O Asno, o Triângulo e uma Antiga Refutação do Postulado Quinto dos "Elementos"

Bernardo Mota

Universidade Técnica de Berlim e Universidade de Lisboa
bernardomota@campus.ul.pt

A história do asno e do triângulo conta-se em poucas palavras. Sabemos por Proclo, um comentador de Euclides, do século V, que os epicuristas gostavam de ridicularizar o teorema vigésimo do primeiro livro dos "Elementos" (dois lados de um triângulo tomados em conjunto de qualquer maneira são maiores do que o terceiro), por demonstrar um resultado óbvio até para um asno.[1] De acordo com Proclo, a nossa única fonte sobre este assunto, o argumento dos epicuristas procedia da seguinte maneira: imagine-se que num dos vértices de um triângulo está colocado um asno e que noutro vértice está colocado um cesto de ração. Quando o asno, esfomeado, pretende chegar à comida, percorre o lado que une o vértice onde se encontra àquele onde está a comida, em vez de percorrer os outros dois. O burro procederia desta forma porque reconheceria que um dos lados de um triângulo determina um caminho mais curto do que os dois restantes; ora, sendo este facto a tal ponto evidente que até um burro o compreende, a sua demonstração é, no mínimo, escusada.[2]

A história do burro e do teorema vigésimo dos "Elementos" tornou-se célebre e provocou inúmeras reacções ao longo dos séculos. Algumas foram encolerizadas e directas; Henry Savile não gostou e não teve papas na língua em afirmar que os autores deste extraordinário raciocínio eram dignos, eles próprios, de almoçarem a palha com o dito asno.[3] A reacção parece justa; afinal de contas, conhecer o facto não é o mesmo que compreendê-lo por meio de uma explicação satisfatória e plausível. O próprio Proclo aproveita de imediato para esclarecer o erro dos epicuristas: que o resultado demonstrado seja manifesto para os sentidos não significa que seja manifesto para o pensamento científico; também é evidente para os sentidos que o fogo aquece, mas nem por isso deixamos de inquirir a razão por que aquece; ou ainda, é evidente para os sentidos que nos movemos, mas carece de explicação científica perceber exactamente como, ou seja, se o fazemos ao longo de um meio sem parte ou de intervalo para intervalo e, neste caso, como conseguimos atravessar um número infinito de intervalos.[4]

Sucede que os epicuristas não eram seguramente ingénuos a ponto de levantar uma objecção infantil à geometria euclidiana. Para interpretarmos convenientemente a sua reserva e a forma de a expressar, temos de explicar brevemente a sua agenda, comparar a solução euclidiana com outras e entender os problemas matemáticos e filosóficos envolvidos. É este, por conseguinte, o plano do artigo.

Os epicuristas tornaram-se conhecidos pela sua hostilidade para com a geometria. O próprio Epicuro, fundador da escola e contemporâneo de Euclides (se aceitarmos a cronologia tradicional de ambos), era fervoroso adversário da matemática e promovia explicitamente, na sua acção educativa, o ataque à disciplina. Cícero (séc. I a.C.) informa-nos que Polieno, um importante epicurista de primeira geração,

> Os epicuristas são hoje mais conhecidos pelas suas ideias no domínio da Ética. No entanto, procederam também a um exame crítico da geometria euclidiana, cuja importância na história da transmissão dos "Elementos" apenas recentemente começou a ser compreendida.

[1] O comentário de Proclo ao primeiro livro dos "Elementos" de Euclides está disponível em tradução inglesa: Glenn Morrow, "Proclus. A Commentary on the First Book of Euclid's Elements". Princeton University Press, 1992; é a esta edição que me referirei ao longo do artigo. Refiro-me ao texto dos "Elementos" de Euclides a partir da edição de J.L. Heiberg; E.S. Stamatis, "Euclides I. Elementa I-IV", Leipzig, Teubner, 1969. Também me referirei à clássica tradução inglesa de Thomas L. Heath ("The Thirteen Books of Euclid's Elements", 3 vols., New York, Dover, 1956; a 1.ª edição é da Cambridge University Press, 1908; a mesma editora publicou a 2.ª edição em 1925; a edição da Dover é a reimpressão da 2ª edição).

