra. Como reparou o leitor Rui Albuquerque, da Universidade de Évora, a explicação na legenda da figura 2 desta coluna no último número da *Gazeta* está errada. Dados dois planos paralelos entre si que intersectem uma esfera, a área da superfície da esfera compreendida entre estes dois planos depende apenas da distância entre estes, e não da sua posição relativa à esfera. Desta forma, os dois raios de Sol destacados na figura iluminam a mesma área da Terra, ao contrário do que foi dito. Este resultado segue de um teorema de Arquimedes, como pode ser visto na página do colega eborense: *http://home.uevora.pt/~rpa/ArquiGD/node4.html*

A grande diferença, no entanto, é a quantidade de luz solar que ilumina esta mesma área, menor à medida que nos aproximamos dos pólos. Assim, a conclusão permanece: a temperatura média é maior no equador.

Este texto foi escrito ao abrigo das normas do Novo Acordo Ortográfico.