[2] Uma história semelhante é contada por Sexto Empírico (século I), a propósito de Crísipo, o estóico (século III a.C.) Este filósofo afirmava que até um cão de caça compreende e aplica correctamente o *modus tollendo ponens* (ou A ou B; mas não A; logo, B); com efeito, se chega a uma encruzilhada enquanto persegue a sua presa e tem de escolher entre três caminhos, não sentindo o cheiro da sua vítima em dois deles, imediatamente escolhe o terceiro sem se preocupar com em verificar o cheiro novamente (Pir. 1.69).

[3] A afirmação encontra-se em "Praelectiones Tresdecim in Principium Elementorum Euclidis", Oxford, 1621, p. 78.

[4] A contra-objecção de Proclo encontra-se em Morrow, 1992, p. 251.

começara por ser matemático, após o que passou a acreditar que a geometria era falsa, depois de aceitar os argumentos de Epicuro[5]. Polieno escreveu uma obra contra a geometria que mereceu uma resposta do tamanho de um livro por parte do mais famoso homem de ciência romano do século I a.C., Posidónio (que, aliás, parece ter andado por terras de Portugal e Espanha a estudar o fenómeno das marés). Um pouco mais tarde, outros epicuristas, como Demétrio de Lacónia e Zenão de Sídon (séc. II-I a.C.), escreveram monografias sobre geometria contendo inúmeras objecções a teoremas incluídos nos "Elementos". Pelo menos mais outros dois membros da escola, Basílides e Filónides (séc. III-II a.C.), alcançaram reputação como geómetras; o primeiro é mencionado na dedicatória de Hípsicles ao livro décimo quarto dos "Elementos"; o segundo, no início do segundo livro de "As Cónicas" de Apolónio.

A rejeição epicurista da matemática não era, portanto, ignorante. Pelo contrário, ela era levada a cabo por membros da escola com reputação e competência em matemática. O problema é que das obras destes autores restam apenas escassos fragmentos, o que torna muito difícil a tarefa de caracterizar em pormenor as objecções levantadas. Sabemos, no entanto, que a crítica epicurista era especialmente dirigida contra a geometria tal como exposta nos "Elementos", e sabemos também a sua motivação genérica. É que a geometria euclidiana, seja por meio dos seus princípios, seja por meio das suas demonstrações, propõe conceitos como incomensurabilidade ou divisão *ad infinitum*, que os epicuristas entendiam que contrariavam a sua teoria das unidades mínimas da matéria[6]. Se a matéria é constituída por partículas mínimas indivisíveis, a geometria euclidiana é talvez interessante do ponto de vista conceptual, mas não é verdadeira, no sentido em que não exprime factos compatíveis com o mundo, mas antes conflituosos com a experiência (agora podemos compreender melhor a alusão feita por Proclo à forma como se processa o movimento, mais acima). Este é um ponto fundamental para compreender a história do burro contada anteriormente. Os epicuristas aceitam como verdadeiras algumas verdades matemáticas, mas não todas; apenas aquelas sobre as quais não restam dúvidas de que são compatíveis com a realidade física. O teste do burro é apenas uma maneira de salientar a veracidade de um facto matemático, resultante da sua adequação aos dados da experiência e da realidade.

Explicada a razão de ser da sua forma de expressão, vejamos agora o que os pode ter levado a realçar o carácter evidente do referido teorema.

A páginas tantas do seu comentário, Proclo apresenta um argumento que pretende refutar a tese de que duas rectas cortadas por uma terceira se intersectam quando os ângulos internos do mesmo lado da secante são menores do que dois ângulos rectos (o que equivale a contradizer o famoso postulado quinto dos "Elementos"). O argumento é o seguinte (ver fig. 1) [7]. Tracem-se duas semi-rectas AB e CD a partir dos extremos de um segmento de recta AC (e para o mesmo lado do segmento), de maneira a que os ângulos interiores que se formam sejam menores do que dois ângulos rectos. Bissecte-se AC em E; tome-se em AB uma distância $AF=AE$ e em CD uma distância $CG=EC$.

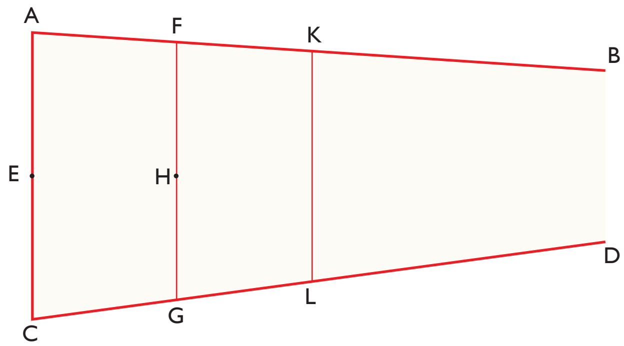

Figura 1: Uma refutação (epicurista?) do postulado quinto dos "Elementos".

É claro que AF e CG não se encontram em qualquer ponto de FG, "porque se se encontrassem, dois lados de um triângulo tomados em conjunto seriam iguais ao terceiro", o que é impossível. Novamente, trace-se a recta FG; bissecte-se em H e tomem-se distâncias iguais em AB e CD, de tal forma que $FH=FK$ e $HG=GL$. Chega-se à mesma conclusão; o argumento pretende que caso se prolongue o processo indefinidamente, fica provado que as rectas AB e CD não se intersectam, o que contradiz o postulado quinto.

Todos os ingredientes da visão antigeométrica epicurista estão presentes. O raciocínio envolve paradoxos relacionados com o infinito que ecoam de alguma forma os famosos paradoxos de Zenão (como o da lebre e da tartaruga, no caso de os ângulos internos do mesmo lado da secante serem iguais), mas está dirigido muito peculiarmente contra a geometria euclidiana, alicerçada como está no postulado quinto. Mas para este argumento (que utiliza a geometria contra ela própria) funcionar, precisa de admitir como verdade incontroversa um facto matemático muito preciso: o de que quaisquer dois lados de um triângulo são maiores do que o terceiro. Os epicuristas precisam de justificar porque é que este teorema em particular é verdadeiro e para isso realçam a sua total evidência. Estamos em condições de expandir um pouco mais o raciocínio epicurista: a geometria euclidiana prova coisas desnecessárias de forma elaborada (Euclides demora vinte proposições a demonstrar que quaisquer dois lados de um triângulo são maiores do que o terceiro), ao passo que demonstra ou assume factos (durante muito tempo hesitou-se entre considerar o postulado quinto no número dos postulados ou no dos teoremas) que são falsos.

Hoje a falácia é evidente: o processo é, de facto, infinito, mas tal não impede as linhas de se encontrarem numa distância finita. Contudo, também sabemos hoje que, apesar de o argumento ser falacioso, há formas de geometria em que a conclusão a que chega está certa; ou seja, há formas de geometria em que o postulado quinto é, de facto, falso. Ou seja, o argumento, apesar de falacioso, é interessante e a conclusão a que pretende chegar verifica-se de facto, pelo menos em determinadas condições.

É claro que não precisamos de tanta sofisticação para conferirmos um significado não anedótico à crítica epicurista. Basta constatarmos que muitos manuais de geometria preferem um raciocínio mais simples para chegar ao teorema acerca dos lados de um triângulo, por motivos pedagógicos. Um exemplo está no velhinho e bem conhecido manual de António Nascimento Palma Fernandes[8]:

> **Teorema:** Num triângulo, qualquer lado é menor do que a soma dos outros dois.
>
> **Hipótese:** Dado o triângulo *ABC*.
>
> **Tese:** $AB<BC+AC$; $AC<AB+BC$; $BC<AB+AC$
>
> **Demonstração:** Este teorema é consequência imediata do postulado "O segmento de recta é a linha mais curta que se pode traçar unindo dois pontos".

O postulado que o excerto refere encontra-se explicado previamente na mesma obra (p. 19), aí sendo indicado como exemplo de axioma:

> No estudo que vamos fazer aparecem certas proposições que se admitem sem justificação e que têm muita importância; tais proposições têm o nome de axiomas. Como exemplos de axiomas geométricos, temos:
>
> a) O segmento de recta é a linha mais curta que se pode traçar unindo dois pontos.

A solução não é de todo disparatada. Ela não só é económica e clara, como se baseia num axioma de formulação quase idêntica a outro que o próprio Arquimedes incluía no número dos princípios ("a linha recta é a mais curta de todas as linhas que possuem as mesmas extremidades", em "Sobre a Esfera e o Cilindro I", no início). O próprio Proclo tenta assimilar a definição euclidiana de "linha recta" à de Arquimedes. "O intervalo", diz ele, "entre dois pontos quaisquer é o comprimento da linha recta que estes pontos definem, e isto é que significa '[uma linha recta é uma linha que] está posta ao mesmo nível em relação a todos os pontos que estão nela'". De seguida, conclui: "Portanto [a definição euclidiana] está de acordo com a noção comum de que aqueles que avançam em linha recta percorrem apenas a distância que precisam de percorrer, como se diz, enquanto aqueles que não avançam em linha recta andam mais do que é necessário" [9]. Nesta

[5] Epicuro morreu em 270 a.C. e Polieno, um pouco antes dele. As únicas informações a seu respeito encontram-se em Diógenes Laércio ("Vita Philosophorum" 10.25) e Cícero ("Académica" 2.106 e "De Finibus" 1.20).

[6] O conceito de incomensurabilidade aplica-se, por exemplo, à diagonal do quadrado; a demonstração deste facto recua ao tempo dos pitagóricos e encontra-se na proposição 117 do livro décimo dos "Elementos" (embora aí tenha sido provavelmente interpolada); o conceito de divisão *ad infinitum* surge, por exemplo, quando se aplica o postulado 1, que assume a possibilidade de se traçar uma recta entre qualquer par de pontos, e a proposição que ensina a bissectar uma recta ("Elementos" 1.10). As unidades mínimas dos epicuristas não são os átomos, mas entidades submúltiplas dos átomos (estas sim, indivisíveis).

[7] Veja-se Morrow, 1992, pp. 289 e ss. Proclo não indica o(s) autor(es) do argumento, mas, seja pelo contexto em que é referido, seja pelo seu conteúdo, parece, sem dúvida, de origem epicurista, como foi sugerido por Michael White ("What to Say to a Geometer", *Greek, Roman and Byzantine Studies* 30.2, 1989, pp. 297-311).

[8] Cito a partir de: "Elementos de Geometria", Lisboa, 1962, p. 61.

[9] Veja-se Morrow, 1992, pp. 88-89. A definição de linha recta atribuída a Euclides corresponde a "Elementos 1". def. 4.

proposta, o teorema surge como um princípio ou, no mínimo, como uma "consequência imediata" de um princípio (Proclo chega a aludir ao resultado por meio da expressão "noção comum"). Ora, aquilo que se toma como princípio não constitui matéria de demonstração, o que pode ser utilizado contra os "Elementos". Esta acaba por ser uma segunda implicação da crítica epicurista, estivessem os membros da escola conscientes dela ou não. Robert Simson compreendeu-o muito bem e procurou eliminar a dificuldade, defendendo que o número de axiomas não deve ser alargado sem necessidade [10]. O argumento epicurista assim expandido acaba por chamar a atenção para as aporias envolvidas na determinação do que deve ser considerado (ou não) matéria de demonstração em geometria.

O que nos leva a concluir com uma terceira nota curiosa a propósito do teorema (sempre levando em conta a objecção epicurista), relacionada com o seu papel nos "Elementos". Euclides ensina a construir um triângulo a partir de três linhas rectas iguais a outras três linhas rectas dadas em "Elementos" I.22. Sucede que a construção só é possível se se atender àquela importante restrição: é necessário que quaisquer duas das rectas dadas, consideradas em conjunto, sejam maiores do que a terceira. Por esta razão, a restrição não só é introduzida no enunciado do problema, sob a forma de um *diorismos* (ou seja, de uma indicação explícita sobre as condições de possibilidade), mas também é demonstrada anteriormente, na proposição vigésima do mesmo livro.

No entanto, foi muitas vezes atribuído ao teorema acerca dos lados do triângulo um outro papel, muito mais subtil, na proposição I.22. Para o compreender, temos de apresentar resumidamente esta proposição (ver fig. 2). Na semi-recta *DE* sejam postos consecutivamente os segmentos de recta *DF*, *FG* e *GH* iguais a três segmentos de recta dados *A*, *B* e *C*, com que se quer construir um triângulo. Trace-se o círculo *DKL*, com centro em *F* e raio *FD*; de novo, trace-se o círculo *KLH*, com centro em *G* e raio *GH*. Ora, no triângulo construído *FGK*, o lado *FK* é igual a *FD* (raios do mesmo círculo), que por sua vez é igual ao segmento de recta *A*; o lado *GK* é igual a *GH* (raios do mesmo círculo), que por sua vez é igual ao segmento de recta *C*; o segmento restante *FG* foi desde início traçado igual ao segmento *B*. Construiu-se, pois, um triângulo a partir de três segmentos de recta iguais a outros três segmentos de recta dados.

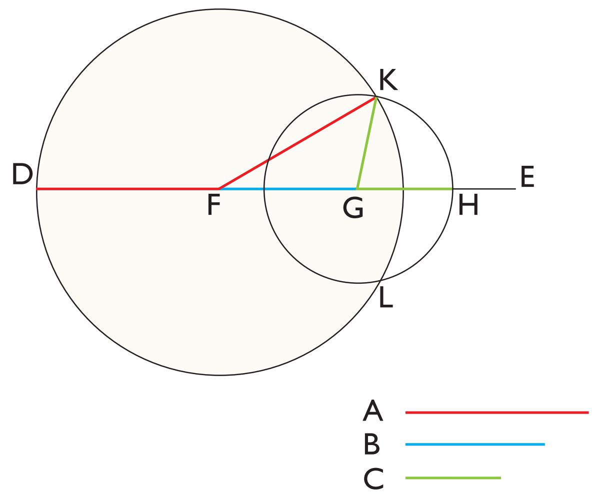

Figura 2: "Elementos" I.22.

O problema é que não há proposição ou axioma nos "Elementos" que justifique a intersecção dos círculos no ponto *K*. A falha foi reconhecida já na Antiguidade, pois Proclo fala dela como uma das objecções normalmente lançadas contra a proposta euclidiana. Muitos comentadores, no entanto, aceitam como explicação satisfatória precisamente o nosso teorema I.20 [11]. Como diz Robert Simson:

> Quem é tão obtuso, apesar de estar apenas a iniciar o estudo dos "Elementos", a ponto de não perceber que o círculo descrito com centro em *F* e raio *FD* tem de intersectar *FH* entre *F* e *H*, porque *FD* é menor do que *FH*; e que, pela mesma razão, o círculo descrito com centro *G* e raio *GH* tem de intersectar *DG* entre *D* e *G*; e que estes círculos têm de se intersectar um ao outro, porque *FD* e *GH* em conjunto são maiores do que *FG*? [12]

Esta é, portanto, para muitos, a segunda função do teorema I.20: assegurar a explicação para o facto de que os círculos construídos em I.22 se intersectam.

O que nenhum dos comentadores refere, ocupados que estão em atacar os caluniadores de Euclides, é que a primeiríssima proposição do primeiro livro dos "Elementos" ensina a construir um triângulo equilátero e não é senão um caso particular de I.22. Eis como procede (fig. 3). Na recta *AB*, com centro em *A* e raio *AB*, descreve-se o círculo *BCD*; com centro em *B* e raio *BA*, descreve-se o círculo *ACE*; e do ponto *C*, "no qual os círculos se cortam um ao outro", até aos pontos *A* e *B*, traçam-se as rectas *CA* e *CB*. Ora, *AC*=*AB* (raios do mesmo círculo); *BC* é igual a *BA* (raios do mesmo círculo) e *CA*=*CB* (coisas iguais a uma terceira coisa são iguais entre si); portanto, o triângulo *ABC* é equilátero.

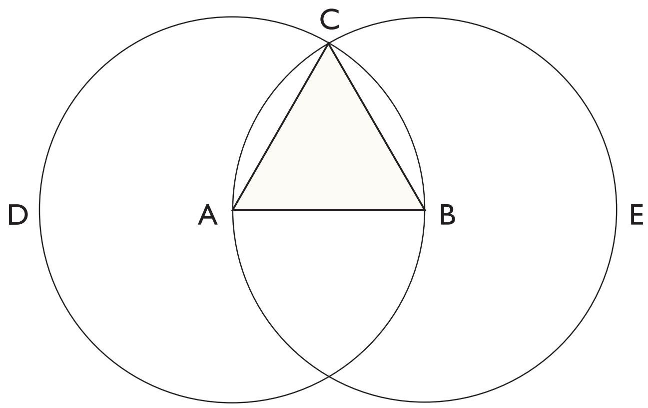

Figura 3: "Elementos" I.1.

Em ambas as proposições (I.1 e I.22) são desenhados círculos cuja intersecção se admite sem justificação. Ora, o teorema vigésimo precede o vigésimo segundo e talvez ainda possa ser invocado como justificação para o facto de que os círculos se intersectam *nesse* teorema. Mas não se pode aplicar a mesma explicação ao caso semelhante que ocorre na primeira proposição, caso contrário cairíamos num discurso circular e tautológico (a não ser que a admitíssemos como axioma, o que vem redundar em dar razão aos epicuristas). Por outro lado, se admitimos que ela não convence como justificação de que os círculos se intersectam em "Elementos" I.1, então é quase absurdo invocar a sua suposta evidência para justificar a mesma intersecção em "Elementos" I.22 [13].

Estabelecer uma ordem de prioridade nas proposições e definir claramente o que é matéria de demonstração (ou não) são tarefas essenciais no âmbito da construção de um sistema axiomático. Neste sentido, ao realçar o carácter axiomático de "Elementos" I.20, a crítica epicurista acaba por produzir polémica sobre: a) a ordenação das proposições patente nos "Elementos"; b) a razão de ser de alguns dos seus princípios fundamentais, como o postulado quinto; c) a necessidade de algumas demonstrações incluídas nos "Elementos"; d) o conceito de "evidência" em matemática. A objecção não é, pois, assim tão disparatada, apesar de formulada numa linguagem pouco científica.

No meio desta embrulhada, eu não impediria os epicuristas de almoçarem com o burro; afinal de contas, eles gostavam de aproveitar a vida. No entanto, talvez tivesse algum interesse em saber sobre o que conversariam durante a refeição.

AGRADECIMENTOS

Gostaria de aqui expressar o meu agradecimento a Henrique Leitão, pela leitura que fez do artigo, e o meu reconhecimento à Fundação Alexander von Humboldt (Alemanha), pelo seu apoio ao meu projecto de investigação actual.

REFERÊNCIAS

[1] Heath, Thomas L. (1956). *The Thirteen Books of Euclid's Elements*, 3 vols., New York, Dover (1ª edição é da Cambridge University Press, 1908; a mesma editora publicou a 2ª edição em 1925; a edição da Dover é a reimpressão desta 2ª edição).

[2] Heiberg, J.L.; Stamatis, E.S. (1969). *Euclides I. Elementa I-IV*, Leipzig, Teubner.

[3] Morrow, Glenn (1992). "Proclus. A Commentary on the First Book of Euclid's Elements". Princeton University Press.

[4] White, Michael (1989). "What to Say to a Geometer", *Greek, Roman and Byzantine Studies* 30.2, pp. 297-311.

[10] Robert Simson, "The Elements of Euclid...", Philadelphia, Desilver, Thomas & CO., 1838, p. 240: "*[...] the right answer to this objection against this and the 21st and some other plain propositions, is that the number of axioms ought not to be increased without necessity, as it must be if these propositions be not demonstrated.*" .

[11] Assim entendem Proclo, Johann Wilhelm Von Camerer ou Isaac Todhunter, entre outros (para um resumo, veja-se Heath, 1956, vol. 1, p. 293).

[12] Simson 1838, p. 241 (o trecho está também citado em Heath, 1956, vol. 1, p. 293). É irresistível fazer notar que Simson realça a evidência do teorema I.20 à maneira epicurista.

[13] Não deixa de ser engraçado verificar que as propostas modernas para resolver o problema da intersecção dos círculos acabam por acrescentar novos postulados e teoremas aos oferecidos por Euclides; para um resumo, veja-se Heath, 1956, vol. 1, pp. 234-240.

SOBRE OS AUTOR

Bernardo Mota é docente da Faculdade de Letras da Universidade de Lisboa. Faz investigação no Centro de Estudos Clássicos da mesma faculdade e no Centro Interuniversitário de História das Ciências e Tecnologia (FCUL/FCT-UNL). Actualmente está também ligado à Universidade Técnica de Berlim, onde é bolseiro de pós-doutoramento da Fundação Alexander von Humboldt.